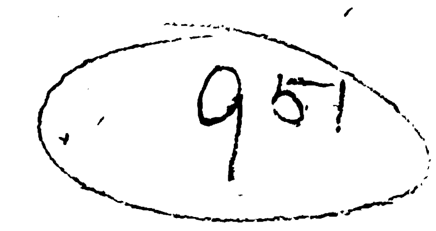
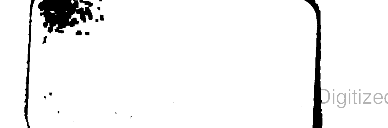


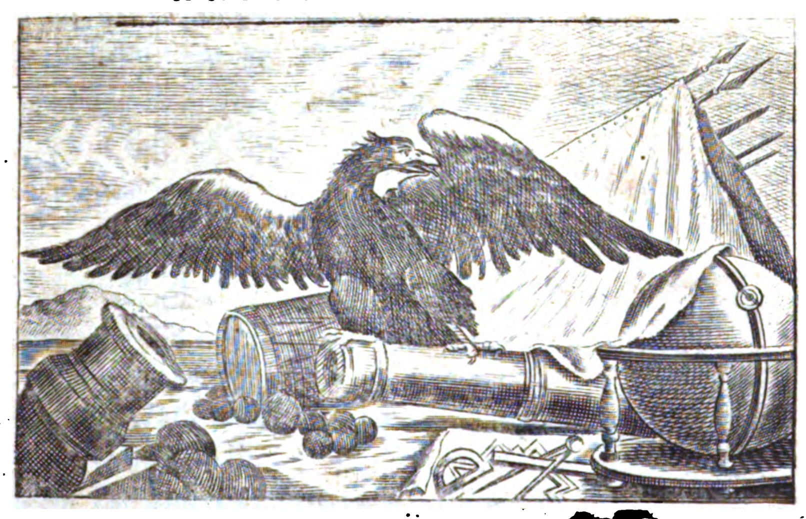


Robert Barclay,
Bury Hill.



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

ANNÉE MDCCLXVII.



A' BERLIN
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLXIX.

Imprimé
par ordre de l'Académie.

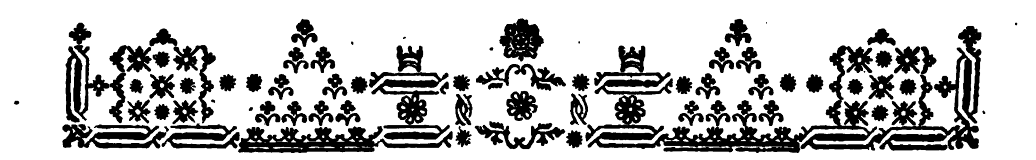


TABLE.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.

CLAS-



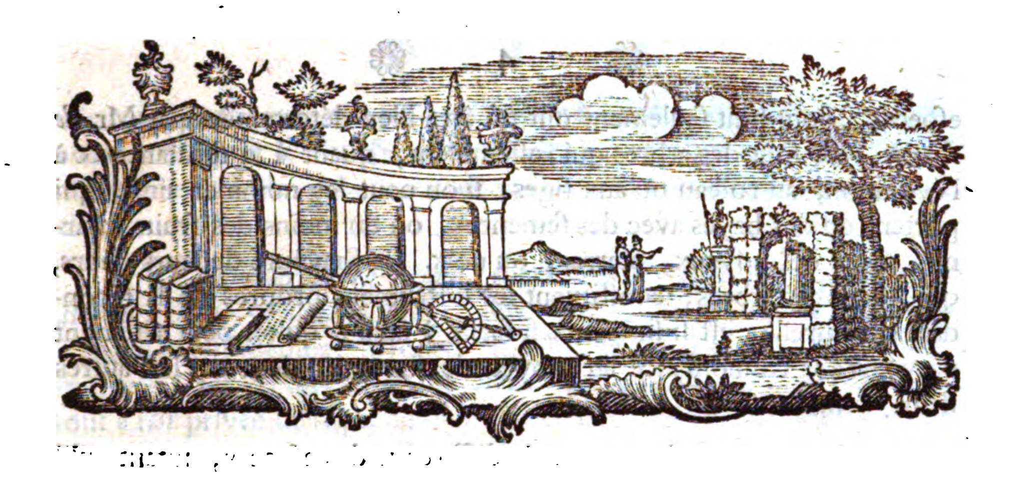
CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.



RÉLATION

DE LA

FÉCONDATION ARTIFICIELLE D'UN PALMIER FEMELLE,

RÉITÉRÉE POUR LA TROISIEME FOIS, ET AVEC UN PLEIN SUCCÈS, DANS LE JARDIN BOTANIQUE DE L'ACADÉMIE ROYALE À BERLIN.

PAR M. GLÉDITSCH. (*)

Traduit de l'Allemand.

La Nature, qui, conformément à ſes propres loix, n'a mis aucune différence entre l'importante famille des Palmiers, par rapport à la maniere naturelle de la fécondation & de la propagation, & les plus petites plantes, n'a pas laiſſé de la diſtinguer fort conſidérablement de toutes les autres à pluſieurs autres égards. Cette famille remarquable ne conſiſte juſqu'ici qu'en dix eſpe-

(*) Lû le 14 Juillet 1768.

eſpeces, dont huit ſeulement ont pû être bien déterminées par Mr. *de Linné.* Ce ſont des arbres qui reſſemblent, quant à la ſubſtance & à l'évolution, au roſeau ou aux tiges, ſi on peut les nommer ainſi, qui portent ou des bayes avec des ſemences, ou du moins des fruits charnus, avec des noyaux, pierres, ou noix. La ſtructure de leurs fleurs, qui, dans ces arbres, conſtituent les inſtrumens propres de la fécondation naturelle, eſt ſi ſimple & ſi facile à ſaiſir, qu'on peut aiſément parvenir à ſa connoiſſance au moyen de ſon analogie avec les autres fleurs connues.

Quant à ce qui concerne la différence des eſpeces, autant qu'il importe en général d'en être inſtruit, pour arriver à une idée exacte des circonſtances eſſentielles de leur fécondation & de leur propagation; voici en quoi elle conſiſte. La premiere eſpece de ces Palmiers, que *Linné* nomme *Phœnix*, & qui eſt proprement le *Palmier commun*, a une plante *mâle* à part, & une autre *femelle*, qui en differe & en eſt totalement ſéparée; quoique l'une & l'autre ſoient produites d'une maniere naturelle par une mere-plante commune, au moyen des fruits qui en tombent, & puiſſent ſe trouver tout près d'elle, ou vivre à une fort grande diſtance. Il ſe trouve quelquefois, dans les bouquets des fleurs femelles de ce palmier, des fleurs mâles à part qui y ſont diſperſées, leſquelles ſont, ou tout à fait cachées, ou parfaitement à découvert, comme nous l'avons obſervé ſur quelques uns de nos palmiers communs. Cette derniere circonſtance embarraſſa beaucoup, il y a quelques années, le célebre Profeſſeur d'Edimbourg, *Alſton*, parce qu'elle ne lui étoit pas connue, & qu'il ne pouvoit par conſéquent la ſoupçonner, ni deviner d'où venoient à de ſemblables plantes femelles des ſemences mûres & parfaites, tandis que, comme il l'avoit obſervé & l'affirmoit, il n'exiſtoit aucune plante mâle dans le voiſinage.

Dans les eſpeces de Palmiers qu'on nomme *Coccos*, *Areca*, *Elate* & *Caryota*, on rencontre de véritables fleurs mâles à part, parmi les femelles, dans un ſeul & même bouquet commun de fleurs; les eſpeces *Cycas* & *Zamia* ſont à cet égard encore indéterminées; il

n'y

n'y a que la *Corypha* qui est un *Palmier* fécond, régulier, *à fleurs hermaphrodites*; & le *Borassus* a une plante mâle, tout à fait séparée de sa femelle. Il reste encore beaucoup d'incertitude par rapport à ce dernier.

Le *Chamærops* de *Linné*, autrement *Palmite*, & en Allemand *Butter-Dattel-Palme*, dont il doit être question dans ce Mémoire, s'écarte manifestement de toutes les especes qui viennent d'être mentionnées, en ce qu'elle a une *véritable* Plante *femelle hermaphrodite*, tout à fait privée de la partie mâle, avec une autre plante mâle, qui en est entierement distincte, destinée à la féconder. Il faut bien comprendre la circonstance que j'indique ici, savoir que notre Palmier du Jardin Botanique Royal est une vraie plante femelle hermaphrodite, c'est à dire, suivant l'analogie qu'on peut déduire de la plûpart des animaux, une plante qui possede parfaitement toutes les parties femelles de la fécondation, sans aucun défaut, ni aucune exception, tandis que les parties mâles qui s'y rapportent n'ont ni l'étoffe, ni la force, requises pour la fécondation de ces parties femelles; de sorte qu'elle a nécessairement besoin d'un autre plante mâle séparée qui la féconde; & cette plante existe aussi toujours. L'un de ces Palmiers ne pouvant donc pas subsister sans l'autre, rélativement à la fécondation, & chacune de ces plantes à part demeurant inutile, il faut, ou qu'elles croissent tellement voisines qu'elles puissent se féconder l'une l'autre sans l'intervention d'aucun secours, ou que leur fécondation soit procurée, convenablement aux vues de la Nature, par le mouvement de l'air, par des insectes, ou par l'industrie humaine.

C'est ainsi qu'arrive en effet la fécondation de cette espece de Palmiers, & de plusieurs autres plantes, dans les régions chaudes Orientales & Méridionales, sans le moindre désordre. Il faut que les secours étrangers d'agens qui sont hors de ces Palmiers mêmes, s'en mêlent, comme je viens de le dire, toutes les fois que les voies accoûtumées de la fécondation naturelle sont détruites par quelques accidens contraires à la Nature. Et qu'y a-t-il de plus aisé que ce que

 la

la poussiere des fleurs propres à la fécondation s'échapant de ses capsules, à l'ouverture de nouvelles fleurs, forme au lever du Soleil, une sorte de nuage délié de poussiere, qui, transporté par un doux mouvement de l'air, passe sur les fleurs de la plante femelle, située dans le voisinage, qui s'en impregnent avec force. Avec quelle abondance aussi des insectes sans nombre ne portent-ils pas la poussiere des fleurs d'une plante sur l'autre, (& sans ce secours nous aurions peut-être de la peine à nous procurer des *melons*, des *angouries*, des *citrouilles* & des *concombres*,) pour rassembler leur miel & l'étoffe de leur cire, aussi bien que pour se régaler des sucs doux & déliés que contiennent les pistils! Que n'opere pas aussi la main des Orientaux, & de plusieurs Insulaires aux Indes, qui tirent leur subsistance des fruits du Palmier commun, pour ne pas mourir de faim, ou plutôt pour chercher à se pourvoir par échange d'autres alimens nécessaires! Cela s'est ainsi passé dans ces contrées depuis que les hommes les habitent & les cultivent; & les choses sont encore sur le même pied. Cela n'empêche pas que les Savans ne mettent en question pendant ce tems-là, si la chose est possible, & si le fait est réel? D'où viennent donc, dans certaines années, tant de petites guerres entre les Negres, sinon de ce que quelque désordre dans les saisons a fait manquer la récolte des dattes, ce qui les expose à la famine? Les misérables Grecs, qui gémissent sous le joug de la domination Turque, parviennent-ils à faire leurs provisions de dattes & de pistaches par d'autres voies que celles que j'ai indiquées? Qu'on sépare donc les palmiers mâles de ces palmiers femelles, dont j'ai dit ci-dessus que la proximité des mâles leur étoit absolument nécessaire pour la fécondation; on verra infailliblement arriver ce qui avoit eu lieu à Berlin, par rapport à notre palmier femelle, depuis le tems du feu Roi Fréderic I, savoir que cet arbre privé de son mâle étoit demeuré dans une parfaite stérilité jusqu'en 1749, au lieu que sa fécondation a pleinement réussi trois fois depuis ce tems-là, & que ses fruits sont parvenus à maturité.

Quoiqu'il soit déjà suffisamment connu, que les dattes mûres du *Chamærops*, tant dans les pays Orientaux, qu'en Italie, en Espagne

& en Portugal, n'ont pas un goût assez emmiélé, pour qu'on puisse s'en nourrir, on sait d'un autre côté qu'elles peuvent être employées, comme la Terre du Japon nommée *Catechu*, contre la dysenterie, dans les maux de poitrine, & pour toutes sortes d'accidens de la bouche, du col & des dents. Leur odeur ressemble à celle du vieux beurre, leur goût a beaucoup d'acreté & d'amertume, & fort peu de douceur; de sorte qu'on peut les comparer à cet égard au fruit non-mûr du *Siliqua dulcis* (en Allemand *Johannis-Brod*). La fécondation de cette espece de Palmier s'exécute dans les contrées susdites avec le même succès que celle du Palmier commun (*Palma dactylifera vulgaris*). Mais on ne la cultive pas partout pour l'amour de ses fruits, & même on ne la connoit pas bien en plusieurs endroits, comme cela paroit par ce que dit le ci-devant Professeur à Padoue *Pontedera*, des fruits imparfaits de ce Palmier qu'on trouve en divers lieux de l'Espagne & de l'Italie. C'est ce qui a engagé *Belon* à appeller notre palmier femelle *Palma abortiva*, l'ayant trouvé assez abondamment dans les régions Orientales, mais jamais avec des dattes parvenues à la maturité qu'ont celles que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie. Personne en effet ne confondra jamais les débris inféconds que produisoit tous les ans notre palmier, & que je place ici à côté des effets de la fécondation, avec ces fruits parfaits, & surtout avec celui qui a servi à produire un jeune palmier qui tire son extraction du premier.

Le palmier femelle que nous conservons dans le Jardin Botanique Royal, est fort vieux & de belle apparence, sans avoir jamais porté de dattes, jusqu'aux années 1749 & 1750, où je le fécondai pour la premiere & la seconde fois avec de la poussiere des fleurs du palmier mâle que j'avois fait venir de Leipsig par la poste. J'ai fait rapport dans le tems même à l'Académie de ces deux expériences; & j'ai produit, au moyen des dattes parfaitement mûres, de jeunes palmiers qui existent encore dans le Jardin. Cette fécondation si complette, dans une contrée aussi septentrionale que l'est la Marche, fut alors pour tous les Connoisseurs & les Amateurs des singularités de la Nature, un

cas

cas aussi inattendu & agréable, qu'il est devenu depuis un fait important pour ceux qui s'appliquent plus particulierement à l'étude des choses naturelles & pour tous les Philosophes. L'effet en fut dès le moment tel qu'il devoit être pour lever un des doutes les plus embarrassans, & décider une des controverses les plus vives; puisqu'il mit sous les yeux avec une pleine évidence la diversité réelle des sexes dans les plantes, leur fécondation, & la maniere de les féconder; le tout de la maniere la plus abrégée & la plus distincte. Car la simplicité des deux expériences faites sur ce palmier est si lumineuse & si convaincante, & les suites ont poussé cette force à un si haut point, qu'il ne sauroit plus naître à cet égard la moindre contestation.

En attendant, on peut regarder ici comme une circonstance bien digne d'attention, que la matiere fécondante du palmier mâle soit venue de vint milles de distance; & que la troisieme fois je l'aye reçue de Carlsruhe, par conséquent de 80 milles, dans une mince enveloppe de papier, sans qu'elle ait perdu quoi que ce soit de sa propriété essentielle. Cette particularité confirme les rélations que nous avons de la culture & de la fécondation des palmiers en Orient, où l'on nous dit que, dans le tems de la fleur de ces arbres, les habitans vont chercher partout jusqu'au fonds des deserts les fleurs mâles, qu'ils cueillent de dessus les palmiers sauvages; après quoi ils en font de gros bouquets, qu'ils mettent à côté des fleurs femelles, dans leur étui (*spata*), afin que la poussiere des premieres serve à féconder les autres. On assure que, pendant de semblables voyages, les fleurs mâles restent quelquefois quinze jours, ou trois semaines, en chemin, avant qu'on les emploie à la fécondation.

Avant que d'entreprendre les deux premieres expériences sur le palmier, j'en fis d'autres préliminaires dans le Jardin Botanique Royal sur l'arbre du mastic (*Lentiscus*), & sur l'arbre de la térébenthine (*Pistacia Terebinthus*), lesquelles eurent l'une & l'autre un bon succès, surtout celle que je fis sur le dernier de ces arbres, dont je recueillis une demi-mesure (*Metze*) de noix, qui ont servi à produire de jeunes plantes.

Ce

Ce furent ces essais qui me conduisirent aux suivans, que j'eus ensuite occasion de faire sur le palmier.

Après la double réussite dont il a été fait mention, j'avois laissé reposer le palmier dix-huit ans, sans lui procurer aucune fécondation ultérieure, ne laissant pas pourtant de prendre beaucoup de peine pour me procurer de la poussiere de fleurs d'autres endroits. A la fin je m'adressai au célebre Docteur *Kœhlreuter*, Conseiller du Margrave de Bade-Dourlach, un des plus habiles Naturalistes de notre tems, qui m'envoya, au mois de Mai, de cette poussiere de fleurs que je cherchois depuis si longtems en vain, avec une petite quantité de la même poussiere qu'il conservoit déjà depuis un an, pour essayer l'une & l'autre. La derniere n'a déployé aucune vertu fécondante sur notre palmier; mais la premiere a fait d'autant plus d'effet, comme le témoignent les palmes chargées de dattes qui sont sous vos yeux.

Ce fut l'année passée, entre le 9 & le 26 de Mai, que notre palmier poussa successivement onze bouquets de fleurs; j'en fécondai trois à la fois de la maniere dont je vais rendre compte. Le Sr. *Müller*, Jardinier du Jardin Botanique Royal, avoit très bien préparé ce palmier à l'expérience projettée, en le nettoyant de la poussiere des vieilles feuilles, des autres débris & des bouquets de fleurs seches; & la force avec laquelle il évaporoit & attiroit depuis ce tems-là, rendoit tout à fait sensible le bon effet de ces précautions. Il avoit aussi, à cause de la grande hauteur de cet arbre & de son emplacement, dressé au dessous de la couronne un échaffaudage, qui mettoit en état de féconder régulierement les fleurs, & dans les commencemens de les considérer avec attention, aussi longtems que cela étoit nécessaire.

Les onze bouquets de fleurs étant sortis de leurs étuis, pousserent tout à la fois une multitude de fleurs autour du palmier, qui répandoient une odeur extrêmement forte & pénétrante, mais en même tems très agréable, restaurante & vineuse, qui parfumoit toute la serre, & engageoit ceux qui y entroient à la respirer longtems. Cette

te odeur dura autant que ces fleurs continuerent à s'ouvrir les unes après les autres; mais, quand cela vint aux dernieres, elle s'affoiblit assez sensiblement. On avoit dans l'odeur dont je viens de parler l'indice le plus certain que les parties des fleurs destinées à la fécondation étoient parfaitement ouvertes; & le point précis de cette fécondation étoit reconnoissable par la forte affluence des sucs. Les antheres étoient non seulement émoussées & vuides de la matiere requise pour la fécondation, mais elles n'exhaloient point la bonne odeur restaurante, qu'on a coûtume de sentir dans plusieurs autres fleurs.

De cette maniere, les fleurs du palmier se trouvant dans leur plus grande force, & les parties feminines qui y étoient ouvertes, ayant leur enduit ordinaire d'humidité huileuse, j'entamai le travail de la fécondation, qu'il falloit encore réitérer une fois à cause des fleurs tardives; & pour y procéder avec plus d'exactitude, je me servis la premiere fois de l'assistance de M. *Behrens*, habile Etudiant en Médecine, & la seconde, de celle de M. le Docteur *Martini*, savant Naturaliste.

Des onze bouquets de palmier fleuris, je choisis les trois de devant, qui étoient le plus près des fenêtres de la serre, & le mieux exposés à la chaleur du Soleil. Le premier étoit le plus petit; je le couvris exactement de la vieille poussiere de fleurs qui avoit été gardée plus d'un an; mais elle ne produisit aucun effet, comme je pus d'abord l'observer au bout d'une quinzaine de jours. Je ne regarde pourtant pas cet essai comme une tentative absolument vaine. Le second bouquet, qui étoit le plus considérable, fut fécondé par la poussiere des fleurs fraîches, autant que le permettoit la quantité des fleurs qui se trouvoient alors ouvertes. Le dernier ne reçut l'imprégnation qu'à sa partie inférieure, sans que les fleurs d'en haut retinssent quoi que ce soit de la poussiere des fleurs. Ayant donc été obligé de garder encore huit jours la poussiere fécondante qui m'avoit été envoyée de Carlsruhe, je procédai à la seconde fécondation, de la maniere que j'ai déjà rapportée, dans les derniers jours du mois de Mai. Quand j'examinai ensuite quel avoit été l'effet de la poussiere des fleurs, je trouvai que le bord des fleurs avec les antheres émoussées étoit tombé, ou du

moins

moins avoit souffert quelque changement; les petits ovaires s'étoient amollis, avoient pris un peu d'accroissement, leur couleur avoit varié & ils commençoient à devenir brillans.

La maniere dont les fleurs femelles sont fécondées par la poussiere des fleurs mâles, est si simple, qu'il n'y a personne qui ne soit en état de l'exécuter; aussi c'est le commun peuple qui s'en acquitte dans les pays Orientaux: il ne s'agit, comme je l'ai déjà dit, que de mettre le bouquet de fleurs mâles près des fleurs femelles, dans un étui, sur le palmier, ou bien de répandre la poussiere sur les fleurs sans autre art. C'est de cette derniere façon que j'ai été obligé de m'y prendre dans mes premiers essais, ayant détaché avec une cueiller à caffé la poussiere qui tenoit à l'enveloppe de papier, & l'ayant ensuite fait tomber doucement sur les fleurs. Au contraire, dans les dernieres expériences, j'ai posé régulierement la poussiere sur les fleurs ouvertes, avec un petit pinceau de cheveux, pareil à celui dont les Peintres se servent, & j'ai poudré doucement les fleurs, sans en omettre une seule. Ce que j'ai fait, suffisoit parfaitement; & la situation des fleurs, jointe à la conformation de leurs parties ouvertes, ne demandoit pas qu'on y employât l'art auquel on a recours quand il s'agit de fleurs plus petites, ou dont la structure a quelque chose de particulier. Tous les autres bouquets de fleurs laisserent tomber la plûpart de leurs petits fruits, que je n'avois pas fécondés; & ceux dont l'affluence du suc avoit un peu gonflé les parties charnues, n'eurent aucun noyau, mais porterent seulement une petite semence imparfaite & stérile; & leur grosseur ne parvint à peu près qu'à celle d'un pois chiche ordinaire, comme on peut s'en convaincre en considérant les bouquets de fruits imparfaits que j'expose ici.

Au contraire le gros bouquet fécondé produisit, sur la fin du septieme mois, des dattes mûres & parfaites, avec cette différence, que celles des premieres fleurs sont les plus grosses, au lieu que celles des secondes sont de diverses grosseurs, à cause que dans les mois suivans la chaleur du Soleil a diminué; & en général elles sont plus petites

tes que les autres. La figure des dattes parfaites ressemble à celle des olives; leur couleur est d'un brun de noix, & dans les plus belles, d'un brun de châtaigne. L'écorce extérieure est mince & fort brillante; celle du milieu au contraire est épaisse, filamenteuse & grisâtre: sous celle-ci se trouve l'enveloppe charnue & molle du noyau, qui a la couleur de la fleur de muscade (*macis*) fraîche, quand elle entoure la coquille dure de la noix muscade. L'odeur de cette substance charnue est désagréable, tirant à celle du vieux beurre, ce qui est un signe de la maturité de ces dattes, qui, à cause de cela, ont reçu en Allemand le nom de *Butter-Dattel.* Quant au goût de ces dattes, qui a peu de douceur & beaucoup d'acreté, à quoi l'on peut ajoûter qu'il répond en quelque chose à l'odeur, on peut le comparer à certains égards au goût du fruit non-mûr de la *Siliqua dulcis*, en Allemand *Johannis-Brod*, comme il a déjà été dit ci-dessus. La multitude des fruits qui sont fort serrés l'un près de l'autre dans la grappe, est cause que la plûpart sont restés petits, quoiqu'ils ayent leur noyau parfait & fertile. On appelle *noyau* dans les dattes, la partie supérieure allongée, plus pointue que l'inférieure, aussi pierreuse que *Jean Bauhin* la caractérise dans ses Especes des plantes, & avec cela un peu polie, & marquée de traits profonds. La ressemblance qu'ont ces dattes avec les fruits des premieres expériences dans lesquelles la fécondation a réussi, met en état de prédire avec certitude qu'elles sont propres à produire de jeunes palmiers.

Voici les conséquences qu'on est en droit de tirer des essais entrepris avec succès sur notre palmier.

1. Que, dans certaines familles des plantes, il y a des tiges séparées les unes des autres, qui dépendent absolument l'une de l'autre par rapport à leur fécondation naturelle, puisqu'elles sont produites l'une & l'autre de leurs semences par la même plante-mere; comme les animaux mâles & femelles proviennent sans distinction des œufs fécondés d'une seule & même femelle.

2. Que

2. Que les deux tiges susdites agissent régulierement l'une sur l'autre, & doivent agir de façon que de l'une soit transportée dans l'autre une certaine matiere formatrice particuliere, qui y produit un changement manifeste, lequel consiste dans une véritable fécondation, de laquelle s'ensuit la propagation & la conservation constante des especes naturelles; comme le Regne végétal en fournit des preuves abondantes. Tout cela ne pourroit arriver, & n'arrive effectivement jamais suivant l'expérience commune, à moins que l'action efficace d'une des deux plantes sur l'autre n'ait précédé.

3. Que l'action qui y est requise pour produire un changement aussi considérable, n'a & ne peut avoir lieu sans un contact réel, immédiat ou médiat, des deux palmiers, comme cela est requis dans les animaux mâles & femelles, conformément aux loix générales de la Nature & au témoignage manifeste de l'expérience. Ce contact arrive en effet dans les plantes; mais, autant que nous en sommes instruits jusqu'à présent, l'unique voie consiste dans la poussiere des fleurs de la plante mâle, où, suivant l'idée distincte que la science peut nous en fournir, se trouve contenu ce qui sert à la fécondation de l'autre plante, & à toutes les suites qui en dépendent; tout comme la semence du mâle, chez les animaux, féconde l'œuf de la femelle.

4. Que, dans l'état naturel des choses, après ce contact des deux sexes, le changement dont il a été souvent fait mention, & au moyen de celui-ci la fécondation telle qu'elle a communément lieu dans le Regne végétal, arrivent immanquablement. Tout cela est subordonné à une loi unique, imposée aux plantes & à leurs différentes especes, dans leur premiere destination; loi suivant laquelle elles produisent & tirent d'elles-mêmes leur propre semence fertile, qui sert à les propager.

Ce qu'il y a d'essentiel dans l'ouvrage souverainement important de la génération des plantes, autant que les plus habiles Natura-

listes modernes ont pu parvenir à le découvrir en quelque maniére, en se fondant sur les expériences les plus exactes & les plus fréquemment réitérées, est appuyé entr'autres choses sur les principales circonstances suivantes, qui ne consistent pas en de simples conjectures, ou en de vaines imaginations, mais qui ont été mises à l'abri de toute contestation par des expériences physiques réelles. Mr. le Conseiller & Docteur *Kahlreuter* s'est rendu particulierement recommandable de nos jours par ses découvertes dans ce genre; & il a fait peut-être lui seul à cet égard plus que n'avoient fait tous ceux qui l'ont précédé.

La poussiere des fleurs est dans les plantes ce qu'est la semence des mâles dans les animaux. Elle contient une matiere active, souverainement déliée, qui féconde les plantes femelles, & doit pour cet effet y être introduite; & alors elle y déploie sa vertu pénétrante & expansive avec une promtitude inconcevable: ce qui paroit par la subite défloreſcence de quelques fleurs, qui se contractent tout à la fois & tombent; ce qui arrive & doit arriver dans l'espace de sept heures. La flêtrissure & l'effeuillement des fleurs rendent témoignage de ce qui a précédé, aussi bien que le fruit tendre qui subsiste & continue à croître.

Cette poussiere des fleurs consiste uniquement en petites vessies, de plusieurs figures différentes, quoiqu'en général globuleuses, rondes ou allongées, qui tiennent plus ou moins les unes aux autres, ou sont même tout à fait isolées; elles sont formées d'une double pellicule écailleuse en forme de rets, où est renfermée une véritable moëlle celluleuse friable. Cette moëlle est une propagation des plus subtiles de la moëlle qui est répandue dans toute la plante, à commencer des fibres extérieures presque invisibles du chevelu de la racine, d'où elles montent dans le corps de la plante, & parvenant jusqu'aux fleurs & à leurs antheres, entre finalement dans les petites vessies de la poussiere séminale, s'y termine, & renferme dans ses cellules une humidité séparée & préparée pour le but le plus essentiel des plantes.

Cette

Cette humidité qui, avant que de sortir des vésicules de la poussiere, n'est pas encore fluide, & demeure exempte de tout mêlange étranger, sort à diverses reprises, sans la moindre violence, à travers les petites ouvertures, les points, les canalicules, les crochets, les épines, ou autres parties de telle configuration qu'on voudra se les représenter; ce qui est procuré par une douce & alternative contraction de ces parties vivantes & souverainement irritables. C'est ce dont on peut se convaincre en observant que les globules de la poussiere des fleurs, lorsque quelque action trop forte les sollicite extérieurement, comme l'eau le fait aisément avant leur maturité, laissent sortir rapidement & même éclater leur matiere encore crue & fluide. Au contraire, cette matiere de la poussiere des fleurs, quand elle est parfaite, & que son tems de sortir est venu, ne le fait que peu à peu, sans que ses vésicules crevent pour cet effet, & elle s'étend sur l'eau comme une huile tout à fait déliée. C'en est aussi une, puisqu'elle fournit proprément aux abeilles l'étoffe pour leur cire. Cette matiere huileuse se manifeste distinctement, quand on prend de la poussiere de fleurs fraîches, ou seches, par exemple, de pin, & qu'on la laisse fort longtems dans un mortier de verre avec du mercure courant pur en friction, ou même qu'on réitere la trituration fréquemment & longtems, jusqu'à ce que le mercure se soit distribué dans cette poussiere, au point qu'on ne puisse plus le remarquer que par l'accroissement de la pesanteur. La masse entiere de la poussiere change de couleur, elle tient ensemble, & représente une substance pareille à de la cire, qu'on peut pêtrir jusqu'à un certain point entre les doits, mais qui n'est pourtant pas encore de la cire; & quand on l'enveloppe dans du papier fin, comme cela m'est arrivé par hazard, elle pénetre tout ce papier de son huile subtile de façon qu'il a ensuite l'air d'avoir été imbibé d'huile de pavôt. Peut-être que cet essai peut encore conduire à quelque chose de plus important, si, comme je l'ai aussi fait, on forme des mêlanges de chaux métalliques, ou de limailles très déliées de métaux, ou de métaux mêmes, d'une maniere analogue à la précédente, avec diverses poussieres de fleurs.

Quand

Quand la poussiere des fleurs a obtenu la perfection requise pour la fécondation, de façon que ses antheres doivent s'ouvrir, ce qui a coûtume d'arriver successivement à mesure que les fleurs s'épanouissent, & qui doit même se réitérer à diverses reprises; alors aussi ces fleurs ont toujours une situation parfaitement adaptée à la fécondation de l'organe femelle, c'est à dire, qu'elles peuvent approcher plus près, ou retirer en arriere, le *stigma* du pistil, ou la fente de l'ouverture qui est au tuyau de l'*uterus*, autant que cela est nécessaire, & que l'irritation dure, (comme on peut l'observer dans toutes les autres fleurs hermaphrodites fertiles.) Ce *stigma* est pour l'ordinaire velu en dehors, & garni, comme le sont en dedans les canaux qui conduisent le fruit à l'ovaire, ou à son *uterus*, de verrues déliées, de différentes figures, entre lesquelles la poussiere des plantes est portée extérieurement, & répand son huile. Ces verrues sont de petits canaux, qui, lorsque les fleurs viennent à s'ouvrir, fournissent aussi auparavant une quantité considérable d'une singuliere humidité, fort analogue à celle que les vésicules de la poussiere de fleurs transsudent. C'est alors proprement le point de la fécondation: & elle arrive, ou avant, ou après. Cette circonstance mérite d'être remarquée, & il ne faut pas la négliger, comme on le fait quelquefois, quand on veut féconder les fleurs. Il y a quelque affinité entre cette liqueur végétale femelle, & la liqueur vaginale des animaux, desquels peut-être les plus petits insectes ne doivent pas être exceptés. Mais, si l'on faisoit scrupule de se décider à leur égard, jusqu'à ce qu'on ait atteint une plus grande certitude, il est toujours très important d'observer cette circonstance, c'est que la fécondation n'arrive jamais dans les fleurs, avant que les canaux du fruit & le *stigma* se soient ouverts, & que cette espece particuliere de baume en soit sortie. Mais comment les choses se passent-elles à cet égard dans la multitude innombrable des animaux, même des plus petits insectes & de toutes leurs especes? Il y a tout à la fois de l'analogie & de très grandes variétés. Dans les animaux femelles, avant leur accouplement avec le mâle, les parties génitales s'ouvrent d'une maniere tout à fait manifeste; les menstrues en découlent auparavant,

ravant, ou s'il s'agit d'especes qui n'y soient pas sujettes, il y a tout au moins une humidité qui s'exhale en forme de globules les plus déliés, ou en forme de vapeurs humides, du vagin de leur uterus ou des tubes de leurs ovaires.

Les deux sortes singulieres d'humidités qui sont particulierement filtrées dans les fleurs, & dont l'une transsude de la poussiere des fleurs mâles, l'autre du tuyau de l'ovaire, ou du style de la fleur femelle, se réunissent & se confondent ensemble; par où l'une altere les propriétés de l'autre, ce qui produit une substance d'une troisieme nature, laquelle participe à celles des deux précédentes: & cela se manifeste plus ou moins dans les jeunes plantes, après la fécondation & la propagation. La partie la plus déliée de ces deux substances fluides nouvellement réunies, est portée par voie de suction dans l'ovaire, d'où elle entre dans les gousses des semences à peine formées & non développées; & en peu de tems elle y cause par la force qui lui est propre un si grand changement, qu'elle étend d'une maniere incroyable le point moëlleux qui s'y trouve, lui fournit la premiere nourriture, & pose par là les fondemens du développement ultérieur du germe de la plante nouvellement formée. Pendant ce merveilleux changement, qui se manifeste seulement dans les parties de la fleur, cette partie déliée de la moëlle qui, venant de la plante, s'est terminée dans l'ovaire des fleurs, paroit acquérir au moyen de l'humidité active qui a été décrite, l'addition d'un fluide vivant, qui la met en état de s'étendre, & qui est en même tems son premier aliment. Nous n'avons jusqu'à présent qu'une idée tout à fait confuse de sa constitution essentielle & de sa vraie maniere d'opérer; nous ne pouvons nous hazarder à en juger que d'après les suites visibles de l'expansion & du développement dont on vient de parler.

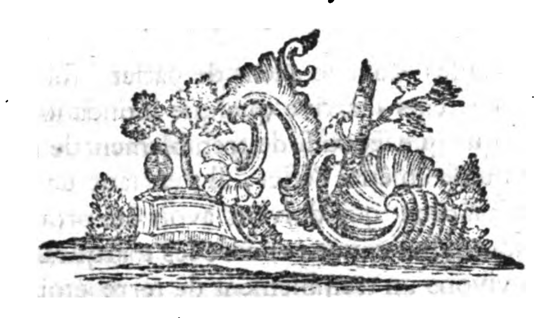
Cependant, comme l'étoffe primordiale de tous les fluides consiste en parties dures ou solides, qui, suivant leur espece, ont leur figure propre & déterminée, mais qui ne sauroient conserver leur flui-

dité & les propriétés qui en dépendent hors d'une femblable liaifon, dans plufieurs circonftances variables, qui peuvent & doivent s'y manifefter dès qu'on y ajoûte ou qu'on en ôtè quelque chofe; voilà pourquoi elles ceffent fort aifément de demeurer fluides. Cela s'exécute fans grande difficulté, quand cette matiere fouffre alternativement quelque évaporation, ou filtration, ou même dès qu'il s'y paffe quelque efpece de mouvement intérieur, qui a pour fondement la féparation de certaines parties conftitutives; par où une certaine efpece de particules de toute la maffe entrent dans une liaifon plus étroite, & s'approchent plus près les unes des autres, fuivant un ordre déterminé, dont elles font plus fufceptibles que les autres, en vertu de leur nature particuliere. On ne fauroit pourtant entrer à cet égard dans de grands détails, à moins qu'on ne foit porté à tirer des conféquences de ce qui fuit à ce qui a précédé; quoiqu'on demeure toujours fort éloigné de la certitude.

Pour ne pas être plus prolixe fur ce fujet que ne le permettent les bornes de ce Mémoire, je n'indiquerai que ce qu'il y a de plus néceffaire à favoir fur ce qui fe manifefte extérieurement, & de la maniere la plus fenfible, après la fécondation des fleurs femelles. Auffitôt que le fuc huileux nouvellement introduit dans l'ovaire, comme je l'ai déjà dit, a pénétré dans les gouffes des femences, il arrive un changement marqué dans toute la fleur. D'abord les antheres tombent avec tout ce qui étoit requis du côté de la partie mâle avant la fécondation, après quoi fuivent la corolle & le calyce, à moins que cela ne leur foit déjà arrivé en même tems qu'aux antheres, ou peu auparavant, pendant la fécondation, lorfque les fleurs viennent à s'ouvrir. L'ovaire s'élargit peu à peu, fa couleur change, & il prend l'apparence d'un fruit, tel que celui qui eft propre à chaque efpece. Mais, comme le premier dévéloppement des parties effentielles du fruit eft procuré par la force & l'action de l'humidité ci-deffus décrite, la feve auffi du refte de la plante fert à faire croître tout le fruit, & à le conduire à fa parfaite maturité.

Depuis

Depuis que j'ai rendu compte de la fécondation artificielle du palmier femelle dans le Jardin Botanique Royal, tous les effets & tous les changemens nécessaires pour produire une semence parfaite & féconde, ont eu lieu; & cette semence est propre à donner de jeunes palmiers de son espece. La poussiere des fleurs mâles a été régulierement appliquée à cet usage; & les dattes mûres avec leurs noyaux parfaitement durs témoignent du succès de cette opération. A juger par leur état, on n'a aucun lieu de douter que, vers la fin du mois d'Avril prochain, ou dans le cours du mois de Mai, ces dattes ne fournissent déjà de jeunes palmiers, comme ont fait celles qui étoient nées dans le même Jardin en 1749 & 1750; & qu'en mémoire d'une expérience aussi décisive, on n'en demande dans plusieurs Jardins étrangers. Ceux qui existent & qui resteront dans notre Jardin, ont un feuillage qui s'embellit d'année en année; & dans cent ans, ou fort au delà, ils instruiront nos descendans de la cause de leur existence.



SUR LA
FIGURE DE L'OCÉAN.
PAR M. LAMBERT.

Les changemens arrivés à la ſurface & dans l'intérieur de la Terre doivent ſans contredit être attribués, partie à des tremblemens de terre, partie à des inondations. Ce ſont du moins les deux cauſes les plus univerſelles & les plus violentes que nous connoiſſions. Je dis les plus violentes; car pour peu qu'on parcoure les pays montagneux, & qu'on repaſſe les différentes couches dans l'intérieur de la Terre, les rochers fendus, les pétrifications & les coquillages qui ſe trouvent en quantité dans des endroits élevés & fort éloignés de la mer & de leur lieu natal, on n'aura point de peine à ſe convaincre que des cauſes lentes & ſucceſſives ne ſuffiſent pas pour produire tous ces effets.

Les deux cauſes dont je viens de parler, ſubſiſtent encore, en ce que de tems en tems il arrive quelque inondation & qu'il ſe paſſe peu d'années ſans quelque ſecouſſe de tremblement de terre. Mais, quelque violent que puiſſe en être l'effet, il s'en faut de beaucoup qu'on puiſſe le comparer à ceux qui doivent avoir été produits dans les anciens têms, & dont nous voyons encore les marques. En effet, ſi dans le ſiecle où nous vivons un tremblement de terre étoit aſſez fort pour élever du fond de l'Archipel une nouvelle Isle, il s'en faudroit de beaucoup que cet effet fût comparable à celui d'un tremblement de terre, qui du fond des eaux pouvoit avoir élevé les rochers immenſes des Alpes ou des Cordelieres, avant que le feu ſouterrain pût s'ouvrir un paſſage libre par le ſommet des volcans.

Il en

Il en eſt de même des inondations. Elles ne ſe manifeſtent plus que dans les cas où des pluies trop abondantes font déborder les rivieres, & où les rivieres en continuant de charier du ſable, du limon, des pierres, les dépoſent vers leurs embouchures & ſe ferment par-là le paſſage dans la mer, & enfin où la mer agitée par la marée, ou par des tremblemens de terre, & aidée par les vents, s'éleve au deſſus de ſon rivage. Ces effets ſont peu de choſe vis à vis de ceux où la mer alloit dépoſer ce qui ſe trouvoit dans ſon fond ſur les ſommets des montagnes les plus éloignées.

Il paroit donc que le ſyſteme de notre globe s'eſt mis dans un certain état de permanence. Les volcans ſont ouverts & donnent une iſſue libre aux feux ſouterrains. De tems en tems il s'en ouvre un nouveau, tandis que d'autres ſe ferment. On conçoit auſſi qu'il pourroit s'en ouvrir au fond de la mer, ſi l'eau ne rempliſſoit pas d'abord la caverne qui commence à ſe former. Ce qui étant, on conçoit auſſi que la plûpart des tremblemens de terre tirent leur origine du fond de la mer, & que les terres maritimes ſont par-là même le plus ſujettes aux ſecouſſes violentes. Quelquefois auſſi, les feux ſouterrains vomiſſant aſſez de matériaux pour élever du fond de la mer une eſpece de montagne, on conçoit d'où vient qu'il ſe trouve des volcans en forme de petites Isles au milieu de l'Océan. Enfin, on ne ſauroit douter que le terrain s'affaiſſant peu à peu par les pluies & par ſon propre poids, n'ait beſoin de tems en tems d'être rendu plus poreux & plus ſpongieux, & que les ſecouſſes d'un tremblement de terre n'y contribuent d'autant plus efficacement que par-là les feux ſouterrains l'impregnent de nouveau de toutes ces parties ſalines, nitreuſes, & ſulphureuſes, qui par les eaux de pluie pouvoient avoir été emmenées dans l'intérieur de la Terre. Ce qui étant, on ne ſauroit douter que les tremblemens de terre ne renouvellent ſa fertilité, & qu'ils ne ſoient plus ou moins néceſſaires pour l'état de permanence dont je viens de parler.

Quant aux inondations, elles ne sont ni si fréquentes ni si étendues que les tremblemens de terre. Comme leurs causes sont moins cachées, l'industrie des hommes est parvenue à en arrêter & diminuer les effets. On laisse déborder le Nil, on en empêche les autres rivieres; & les Hollandois se mettent à l'abri des inondations qu'ils ont à craindre de la mer. Dans tous les autres pays, le terrain a plus d'élévation, & la mer elle-même s'est fait un lit de sable élevé vers le rivage, qui sert de digue. Et à cet égard, l'état de permanence est rétabli depuis des tems immémoriaux, ou, ce qui revient au même, depuis que la mer en découlant des parties élevées s'est retirée dans le lit que la constitution intérieure de la Terre lui a permis de creuser.

Quoique de cette façon les tremblemens de terre & les inondations qui reviennent de tems en tems, ne nous offrent qu'un tableau en mignature de ces grands bouleversemens que le globe terrestre doit avoir soufferts dans les anciens tems, les loix générales de la Nature ne laissent pas d'être les mêmes. Supposons toute la surface du globe unie & couverte d'eau; les feux souterrains ne tarderont pas d'élever par-ci par-là la croûte de la Terre, qui les couvre & les enveloppe avec d'autant plus de violence qu'il n'y a point encore de volcans dont les sommets ouverts pourroient leur laisser un passage libre. Que cette croûte soit de rochers, je vois ces rochers se fendre & s'élever dans des positions plus ou moins verticales. Ces feux se trouvant au dessous du fond de la mer, on ne pourra leur donner moins d'une ou de deux lieues de profondeur. Or la densité de l'air augmentant à mesure qu'on descend plus bas, on trouve, par une supputation assez facile, que cette densité doit être 3, 6, ou même 9 fois plus grande dans cette profondeur qu'elle n'est à la surface de la Terre. Par-là elle est à peu près égale à celle de l'air comprimé dans la boëte d'un fusil à vent. L'action du feu pourra encore augmenter jusqu'au quadruple l'élasticité qui naît de cette compression. Ainsi, dès qu'on suppose cet air enfermé dans une caverne entourée de rochers, les feux souterrains s'en approchant ne pourront manquer de produire des effets énormes, &

répan-

répandus par une grande étendue de pays. Je ne trouve rien d'impossible à en déduire l'origine des Cordelieres, des Alpes, des Pirénées & en général des rochers les plus élevés qui se trouvent répandus sur la surface de la Terre. Le mouvement & le bouillonnement des eaux, & l'enfoncement de la croûte qui en formoit le fond, en devoient être des suites naturelles.

Jettons maintenant un coup d'œil sur les pays montagneux, pour retrouver de quelle maniere les eaux en découlerent. On a observé généralement, que les angles saillans d'une suite de montagnes sont opposés aux angles rentrans de ceux d'une autre suite, qui en est séparée par la vallée. Je n'en alléguerai qu'un seul exemple, qui est assez grand pour être retrouvé dans les Cartes géographiques. On sait que le Rhin coule de l'Orient vers l'Occident, depuis le Lac de Constance jusqu'à Bâle, & que depuis Bâle il prend son cours vers le Nord, en formant à très peu près un angle droit. Les montagnes de la Forêt noire se trouvent dans cet angle, & opposent par-là leur angle saillant à la ville de Bâle. De l'autre côté, les montagnes de la Suisse se joignent à celles qui séparent la Lorraine de l'Alsace, & forment par là l'angle rentrant.

On voit bien qu'à cet égard je regarde les montagnes de la Forêt noire comme une seule montagne, quoiqu'elles soient entrecoupées par plusieurs vallées. Mais, outre que toutes ces vallées sont fort étroites & plus élevées que le Rhin, je ne fais à cet égard autre chose que d'appliquer à un plus grand district de pays ce qui s'observe à l'égard des montagnes d'une moindre étendue. On n'a qu'à passer le St. Gotthard pour voir que son joug est composé de monts & de vallées, qu'on prendroit pour telles, si on ne savoit pas combien il a fallu monter pour y parvenir. C'est ainsi que le terme de montagne est rélatif à la plaine qui en forme la base. Cette plaine peut faire partie d'une montagne plus étendue. Ainsi, à l'égard des plaines de l'Alsace, les montagnes des Vauges qui la séparent de la Lorraine, ne forment dans leur tout qu'une seule montagne, parce qu'elles ont une base

ſaſe ou une racine commune. Il en eſt de même de celles de la Forêt noire, des Alpes, des Cordelieres &c.

Je reviens à la remarque, que les angles ſaillans ſont généralement oppoſés aux angles rentrans. J'ajoute que l'angle rentrant forme une petite vallée, qui entrecoupe plus ou moins la continuité du joug de la ſuite de montagnes qui bordent la grande vallée. Cette circonſtance produit à l'égard des vallées un certain parallélisme, qui les fait reſſembler aux lits des rivieres. Auſſi n'étoit-il gueres poſſible que les eaux découlaſſent autrement, lorſqu'en abandonnant les hauteurs elles alloient ſe rendre dans les enfoncemens qui forment actuellement le lit des mers. Ces eaux perdoient de leur viteſſe à meſure qu'elles pouvoient s'élargir, & par-là même elles devoient dépoſer le limon, le ſable, les pierres & les rochers qu'elles avoient chariés avant que d'avoir gagné une plaine plus ouverte. Les inondations qui arrivent encore quelquefois, nous font voir que les eaux, en dépoſant le ſable & les pierres qu'elles charient, d'un côté de leur courant, s'en vont de l'autre côté ſe creuſer un nouveau lit, pour acquérir enſuite un nouveau degré de viteſſe. C'eſt encore une circonſtance qui éclaircit les différens plis & les différentes courbures des vallées, qui exiſtent comme aiant été une fois creuſées par les eaux qui découloient des hauteurs vers les enfoncemens qui forment le lit des mers.

L'exemple que j'ai rapporté des angles ſaillans & rentrans aux environs de Bâle, nous fait déjà voir, que cette obſervation ne ſe borne pas aux petites vallées, mais qu'elle s'étend juſques ſur celles qui, pour embraſſer des plaines d'une vaſte étendue, ne ſont plus miſes au rang des vallées. Mais je vais plus loin, & ſans me reſtreindre à l'étroite ſignification des termes, je dirai que tout le continent du globe terreſtre peut être regardé comme une montagne, dont la véritable baſe eſt le fond de l'Océan. Dans cette dénomination il n'y a rien d'exagéré ni de gigantesque, quoiqu'à l'imitation des anciens Poëtes on

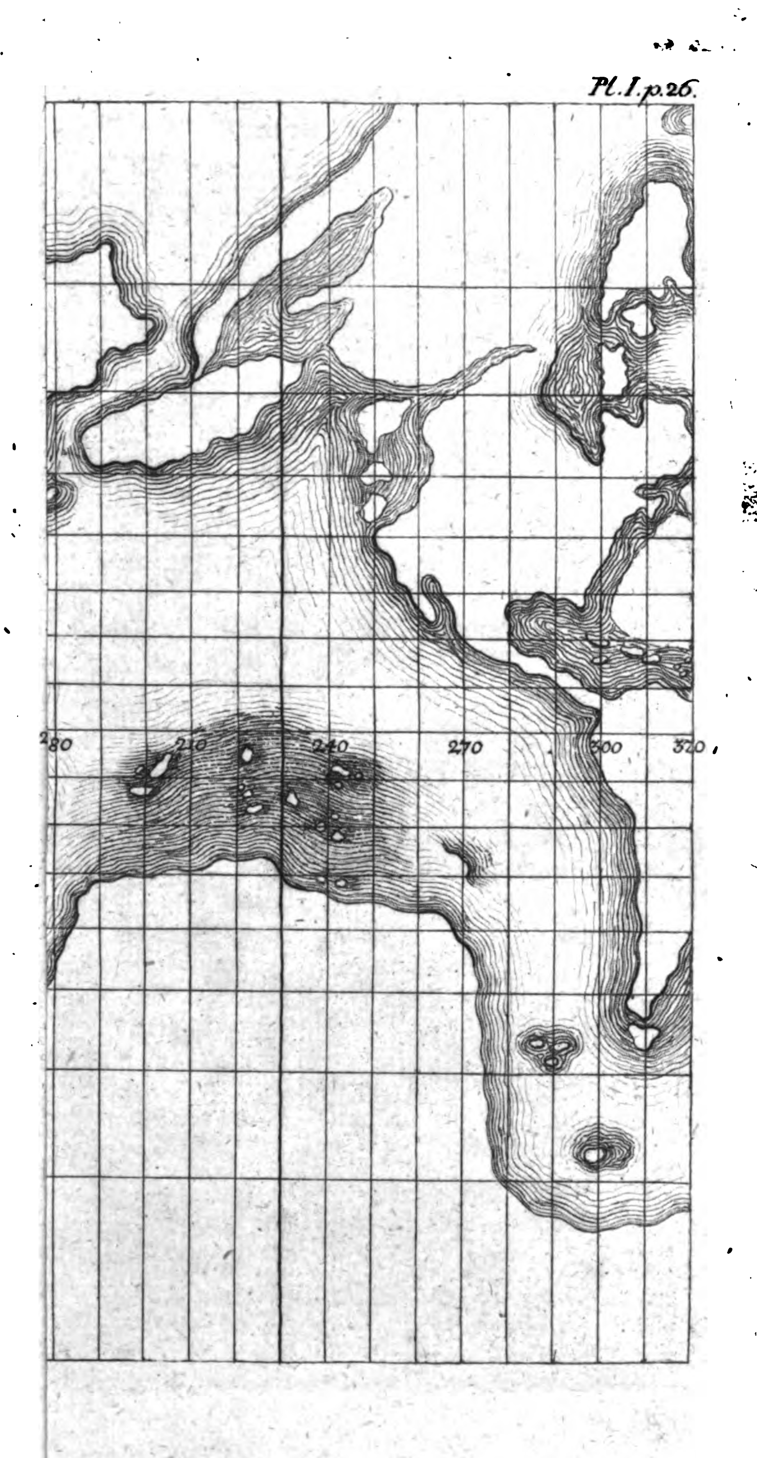
on pourroit imaginer que les Géans pour entasser montagne sur montagne avoient commencé leur travail au fond de la mer.

Mais la principale question est de voir si nous retrouverons encore ici nos angles saillans opposés aux angles rentrans, ou ce qui revient au même, si l'Océan garde en grand un parallélisme semblable à celui que nous avons remarqué avoir lieu à l'égard des montagnes & des vallées d'une beaucoup moindre étendue? Je dirai d'abord que les causes productrices étant les mêmes, il n'y a aucun lieu d'en douter. J'en connoissois une partie il y a 9 ans; elle me sauta aux yeux en dessinant, pour d'autres vues, une mappemonde ou une carte nautique suivant la méthode de *Mercator*. C'est le parallélisme de la Mer Atlantique. Je le connoissois alors seul, parce que les rivages de cette mer sont le plus complettement exprimés sur les cartes. On sait qu'il n'en est pas de même de la Mer Pacifique, parce que les Terres Australes sont encore fort inconnues. Les recherches de Mr. le Comte *de Redern*, & les deux hémispheres que l'Académie a fait publier d'après ces recherches, m'ont mis en état de completter ma mappemonde & en même tems le parallélisme qu'il s'agissoit de trouver. C'est ce qui m'engagea à la dessiner sur une demi-feuille, en gardant la forme de *Mercator*, & en prolongeant l'équateur de 90 degrés au delà des 360, afin de faire d'autant mieux voir de quelle maniere les parties de devant se joignent à celles de derriere. Cette carte me dispense d'en faire une longue description. On y voit d'un coup d'œil que l'Océan forme une espece de riviere, qui coupe l'équateur dans la *Mer du Sud* & aux *Isles Philippines*, qu'une branche de cette riviere passe au haut de *Kamschatka* vers le pole & qu'elle vient la rejoindre en formant la *Mer Atlantique*. Cette branche paroit être une espece de débordement. Car la Terre par son mouvement de rotation devoit faire couler les eaux d'Orient en Occident. La largeur de la Mer Pacifique rallentit son mouvement, & par-là elle devoit déposer ce qu'elle charioit, là où sont les *Isles des Indes Orientales*, ce qui étoit encore d'autant plus possible, si on veut supposer qu'il y avoit eu là des rochers isolés.

 Mais

Mais la mer en se rétrécissant le passage par ce qu'elle déposoit, & devenant par-là moins chargée, pouvoit d'autant plus aisément se creuser de côté & d'autre un nouveau lit. Nous voyons qu'elle prit son chemin, partie vers la *Sibérie*, partie au dessous de la *Nouvelle Hollande*. Mr. le Comte *de Redern* ne décide pas si les Terres Australes sont partagées en deux continens. Mais, si cela étoit, il seroit très possible qu'il y eût encore une autre branche qui, en passant au dessous de la *Nouvelle Hollande* vers le pole austral, revienne joindre la riviere principale au dessous de l'*Amérique méridionale*. Quoi qu'il en soit, le courant de la branche septentrionale, en revenant par la *Mer Atlantique*, ne pouvoit creuser son lit sans jetter de côté & d'autre le limon, le sable & les pierres qui en occupoient la place. Cela nous fait conçevoir d'où il peut venir, que l'*Europe* penche lentement vers le Nord, & que l'*Amérique méridionale* penche lentement vers l'Est. Enfin, comme la figure sphérique de la Terre fait que la grande riviere qui coule le long de l'équateur rentre en elle-même, elle peut être revenue plusieurs fois à la charge & avoir fait plusieurs tours avant que de s'être mise dans l'état d'équilibre & de permanence, où nous la voyons actuellement. Je n'entrerai plus dans aucun détail, parce qu'il y en a beaucoup plus qu'on ne peut s'imaginer.

Mé-


Pl. I. p. 26.
180
210
240
270
300
330

MÉMOIRE SUR LES OMBRES COLORÉES.

PAR M. BÉGUELIN. (*)

M. *de Buffon* annonça en 1743, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, un phénomene qui lui avoit causé la plus grande surprise, & dont aucun Astronome, aucun Physicien, personne avant lui, n'avoit parlé, quoique le fait fût certain, & pût être observé par tous ceux qui ont des yeux: c'est que les ombres sont toujours colorées au lever & au coucher du Soleil; qu'elles sont quelquefois vertes, & souvent bleues, & d'un bleu aussi vif que le plus bel azur. Il se contenta alors de donner le précis de cette observation, & ni lui, ni l'historien de l'Académie qui la rapporta, n'entreprirent d'en expliquer la cause.

J'ai bien du regret que le Mémoire que M. de Buffon promettoit à cette occasion sur la lumiere du Soleil levant & du Soleil couchant, & sur celle qui passe à travers différens milieux colorés, n'ait point paru. On pouvoit s'attendre à y trouver d'excellentes recherches sur ces objets, & sur le phénomene dont je parle ici. Dix ans s'écoulerent depuis cette annonce, sans que personne, que je sache, eût tenté d'expliquer ce fait singulier. Le premier qui l'ait entrepris est M. l'Abbé *Mazéas*, dont le Mémoire imprimé en 1755 fait partie de l'Histoire de notre Académie pour l'année 1752. Mais, comme ce n'étoit qu'incidemment qu'il y parloit des ombres colorées, on ne sera pas surpris que l'explication qu'il en donne ne soit, ni aussi précise, ni aussi claire qu'on

(*) Lû à l'Académie le 12 Févr. 1767.

auroit pû l'attendre de lui, si cette matiere avoit fait l'objet de son Mémoire. J'avoue ingénûment que, loin d'en être satisfait, c'est l'explication même proposée alors par M. l'Abbé Mazéas qui me fit naître la premiere idée d'en chercher une plus satisfaisante. Ce n'étoit d'abord, & dans des recherches de cette nature ce ne sauroit être qu'une conjecture physique; mais aiant eu depuis occasion de la vérifier par un grand nombre d'observations, cette conjecture sur la véritable cause de la couleur des ombres se trouve appuïée sur un fait que tout le monde sera à portée de confirmer ou de détruire par des observations ultérieures.

Je commencerai par rapporter le fait annoncé par M. de Buffon, dans les propres termes de son Mémoire:

„Au mois de Juillet dernier (c'étoit en 1743) comme j'étois," dit-il, „occupé de mes couleurs accidentelles, & que je cherchois à „voir le Soleil, dont l'œil soutient mieux la lumiere à son coucher qu'à „toute autre heure du jour, pour reconnoître ensuite les couleurs, & „les changemens de couleurs causés par cette impression, je remarquai „que les ombres des arbres, qui tomboient sur une muraille blanche, „étoient vertes. J'étois dans un lieu élevé, & le Soleil se couchoit „dans une gorge de montagne, ensorte qu'il me paroissoit fort abaissé au dessous de mon horizon; le ciel étoit serein, à l'exception du „couchant, qui, quoiqu'exemt de nuages étoit chargé d'un rideau „transparent de vapeurs d'un jaune rougeâtre; le Soleil lui-même étoit „fort rouge, & sa grandeur apparente au moins quadruple de ce qu'elle „est à midi. Je vis donc très distinctement les ombres des arbres qui „étoient à 20 & 30 pieds de la muraille blanche, colorées d'un verd tendre, tirant un peu sur le bleu. L'ombre d'un treillage qui étoit à „trois pieds de la muraille, étoit parfaitement dessinée sur cette muraille, comme si on l'avoit nouvellement peinte en verd de gris. Cette „apparence dura près de cinq minutes, après quoi la couleur s'affoiblit, avec la lumiere du Soleil, & ne disparut entierement qu'avec „les ombres.

„Le

„Le lendemain au lever du Soleil, j'allai regarder d'autres om-
„bres sur une autre muraille blanche; mais au lieu de les trouver ver-
„tes comme je m'y attendois, je les trouvai bleues, ou plutôt de la
„couleur de l'indigo le plus vif; le ciel étoit serein, & il n'y avoit
„qu'un petit rideau de vapeurs jaunâtres au levant; le Soleil se levoit
„sur une colline, ensorte qu'il me paroissoit élevé au dessus de mon
„horizon; les ombres bleues ne durerent que trois minutes, après
„quoi elles me parurent noires; le même jour je revis au coucher
„du Soleil les ombres vertes comme je les avois vues la veille.

„Six jours se passerent ensuite sans pouvoir observer les om-
„bres au coucher du Soleil, parce qu'il étoit toujours couvert de nua-
„ges. Le septieme jour, je vis le Soleil à son coucher; les ombres
„n'étoient plus vertes, mais d'un beau bleu d'azur; je remarquai que
„les vapeurs n'étoient pas fort abondantes, & que le Soleil aiant avan-
„cé pendant sept jours, se couchoit derriere un rocher qui le faisoit
„disparoître, avant qu'il pût s'abaisser au dessous de mon horizon.
„Depuis ce tems j'ai très souvent observé les ombres, soit au lever, soit
„au coucher du Soleil, & je ne les ai vues que bleues; quelque-
„fois d'un bleu fort vif, d'autres fois d'un bleu pâle, d'un bleu foncé,
„mais constamment bleues, & tous les jours bleues."

Voilà le récit de M. de Buffon, sur lequel je remarque d'abord que, de plus de trente aurores, & d'autant de soleils couchans qu'il avoit observés l'été de 1743, & jusques fort avant dans l'automne, il ne fait mention que de deux seules ombres vertes, apperçues en Juillet, deux jours consécutifs, au coucher du Soleil. Toutes les autres observations qu'il rapporte n'ont donné que des ombres bleues de différentes nuances, mais constamment bleues. Il est donc très vraisemblable que les ombres des corps, lorsque le Soleil est proche de l'horizon, sont régulierement & naturellement bleues, & que ce n'est que par accident que cette couleur bleue se change en verd. On sait que le verd n'est qu'un composé des couleurs bleues & jaunes. Il suffit donc pour produire ce changement accidentel qu'il se mêle quelque chose de jau-

ne à l'ombre bleue, soit que ce jaune vienne de la couleur jaunâtre du mur même qui reçoit l'ombre, ou qu'il tombe des raïons jaunes, de quelque part que ce soit, sur la partie ombrée.

La question principale à discuter, revient donc à savoir pourquoi les ombres du soir & du matin paroissent régulierement bleues? Or il est évident, ce me semble, que la raison de cette apparence constante ne sauroit être tirée de la nature même des ombres. Elles n'expriment à nos yeux que l'absence de la lumiere solaire interceptée par des corps opaques. Mais l'absence de la lumiere n'est ni bleue ni verte; elle n'auroit même point de couleur, si l'usage n'étendoit la notion des couleurs jusqu'au noir; ou plutôt, s'il y avoit un noir parfait, une ombre complette dans la Nature. Toutes les couleurs, & par conséquent celles des ombres aussi, doivent leur être à la lumiere qui les produit; & nous ne voïons la lumiere elle-même qu'entant qu'elle est colorée. Car, au fond, le sens de la vue ne représente absolument rien que des couleurs, & ce n'est que les diverses nuances de ces couleurs qui nous font distinguer les divers objets, ou les parties différentes d'un même objet. On doit donc dire que les ombres, entant qu'elles sont des ombres, sont invisibles, & qu'entant qu'elles sont visibles, ce ne sont pas des ombres, mais des couleurs, produites par une certaine quantité de lumiere qui tombe sur l'endroit où les raïons directs du Soleil ont été interceptés par l'interposition du corps opaque; & puisque les ombres sont visibles depuis le lever du Soleil jusqu'à son coucher, on ne se trompera pas en disant que les ombres sont constamment colorées à toutes les heures du jour. Reste donc à chercher la raison pourquoi elles affectent la couleur bleue lorsque le Soleil est peu élevé au dessus de l'horizon, & que hors de là elles ont une couleur grise plus ou moins approchante du noir.

Aussi longtems que les cas sont les mêmes, les apparences doivent être aussi les mêmes: quand donc celles-ci varient, on ne peut chercher la raison de cette variation que dans la diversité des circonstances relatives à ces apparences. Voïons en quoi les circonstances peuvent varier ici. D'abord, à la même hauteur du Soleil au dessus de l'hori-

l'horizon, soit à son lever, soit à son coucher, les ombres ont la même couleur bleue. Cela indique que c'est le peu d'élévation du Soleil qui influe à donner cette couleur, & non certains degrés de chaleur, ou certaine constitution de l'air, puisque ces dernieres circonstances sont rarement les mêmes le matin & le soir.

Mais quelle différence par rapport aux ombres peut-on trouver dans les diverses hauteurs du Soleil au dessus de l'horizon? J'en remarque deux principales: l'une c'est qu'au lever & au coucher, les ombres sont les plus longues qu'il est possible, & qu'elles vont en décroissant par degrés jusqu'au moment du passage du Soleil par le méridien; la seconde différence, c'est que la lumiere du Soleil est la plus foible au moment de son lever & de son coucher, & qu'elle augmente en force à mesure que cet astre s'approche du point du midi.

Il ne paroit pas que la premiere de ces circonstances puisse contribuer à donner aux ombres une couleur bleue. Que ces ombres soient plus longues, & si l'on veut plus dilatées, en un tems qu'en un autre, cela ne doit produire qu'une ombre plus foible, plus délaïée, au matin & au soir qu'en plein midi, mais de là ne sauroit résulter du bleu. D'ailleurs, les ombres verticales ne sont pas sensiblement allongées quand le Soleil est à l'horizon; elles ne laissent pas néanmoins d'être aussi bien colorées que les ombres horizontales.

La seconde circonstance ne renferme pas non plus tout ce qui est requis pour donner l'apparence du bleu. Plus la lumiere du Soleil est foible, plus le contraste entre la partie ombrée & la partie illuminée d'une muraille blanche est adouci; mais cet adoucissement ne met point de nouvelle couleur dans l'ombre; tout ce qu'il peut, & ce qu'il doit naturellement produire, c'est de laisser mieux paroître la couleur qui seroit actuellement dans la partie ombrée. C'est ainsi que la lumiere affoiblie du Soleil à son lever & à son coucher laisse paroître des planetes qui, quoiqu'elles envoient à midi la même quantité de raïons sur notre rétine, n'excitent alors en nous aucune perception sensible. C'est ainsi enco-

encore que l'éclat de la pleine Lune nous empêche d'appercevoir un grand nombre d'étoiles que nous voïons bien distinctement dans son déclin. Je conclus de cela que la partie du mur qui est dans l'ombre doit recevoir réellement des raïons bleus pendant tout le jour, & que ce n'est que parce que l'éclat du grand jour obscurcit en nous la sensation de ces raïons, qu'ils ne colorent point l'ombre aussi longtems que le Soleil est élevé de plusieurs degrés au dessus de l'horizon; mais qu'à mesure que l'éclat du Soleil s'affoiblit, les raïons bleus commencent à faire sensation, non à la vérité dans les endroits illuminés par la lumiere directe du Soleil, trop vive encore pour ne pas offusquer une lueur si douce, mais dans les endroits où les raïons immédiats du Soleil ne pénetrent point, & où nos yeux n'étant plus frappés de l'éclat d'une vive lumiere peuvent sentir une impression plus foible.

Il ne s'agit donc plus que de trouver la source de ces raïons bleus qui, toujours présens à notre vue, ne paroissent que dans les ombres du matin & dans celles du soir. Or cette source se trouve tout naturellement dans l'air pur, qui nous paroit lui-même bleu, & qui par conséquent reflêchit les raïons qui excitent la sensation de cette couleur préférablement à tous les autres. Tous les objets à portée de recevoir les raïons directs du Soleil, sont en même tems exposés à recevoir une quantité plus ou moins grande de raïons que l'air reflêchit; & comme ceux-ci ne sont pas nécessairement interceptés quand ceux qui viennent immédiatement du Soleil le sont, il n'est pas surprenant que la partie qui est dans l'ombre en puisse reflêchir quelques uns vers nous, & que nous les appercevions aussitôt que la lumiere qui les offusquoit s'est affoiblie jusqu'à un certain degré.

Il est bon cependant de se défier en Physique du raisonnement le plus plausible aussi longtems qu'on ne peut pas le vérifier par des expériences décisives. Le séjour de la ville n'étoit pas propre à celles que je souhaitois de faire pour constater mes conjectures; mais j'ai eu dans la suite occasion de les vérifier à la campagne: & je vai donner le précis de ce que j'ai observé.

Me

Me trouvant en Juillet 1764, au village de Boucholtz, j'y observai en rase campagne, & par un ciel serein, les ombres projettées sur le papier blanc de mes tablettes. A' six heures & demie du soir, le Soleil étant encore élevé d'environ quatre degrés, ou de huit de ses diametres au dessus de l'horizon, je remarquai que l'ombre de mon doigt, ou celle des corps interposés, qui tomboit sur ce papier, étoit encore d'un gris obscur, tant que je tenois les tablettes verticalement opposées au Soleil; mais, lorsque je les couchois presque horizontalement, en sorte que les raïons du Soleil les rasoient fort obliquement, le papier éclairé prenoit une teinte bleuâtre, & l'ombre qui tomboit sur ce papier paroissoit d'un beau bleu clair.

Quand l'œil étoit placé entre le Soleil & le papier horizontal, ce papier, quoiqu'éclairé du Soleil, montroit toujours une teinte bleuâtre; mais, quand je tenois mes tablettes ainsi couchées entre le Soleil & l'œil, je pouvois distinguer sur chaque point élevé, produit par les petites inégalités du papier, les principales couleurs prismatiques; on les apperçoit de même sur les ongles, & sur la peau de la main. Cette multitude de points colorés de rouge, de jaune, de verd, & de bleu, fait presque disparoître la couleur propre des objets.

A' six heures & trois quarts, l'ombre commença d'être bleue, même lorsque les raïons du Soleil tomboient perpendiculairement sur le papier vertical. La couleur étoit plus vive quand les raïons tomboient sous une inclinaison de 45 degrés. Même à une moindre déclinaison du papier, j'appercevois déjà distinctement que l'ombre bleue avoit une bordure plus bleue à son extrémité horizontale qui regardoit le ciel, & une bordure rouge à l'extrémité horizontale qui étoit tournée vers la terre. Mais, pour voir ces bordures, il faut que le corps opaque soit fort proche du papier: plus il en est voisin, plus la bordure rouge est sensible; à la distance de trois pouces, toute l'ombre est bleue.

A' chaque observation, après avoir tenu les tablettes ouvertes contre le ciel, je les tournois vers la terre qui étoit tapissée de verdure;

re; je les y tenois de maniere que le Soleil pût les éclairer, & les corps y projetter des ombres; mais, dans cette position, je n'ai jamais pû appercevoir d'ombre bleue ou verte, sous aucune obliquité d'incidence des raïons solaires que ce pût être.

A sept heures, le Soleil paroissant encore élevé d'environ deux degrés, les ombres étoient d'un très beau bleu, même lorsque les raïons tomboient perpendiculairement sur le papier. La couleur sembloit embellir quand le papier récliné du Soleil par sa partie supérieure embrassoit, pour ainsi dire, depuis le couchant une amplitude verticale de 45 degrés au delà du zénith. Cependant je ne dois pas passer sous silence une singularité à laquelle je ne m'attendois pas; c'est que, dans ce même tems, un champ du ciel plus vaste n'étoit pas favorable à la couleur bleue; & que l'ombre tombant sur les tablettes tournées horizontalement vers le ciel, n'étoit plus colorée, ou que du moins je n'y démêlois qu'un bleu très foible, & très délaïé. Cette singularité résulte sans doute du peu de différence qu'il y a dans cette situation, quant à la clarté, entre la partie du papier qui est éclairée, & celle qui est dans l'ombre. On sait que la quantité de lumiere qui tombe sur un objet diversement incliné suit la raison du sinus de cette inclinaison. Ainsi, quand mes tablettes étoient verticales, l'éclat de la partie éclairée étoit à son *maximum*, exprimé par le sinus totus ou l'unité; à une inclinaison de 45 degrés, cet éclat n'est plus que la $\frac{7}{10}$ partie de l'éclat total. Dans une situation précisément horizontale, il seroit nul, & son interception ne produiroit par conséquent pas même de l'ombre. Il n'est donc pas étrange que la perception des raïons bleus ne soit presque pas plus sensible sur la partie du papier qui est dans l'ombre, que sur celle qui n'est plus éclairée du Soleil que très foiblement. Ainsi le trop & le trop peu d'éclat de la lumiere solaire produisent, mais par des raisons différentes, à peu près un même effet; c'est de rendre insensible dans l'ombre la lumiere bleue que le ciel y reflêchit.

Il seroit superflu de rapporter ici un grand nombre d'observations pareilles à celle dont je viens de rendre compte. Il me suffira de dire

dire qu'elles m'ont toujours exactement donné le même réſultat; & que je n'en ai fait aucune qui n'ait confirmé ma conjecture ſur la cauſe de la couleur bleue des ombres. Je n'en ai jamais vû de vertes, que lorſque je faiſois tomber l'ombre ſur un papier jaune, ou ſur un mur jaunâtre; & en général la couleur des ombres ſe modifie ſur la couleur du corps qui les reçoit. Je ne voudrois pourtant pas aſſûrer qu'il n'y ait d'autres ombres vertes que celles qui paroiſſent ſur des corps jaunâtres. Car, ſi c'eſt ſur la même muraille que M. de Buffon a apperçu au coucher du Soleil des ombres bleues, ſept jours après avoir vû ces ombres vertes, il ſeroit prouvé que la raiſon de la couleur verte n'étoit pas dans la couleur propre de la muraille; il la faudra chercher dans la couleur du ciel vers le couchant, qui, comme Mr. de Buffon le rapporte, étoit alors, quoiqu'exempt de nuages, chargé d'un rideau tranſparent de vapeurs d'un jaune rougeâtre; la lumiere d'un ciel ainſi coloré tomboit ſur la muraille, & s'y combinoit avec autant de raïons bleus que l'expoſition du mur lui permettoit d'en recevoir du reſte de l'atmoſphere; de ce mélange a pû réſulter une couleur verte, inviſible ſur un fond blanc éclairé par le Soleil, & très ſenſible ſur la partie de ce fond que le Soleil n'éclairoit pas. Il ſe pourroit encore que le verd, apperçu par M. de Buffon, vint du reflêt occaſionné par le treillage qui n'étoit qu'à trois pieds de la muraille. Cette muraille étoit expoſée aux raïons du Soleil couchant; elle reflêchiſſoit ſans doute ces raïons en tous ſens ſur la verdure voiſine, & celle-ci les renvoïoit peut-être à ſon tour colorés de verd ſur la muraille, en y interceptant même une partie de la lumiere du ciel. J'avoue cependant que je n'ai jamais apperçu ce reflêt verd, auquel je m'attendois de la part des arbres voiſins d'une muraille blanchie oppoſée au Soleil couchant.

Au reſte les ombres bleues ne ſont pas préciſément aſtreintes aux heures du lever & du coucher du Soleil. Je les ai obſervées à trois heures après midi, le 19 de Juillet, ainſi dans la ſaiſon où le Soleil a le plus de force; mais c'eſt que le Soleil étoit enveloppé d'un brouillard très clair, qui en affoibliſſoit la lumiere; le ciel entier étoit brouillé, & la partie la plus claire étoit d'un bleu trouble.

Quand le ciel est serein, les ombres commencent d'être bleues lorsque l'ombre horizontale a huit fois en longueur, la hauteur du corps qui la produit, ce qui par les tables des sinus indique l'élévation du centre du Soleil de 7°, 8', au dessus de l'horizon. Mais, comme cette observation pourroit ne pas convenir également à toutes les saisons, je dois ajoûter que c'est au commencement d'Août que je l'ai faite.

Outre les ombres colorées dont j'ai parlé jusqu'ici, qui sont produites par l'interception des raïons directs du Soleil, on en peut observer de semblables, presque à toutes les heures du jour, dans tous les appartemens où la lumiere du Soleil pénetre par la reflexion de quelque corps blanc; pourvû, & c'est une suite nécessaire de mon explication, que de l'endroit sur lequel on fait tomber l'ombre on puisse découvrir quelque partie du ciel serein. Ainsi, dans une chambre qui ne recevra les raïons du Soleil que par le reflêt d'une maison blanche située vis à vis, ou du jambage extérieur de la fenêtre, on verra, si par exemple l'exposition est au couchant, jusqu'à midi & plus tard encore, l'ombre de la croisée se colorer d'un bleu très vif sur le jambage intérieur & opposé de la même fenêtre, s'il est peint en blanc, & qu'on ait soin d'affoiblir le jour de la chambre au moïen de rideaux autant qu'il sera nécessaire. A' l'aide de cet affoiblissement on peut, même lorsque le Soleil éclaire immédiatement la chambre, donner aux ombres la couleur bleue à toutes les heures du jour; & l'on pourra ainsi se convaincre que cette couleur disparoit précisément aux endroits de l'ombre d'où l'on ne sauroit plus appercevoir aucune partie du ciel.

J'ai déjà fait mention ci-dessus d'une bordure, ou ombre jaune rougeâtre, qu'on apperçoit souvent au dessous de l'ombre ordinaire, lorsque celle-ci est teinte en bleu. Toutes les observations que j'ai faites là-dessus me portent à croire que cette ombre rousse résulte de l'interception de la lumiere céleste, c'est à dire, de l'interception des raïons bleus reflêchis par le ciel. Ainsi, de même que l'absence de la lumiere solaire laisse voir dans l'ombre d'une croisée la clarté bleue de

la

la lumiere du ciel, de même aussi l'interception de cette lumiere bleue ne laisse voir dans l'endroit où la croisée l'intercepte que la clarté jaune rougeâtre, produite ou par les raïons du Soleil à son lever & à son coucher, ou par le simple reflêt des corps terrestres circonvoisins. C'est là sans doute la raison pourquoi cette ombre jaune ne paroit au dessous de la bleue, que lorsque le corps opaque qui intercepte la lumiere est très proche du corps blanc sur lequel l'ombre est reçue. Car il est aisé de démontrer généralement que l'interception de la lumiere du ciel ne sauroit commencer d'avoir lieu, que lorsque la largeur du corps opaque sera à sa distance du fond blanc qui reçoit l'ombre, comme le double sinus de la demi-amplitude du ciel est à son cosinus. Ainsi, pour une amplitude de 126 degrés, par exemple, où l'on auroit la raison du sinus de 63° à son cosinus, environ comme 2 à 1, il faudra, pour que l'ombre jaune commence à exister, que le corps opaque qui produit l'ombre ait une largeur quadruple de sa distance au papier, ou au corps blanc sur lequel l'ombre doit paroître; & ce ne sera qu'en rapprochant d'avantage cette distance, que l'ombre deviendra sensible; la diminution de la distance étant toujours dans ce cas-ci égale au quart de la largeur de l'ombre.

Avant de quitter les ombres bleues, je vais en rapporter d'une troisieme espece, qui sans doute ont encore la même origine. Je les ai souvent apperçues au commencement du printems lorsque lisant le matin à la clarté d'une bougie, la lumiere du jour naissant, qui n'est autre chose que les raïons bleus reflêchis par le ciel, se confondoit sur la muraille avec celle de la bougie. Dans cette circonstance l'ombre formée par l'interception de la bougie, à la distance d'environ six pieds, étoit d'un beau bleu clair; ce bleu devenoit plus foncé à mesure que le corps interceptant étoit rapproché du mur, & très foncé lorsque l'intervalle n'étoit plus que de quelques pouces. Mais, partout où la lumiere du jour ne pénétroit pas, par exemple sur le papier du livre que je lisois, & qui ne recevoit que la lumiere de la bougie, l'ombre étoit noire sans le moindre mélange de bleu. Pareillement aussi les

endroits qui n'étoient éclairés que par la simple lumiere du jour naissant, & où la bougie ne luisoit point, ne présentoient que des ombres ordinaires. A mesure que le jour naturel augmente, l'ombre occasionnée par l'interception de la lumiere s'affoiblit; le bleu devient de plus en plus blanchâtre, & se dissipe enfin totalement.

L'observation rapportée par M. l'Abbé Mazéas dans le Mémoire dont j'ai fait mention dès l'entrée, est entierement analogue à celle que je viens d'indiquer; mais l'explication qu'il en donne, & qu'il étend à toutes les ombres colorées, ne me paroit, comme je l'ai déjà insinué, ni claire, ni satisfaisante. Je vais la transcrire ici, pour laisser à chacun la liberté de choisir entre deux diverses explications d'un même fait:

„La lumiere de la Lune," dit M. l'Abbé Mazéas, „& celle „d'une bougie placée à six pieds de distance d'une muraille très blan„che, alloient toutes les deux frapper un corps opaque, qui n'étoit „éloigné du mur que d'un pied. Ces deux lumieres me donnoient „deux ombres du même corps. L'ombre que formoit le corps opa„que en interceptant la lumiere de la Lune donnoit du rouge, & l'om„bre que formoit le même corps en interceptant la lumiere de la bou„gie donnoit du bleu. Ces deux lumieres formoient un angle de 45 „degrés; d'où il suit que l'ombre formée par l'interception de la lu„miere de la Lune devoit être éclairée par celle de la bougie, & que „l'ombre formée par l'interception de la lumiere de la bougie devoit „être éclairée par celle de la Lune."

Voilà le fait: voici maintenant l'explication que Mr. l'Abbé en donne.

„Il est donc évident, (poursuit-il,) que dans ce cas les couleurs „ne venoient que de l'affoiblissement de la lumiere, qui, en frappant no„tre organe avec plus ou moins de vivacité, peut y produire la même „sensation à peu près que produisent les raions de la lumiere séparée „& rompue par le prisme — — Les couleurs qui sont ici produites

par

„par l'affoibliſſement de la lumiere, me paroiſſent devoir être regardées „comme une conſéquence de l'action des corps ſur cette même lumie- „re; ſuivant qu'elle ſera plus ou moins forte, elle ſera plus ou moins „attirée par le corps opaque, & par conſéquent les raïons d'une eſpe- „ce ſe ſépareront des autres, & nous donneront par conſéquent la ſen- „ſation des couleurs qu'elles doivent nous imprimer par leur nature.

„C'eſt pareillement, ajoute M. Mazéas, à ce principe qu'on „doit rapporter, à ce qu'il me ſemble, les ombres colorées des corps „au lever & au coucher du Soleil, c'eſt à dire lorſque la lumiere de „cet aſtre eſt très foible. Ce phénomene, dont M. de Buffon nous „a donné les détails dans un Mémoire ſur les couleurs accidentelles, „auſſi bien que les couleurs obſervées par M. Halley à différentes pro- „fondeurs de la mer, ne me paroiſſent donc venir que de la *diffraction* de „la lumiere, découverte par *Grimaldi*, & depuis éclaircie par M. *New-* „*ton.* Mais ce principe que la Nature emploie pour ſéparer les raïons „de la lumiere, n'eſt pas à beaucoup près auſſi puiſſant que la *reflexion*, „ni celle-ci auſſi puiſſante que la *refraction.* Les couleurs qui ſont „l'objet de ce Mémoire, & qui ont été produites par la reflexion des „raïons de deſſus une ſurface mince, étoient très impures, comme je „l'ai déjà remarqué; mais celles dont je viens de parler, qui ont été „produites par la lumiere de la Lune & d'une bougie, l'étoient infini- „ment davantage."

Il paroit donc, ſi je ne me trompe, que, ſuivant la penſée de M. l'Abbé Mazéas, la cauſe phyſique des ombres colorées doit être attribuée à l'attraction plus foible qu'exercent les corps opaques ſur une lumiere plus foible; cette attraction produit une diffraction d'où réſultent des couleurs infiniment impures, telles que celles des ombres colorées.

Sans entrer dans une diſcuſſion phyſique ſur les difficultés que cette explication pourroit renfermer, il ſuffira d'obſerver qu'en l'adoptant

doptant on ne sauroit rendre raison pourquoi le même degré de lumiere étant exposé à l'action du même corps opaque produit, tantôt une ombre du plus beau bleu, tantôt une simple ombre ordinaire? Je ne vois pas trop bien non plus pourquoi, dans l'observation de M. l'Abbé Mazéas, le même corps opaque ne sépare que des raïons bleus d'un des corps lumineux, & des raïons rouges de l'autre. Il me paroit bien plus simple de dire: que là où la lumiere de la bougie ne pouvoit pas pénétrer, l'ombre qui recevoit la lumiere de la Lune mêlée à l'azur du ciel, devoit être bleue, & que là où ni les raïons reflêchis par le ciel, ni ceux de la Lune ne pénétroient pas, l'ombre devoit être rouge, puisqu'elle étoit éclairée par la lueur rouge d'une bougie; qu'enfin partout ailleurs où les raïons venant du ciel, de la Lune, & de la bougie se mêloient également, la couleur devoit être d'un éclat supérieur aux deux ombres, & d'un ton proportionné à la quantité de blanc, de rouge, & de bleu, que ces diverses lumieres contenoient.



DIS-

DISSERTATION
SUR
L'ART DE LA TEINTURE
DES ANCIENS ET DES MODERNES.

PAR M. DE FRANCHEVILLE.

Je dois dire d'abord par forme d'Avant-propos, qu'en 1743, tems où le Roi renouvellant l'Académie me fit l'honneur de m'y admettre, je lus dans une des premieres assemblées cette Dissertation, telle qu'elle étoit alors. Mais comme depuis, en composant le poëme du *Bombyx*, j'avois occasion d'y décrire la Teinture de la soie; cela m'a mis dans le cas d'étudier plus à fond, non seulement la théorie, mais aussi la pratique de cet art: & par ce même moyen j'ai rendu ma Dissertation plus utile, en l'augmentant d'une seconde partie qui est celle de la Teinture des Modernes, que je n'avois fait qu'effleurer. C'est dans ce nouvel état que je produis aujourd'hui cette Dissertation.

PREMIERE PARTIE.
De la Teinture des Anciens.

On ne sauroit douter que l'art de la Teinture ne soit extrêmement ancien; plusieurs Historiens le témoignent: mais on n'en voit rien dans l'Ecriture avant le Déluge. Je croi même que ce qu'on y lit de cette robe *bigarrée* que Jacob fit, plus de 600 ans après, à son fils Joseph, ne doit être entendu que d'un assemblage de peaux marquetées, des agneaux, des brebis & des chevres, qui avoient été le partage de Jacob, après les vingt années qu'il avoit passées au service de Laban son beau-pere.

Genese ch. 37. v. 3.

Cependant, si la Teinture n'étoit pas dès-lors inventée, il est certain qu'elle ne tarda pas à l'être. Car dans le même siecle (savoir l'an du monde 2371) il est fait mention d'un fil d'*Ecarlate* qui fut attaché au bras de l'un des jumeaux que Thamar avoit conçus de Juda son beau-pere qui étoit fils de Jacob. Cette Ecarlate étoit le *κόκκινον*, suivant la version des Septante, c'est à dire la couleur de rose tirée du *coccum* des Latins, qui est la *graine d'Ecarlate* ou *de Vermillon* des François, que les Hébreux & les Arabes rendent par le mot *Kermès*, qui signifie *Vermisseau*: d'où les François l'ont appellée *Graine de Vermillon*.

Idem, ch. 38. v. 27 – 30.

D. Hieronymus ad Fabiolam.

Cette étymologie revient parfaitement à l'idée que l'on a aujourd'hui de cette graine, qui est l'ouvrage d'un ver, & non pas la semence de l'arbrisseau sur lequel on la recueille. Cet arbrisseau est une espece de Houx ou de petit Chêne verd. Au milieu du printems, après que les pluies ont cessé, l'on observe sur ses feuilles & sur ses jeunes pousses une sorte de petite vessie de la grosseur & de la couleur d'un pois, laquelle est produite par la piquûre d'un insecte qui y dépose ses œufs. On donne le nom de *mere* à cette vessie, parce que c'est d'elle que sortent toutes les graines, qui au commencement de l'Eté deviennent des insectes presque imperceptibles à la vue. Ces petits animaux s'attroupent & gagnent le haut de l'arbrisseau. Là grossissant & prenant une couleur blanchâtre, ils sont bientôt de la grandeur d'un grain de miller. Leur blancheur se change en une couleur de cendre: mais alors quittant la figure d'insecte, ils deviennent semblables à un pois; & lorsque ces grains sont parvenus à un degré de maturité que connoissent ceux qui les recueillent, ils les détachent de l'arbre, & les trouvent remplis de vermisseaux de couleur rouge. En les transportant, il arrive souvent qu'on rompt la pellicule qui les enveloppe, parce qu'elle est fort délicate. Pendant ce tems-là ces vermisseaux sont immobiles & comme endormis. La saison propre étant arrivée, on les jette sur un linge & on les expose au Soleil. Alors, la chaleur les ranimant, ils s'efforcent de se sauver; mais celui qui en a soin & qui ne les perd pas de vue, secouant le linge par les coins, les rejette dans le

Petr. Quiqueranus, in lib. 2. de laud. Provinciæ, fol. 48.

le milieu, jusqu'à ce qu'ils meurent. Enfin les grains qui ont échappé à ses recherches en les recueillant, forment bientôt un nombreux essain de petits moucherons qui s'élevent en l'air, & qui reviennent dans la saison sur les mêmes arbrisseaux pour y recommencer leur ouvrage. Ces observations que m'a fourni un auteur du milieu du XVI. Siecle (*) qui assure les avoir faites dans la Crau d'Arles en Provence, où la récolte de la graine d'Ecarlate produisoit de son tems 11 mille écus d'or chaque année; ces observations, dis-je, cadrent assez avec celles de quelques autres Ecrivains plus récens (**), si ce n'est que ceux-ci disent que quand les grains sont mûrs & qu'on en a fait la récolte, on en tire le suc ou la pulpe, ou bien on l'arrose de vinaigre pour tuer les insectes qui sont renfermés au dedans, & qui sans cette précaution venant à éclore, laisseroient les coques vuides, qui ne seroient presque plus d'aucune utilité, soit pour la Médecine qui en tire le Syrop d'Alkermès, soit pour la Teinture.

On peut mettre au rang de cette graine animale, la Cochenille qui n'en differe apparemment qu'à cause de la diversité des climats & des arbrisseaux qui produisent l'une & l'autre. Cette derniere, au rapport du P. Labat, dans ses Nouveaux Voiages aux Isles de l'Amérique, est aussi l'ouvrage d'un insecte qui se trouve dans ces Isles, partout où il y a des Acacias & des Raquettes, prenant naissance sur les uns & se nourrissant du fruit des autres, qui lui donnent la couleur rouge qui en fait le prix. L'Acacia est un arbrisseau qui ne monte gueres plus haut que cinq ou six pieds, & qui est très-épineux. La Raquette est une plante qu'on éleve en Europe sous les noms de *Figuier des Indes* & de *Poirier piquant*. Elle produit à l'extrémité de ses feuilles un fruit approchant de la forme d'une figue. Lorsque ce fruit commence à paroître, il est verd & dur; à mesure qu'il croît, il rougit peu à peu, & devient enfin d'une couleur vive & éclatante quand il est tout à fait mûr. Alors il s'ouvre comme une grenade ou une figue laissée trop longtems sur l'arbre; les grains ou pepins qu'il contient, ont au de-

 dans

(*) Petrus Quiqueranus, ubi supra.
(**) Mem. de M. Geofroi le Cadet dans ceux de l'Acad. des Sciences pour l'année 1714.

dans une ſubſtance blanche & paroiſſent au dehors d'un très-beau rouge incarnat : & tous ces pepins ſont entourés d'une eſpece de gelée du plus beau rouge du monde & d'un très-bon goût. C'eſt dans ce fruit & de cette chair dont il eſt rempli que ſe nourriſſent les inſectes qu'on appelle *Cochenilles*. Il eſt aſſez incertain s'ils y prennent auſſi naiſſance; du moins le P. Labat paroît-il incliner à croire qu'ils naiſſent indifféremment ſur pluſieurs autres arbres, des fruits deſquels ils ſe nourriſſent également; mais il convient que ce n'eſt que dans le fruit des Raquettes qu'ils contractent cette belle couleur rouge qui les fait tant eſtimer. Ce précieux inſecte eſt à peu près de la taille d'une groſſe punaiſe ; ſa tête ne ſe diſtingue du reſte du corps que par deux petits yeux qu'on y remarque, & une très-petite gueule; le deſſous du ventre eſt garni de ſix pieds; ſon dos eſt couvert de deux aîles ſi déliées & ſi foibles, qu'elles lui ſont inutiles pour ſe ſoutenir dans l'air, ne pouvant lui ſervir tout au plus qu'à voltiger quelques momens quand on le force à ſortir du fruit qui le nourrit, au tems qu'on en veut faire la récolte. Les pieds & les extrémités de la tête auſſi bien que les aîles ſont ſi délicats, qu'étant aiſément conſumés par l'ardeur du Soleil, ce ver aîlé ne conſerve plus alors aucune figure d'animal, ne paroiſſant quand il eſt ſec, que comme une graine de médiocre groſſeur, brune & preſque noire, chagrinée, luiſante & comme argentée, ou du moins legérement couverte d'une pouſſiere blanche impalpable, & tout à fait adhérente à la peau de l'inſecte. Il multiplie infiniment; & l'on ne ſauroit dire la quantité prodigieuſe qu'on en trouve, malgré le dégât qu'en font les fourmis, les vers, & les poules qui en ſont très-friandes.

Pour revenir à la graine d'Ecarlate, on ne voit rien dans l'Hiſtoire de plus ancien que ce qu'en rapporte celle des Juifs. Car, à ſuppoſer qu'il fût vrai que Phénix qui fonda, dit-on, le Royaume de Tyr & de Sidon avec Cadmus ſon frere, eût trouvé le ſecret de teindre en pourpre avec un vermiſſeau, comme le dit Diodore de Sicile: il en réſulteroit tout au plus que Phénix, étant contemporain de Moyſe, n'auroit

roit fait que perfectionner une découverte qui avoit été faite plus de 150 ans auparavant.

Il paroît d'ailleurs par plusieurs passages de l'Ecriture (*) que dans le même siecle, je veux dire au tems de Moyse & de Phénix, en l'an du monde 2510, il y avoit déja quatre autres sortes de Teintures inventées: savoir, l'Hyacinthe, ὑάκινθος, la Pourpre, πορφύρα, l'Ecarlate double ou Cramoisi, κόκκινον διπλοῦν, & le simple rouge ἐρυθρόδανον.

L'Hyacinthe, que les Traducteurs François rendent quelquefois par le mot de *Pourpre*, (comme ils rendent souvent aussi l'Ecarlate par le même terme,) en différoit & par la couleur & par la matiere avec laquelle on la composoit. L'Hyacinthe étoit ce que les Latins appelloient autrement *color ïanthinus*, violet-pourpre, du mot Grec *ïa* qui est le nom de la fleur de violette. Les Anciens, suivant le témoignage de Pline, tiroient cette couleur du *Vaciet*. Surquoi quelques uns disent que le *Vaciet* est la même chose que l'Hyacinthe, c'est à dire une fleur de couleur de pourpre. Mais d'autres expliquant ces deux vers de la seconde Eglogue de Virgile: Hist. Natur. lib. 16.

Alba ligustra cadunt, Vaccinia nigra leguntur . . . .
Mollia luteolâ pingit Vaccinia Caltha;

& remarquant que ce Poëte parle ici du *Vaciet* par rapport à son utilité, prétendent que c'est un arbrisseau dont les baïes noires donnent une teinture semblable à la couleur de la pierre d'Hyacinthe, d'où l'on a donné le nom de couleur d'Hyacinthe à la couleur violette ou pourpre: car les couleurs n'ont pas toujours pris leur nom des matieres dont on a commencé à les tirer, comme il est prouvé par le Violet même, aussi-bien que par la Pourpre-Améthyste des Anciens: l'Améthyste étant une

 pier-

(*) Exode, ch. 25. v. 3–5. ch. 26. v. 1. 4. 5. 14. 31. 36. ch. 27. v. 16. ch. 28. v. 2 6. 8. 15. 28. 31. 33. 34. 36. 37. 39. ch. 35. v. 4–7. 23. 25. 30. 34. 35. ch. 36. v. 8. 11. 19. 35. 37. ch. 38. v. 18. 22. 23. ch. 39. v. 1–3. 5. 8. 21. 22. 24–29. 30. 31. 34. Nombres, ch. 4. v. 5–14. 24. 25. ch. 15. v. 37–39.

pierre précieuse, tout aussi peu propre à la Teinture que la pierre d'Hyacinthe & que la fleur de Violette. Au reste Pline concilie ces divers sentimens en distinguant deux sortes de Vaciet, l'un qui naît en Italie & l'autre dans les Gaules. Il dit que ce dernier est propre à teindre en pourpre; ce que Vitruve confirme & éclaircit en ajoutant que du mêlange du *Vaciet* & du lait on tire un très-beau pourpre. Ce ne peut être sans doute que celui dont Virgile parle dans les vers que j'ai cités. Le P. Hardouin, qui est un de ceux qui veulent que ce *Vaciet* soit la même plante que l'Hyacinthe, ou le Glaieul de France, fonde cette supposition sur ce que Pline, après avoir dit dans le XVI Livre de son Hist. Natur. que le Vaciet sert à teindre en pourpre, écrit dans son XVIII Livre, qu'une certaine couleur, qu'il appelle *Hysginum*, se fait du mêlange de la graine d'Ecarlate avec la Pourpre marine de Tyr; & ensuite dans son XXI. Livre ajoûte, que l'Hyacinthe qui croit en abondance dans les Gaules, y sert aussi à faire la même couleur *Hysginum*. Ainsi, conclud le P. Hardouin, cette couleur n'est autre chose qu'un violet ou pourpre tirant sur le rouge; & par une suite nécessaire, la teinture du *Vaciet* dont parlent Virgile & Pline, est la même que l'Hyacinthe des Juifs.

Loco citato.

Ibidem.

La Pourpre (πορφύρα) étoit une Teinture de la couleur d'une rose parfaitement rouge. On la tiroit de certains Poissons testacés de différentes especes nommées par les Latins *Purpura*, *Pelagia*, *Murex*, *Conchylium* & *Buccinum*. Cette teinture fut découverte par hazard, s'il est vrai, comme le dit Cassiodore, qu'elle ne servit d'ornement aux Rois qu'après qu'on eut remarqué qu'un chien affamé aiant dévoré de ces coquillages qui avoient été jettés par la mer sur le rivage de Tyr, leur sang avoit eu la propriété de teindre en écarlate les poils de son museau. Suidas, qui rapporte aussi la même histoire sur le témoignage d'un Auteur anonyme, ajoute que cette remarque fut faite par Hercule le Phénicien ou le Tyrien, qui vivoit du tems de Minos II. Roi de Crete, c'est à dire 1300 ans avant J. C. ce qui revient à l'an du monde 2735, & que cet homme aiant par là découvert l'art de la Teinture

Lib. I. Var. ep. 2.

re de Pourpre, communiqua ce ſecret au Roi de Phénicie, qui porta le premier un habit de pourpre. Mais comment ſe peut-il que cette découverte n'ait été faite qu'en l'année 2735, tandis qu'il eſt prouvé par la Chronologie de l'Hiſtoire des Juifs, que la Teinture de pourpre étoit connue de ces Peuples 225 ans auparavant. Cependant, comme j'ai fait voir plus haut que Diodore de Sicile s'eſt trompé en attribuant à Phénix Roi de Tyr l'honneur d'avoir le premier trouvé le ſecret de teindre en pourpre avec un vermiſſeau, cette erreur pourroit conſiſter ſeulement dans ces derniers mots: car, ſuppoſant que Diodore ait pris dans ce paſſage la Pourpre d'écarlate pour la Pourpre marine, il s'enſuivra que ce fut celle-ci qu'inventa Phénix, ou plutôt qui fut découverte ſous ſon régne; & que comme ce Prince étoit contemporain de Moyſe, c'eſt la raiſon pour laquelle il n'eſt point parlé de pourpre dans l'Hiſtoire des Juifs avant ce tems-là. Ainſi je ne vois pas ſur quelle autorité M. Geofroi le Cadet, Membre de l'Acad. des Sciences de Paris, a avancé dans une Diſſertation qui eſt parmi les Mém. de cette Acad. pour l'année 1714, que la première Teinture qui fut découverte fut celle de la Pourpre marine, & que le Kermès ou la graine d'Ecarlate ne le fut que long tems après. Le contraire réſulte évidemment des faits que je viens de rapporter.

Pline le Naturaliſte, qui eſt de tous les Anciens, après Ariſtote, Lib. 9.
celui qui eſt entré dans un plus grand détail ſur les diverſes ſortes de Teintures, dit que les Poiſſons appellés Pourpres, *Purpuræ*, vivent ordinairement ſept ans. Elles ſe cachent, auſſi bien que le *Murex* dont elles ſont une eſpece, s'il en faut croire Columna; elles ſe cachent, dis-je, pendant 30 jours vers le tems où ſe leve la Canicule. Elles s'attroupent au printems, & ſe frottant les unes contre les autres, elles jettent une humeur gluante & viſqueuſe comme de la cire. Il en eſt auſſi de même du *Murex*. Mais la Pourpre a dans le fond de la gorge cette *fleur* recherchée pour la Teinture; cette précieuſe liqueur eſt en petite quantité dans une veine blanche, d'où étant enlevée, elle prend une couleur de roſe foncée ou tirant ſur le noir. Le reſte du corps ne

ſert

ſert à rien. On tâche d'attraper ces Pourpres en vie, parce qu'elles rendent cette liqueur en mourant. On la tire des plus grandes après les avoir arrachées de leur coquille; mais pour les petites, on les écraſe toutes vivantes avec l'écaille, & alors elles jettent leur liqueur. La Pourpre a une langue de la longueur du doigt, armée d'un aiguillon avec lequel elle perce les moules & d'autres coquillages pour s'en nourrir. Elle meurt dans l'eau douce & à toutes les embouchures des fleuves. Pêchée dans les autres endroits de la mer, elle vit de ſa ſeule eau ſalée l'eſpace de cinquante jours. Tous les poiſſons à coquille croiſſent très-vîte, principalement les Pourpres. Une année leur ſuffit pour atteindre à leur juſte grandeur. Les différentes couleurs de Pourpre ſe tirent de deux coquillages, dont l'un eſt le *Buccinum* & l'autre la *Pourpre:* car, quoique tous deux ſoient de même matiere, les liqueurs qu'ils produiſent ont des propriétés différentes. Le *Buccinum* eſt attaché aux pierres & ne ſe trouve qu'alentour des rochers. La Pourpre ſe nomme autrement *Pelagie.* Il y en a de pluſieurs ſortes, que l'on diſtingue par les lieux où elles ſe nourriſſent. Celles qui vivent dans la vaſe ou le limon, auſſi bien que dans l'algue, eſpece d'herbe qui croît ſur le bord de la mer, ne ſont pas eſtimées. Celles qui ſe pêchent aux bancs de roche qui ſont ſous l'eau, valent mieux; cependant ce ne ſont pas encore les meilleures. Celles qui ſe tirent du gravier ſont confondues avec les conchyles, *conchylia.* Enfin les plus excellentes de toutes, ſont celles dont le ſéjour participe de tous ces différens ſols. Les Pourpres ſe prennent dans de petites naſſes peu ſerrées que l'on jette dans la mer. On met dedans des moules pour ſervir d'appât aux Pourpres qui les aiment fort. Ces moules ſont à demimortes; mais, dès qu'elles ſentent l'eau de la mer, elle reprennent leurs forces: les Pourpres les voiant ouvertes les piquent avec leur langue, ce que les moules n'ont pas plutôt ſenti qu'elles ſe referment; & c'eſt un plaiſir, dit Pline, de voir alors les Pourpres priſes par la langue ſans pouvoir ſe dégager. Il eſt bon, continue-t-il, de les prendre après le lever de la Canicule ou avant le printems, parce que quand elles ont jetté l'humeur dont j'ai parlé, elles ont une teinture ſujette à

ſe

ſe paſſer. Les Teinturiers ignorent cette circonſtance, quoiqu'elle ſoit eſſentielle. On leur ôte enſuite la veine où cette liqueur eſt renfermée: on y ajoute le ſel néceſſaire pour la conſerver, ce qui va à 20 onces de ſel ſur cent livres de liqueur. On la laiſſe ſe macérer ainſi pendant trois jours ſeulement, parce qu'elle a d'autant plus de vertu qu'elle eſt plus récente. On met ce quintal de liqueur dans une chaudiere de plomb, celles d'airain ou de fer n'y étant pas ſi propres, & on le fait bouillir ſur un feu modéré juſqu'à ce qu'il ſoit réduit au poids de 50 livres. On en ôte avec l'écumoire les chairs qui étoient adhérentes aux veines & qui s'en ſont détachées en cuiſant, afin qu'il n'y reſte rien d'inutile. La liqueur étant ainſi épurée & cuite au bout de dix jours, on y plonge de la laine préparée pour en faire l'épreuve; & juſqu'à ce qu'on ſoit ſatisfait de cette épreuve, la chaudiere reſte ſur le feu. Si la couleur tire plutôt ſur le noir que ſur le rouge, on en eſt content. La laine y trempe pendant cinq heures. Après quoi on la carde & on la replonge de nouveau juſqu'à ce qu'elle ait pris toute la liqueur. Le *Buccinum* employé tout ſeul ne vaut rien, parce que ſa teinture s'affoiblit. On l'allie toujours à la Pourpre, qui étant trop noirâtre en reçoit la vivacité & l'éclat de l'écarlate, qui eſt ce qu'on recherche. Ainſi l'une & l'autre perdent ou acquierent ce qu'elles ont de trop ou ce qui leur manque. La proportion eſt de 200 livres de *Buccinum* & 110 livres de Pourpre pour 50 livres de laine. C'eſt ainſi que ſe teind la belle couleur d'améthyſte, ce que nos Teinturiers modernes appellent *violet-clair*. Mais celle de Tyr ſe teind d'abord avec la Pourpre dans une chaudiere qui n'eſt ni épurée ni achevée; & enſuite on la change avec le *Buccinum*. Son prix conſiſte à prendre une couleur de ſang figé, noirâtre à la vue & éclatante quand on la regarde d'en bas. Dans les premiers tems on n'eſtimoit que la pourpre violette telle que Cornelius Nepos dit qu'elle ſe faiſoit dans ſa jeuneſſe à Rome, où elle coûtoit alors cent deniers la livre, ce qui peut faire environ 62 écus & demi de notre monnoie d'Allemagne, à prendre le denier ſur le pied de 15 gros ou de 50 ſols de France, ſuivant l'eſtimation de Denys le Chartreux. Enſuite on lui préféra la pourpre rouge de Ta-

 rente

rente, où les Voyageurs disent que l'on voit encore aujourd'hui les ruines des anciens atteliers dans lesquels on préparoit cette Teinture, & de grands monceaux de coquillages qui en sont des monumens assez remarquables. Après cela, la pourpre Tyrienne teinte deux fois & appellée par cette raison *Dibapha*, vint à la mode. Sous le Consulat de Cicéron, la livre de drap qui en étoit teinte, coûtoit plus de mille deniers ou 622 écus & demi; somme si excessive que je serois presque tenté de croire que le denier Romain valoit moins que Denys le Chartreux l'estime. Mais du tems de Pline on teignoit à meilleur marché toute sorte de pourpre. Dans les teintures d'étoffes qui se faisoient avec la pourpre, on ne mêloit point de *Buccinum:* c'est tout ce qu'elles avoient de différent, si ce n'est encore qu'on fortifioit la liqueur en y jettant une demi-mesure d'autre liqueur de pourpre, c'est à dire la moitié de ce qu'il y en avoit déja, à quoi l'on ajoutoit de l'eau & de l'urine en égale portion. De cette maniere, on faisoit une couleur d'autant plus claire que la laine prend beaucoup plus de teinture que l'étoffe. Les prix de ces couleurs différoient à proportion qu'on étoit plus ou moins éloigné des côtes maritimes, où l'on pêchoit les coquillages qui les fournissoient: cependant, du tems de Pline, la liqueur de pourpre ne passoit point 50 sesterces les cent livres, ce qui fait de notre monnoie 7 écus $\frac{2}{3}$, & celle du *Buccinum* 100 sesterces valant 15 écus $\frac{1}{3}$. Quant aux lieux où l'on pêchoit ces coquillages, Pline dit qu'on en trouvoit principalement du côté de Tyr en Asie, à Meninge en Afrique, aussi bien que sur les bords de l'Océan vers la Gétulie & dans la Laconie en Europe. Il est certain que la pourpre qui avoit le plus de réputation étoit celle de Tyr; mais il paroît par quelques passages du Prophete Ezéchiel qui vivoit environ 600 ans avant Pline, que les Tyriens faisoient usage de l'Hyacinthe & de la Pourpre des Isles d'Elisa (*). A quoi le docte Calmet ajoute, dans sa traduction de ce Prophete, que les Syriens eux-mêmes exposoient en vente de la pourpre dans les marchés de Tyr, ce qui fait entendre que les Tyriens ne faisoient

Ch. 27. v. 7. 16. 20. 23. 24.

(*) νήσων Ἐλισαί, porte la Version des Septante, & la Vulgate *de insulis Elisæ*.

soient autre chose que teindre avec cette liqueur des draps qu'ils envoyoient en différens pays. Ce seroit donc donner un démenti formel à Aristote, à Pline, à Cassiodore & à d'autres Auteurs dignes de foi, que de dire que les Tyriens n'avoient point de pourpre sur leurs côtes. Mais cette difficulté seroit bientôt éclaircie s'il étoit possible de déterminer, comme je le pense, la position certaine des Isles d'Elisa dont parle Ezéchiel. Calmet, dans son Commentaire sur ce Prophete, croit que c'est l'Elide, province du Péloponese, dont la Pourpre étoit, dit-il, fort connue des Anciens. Il cite à ce sujet Pline, Pausanias & quelques autres (*), quoique le premier n'en ait rien dit; & il ajoute qu'il est étonnant que les Tyriens employassent de la pourpre étrangere, vû qu'ils en avoient de meilleure & de plus estimée dans leur pays. Pour moi je ne suivrai point l'avis de ce Savant, parce que je suis persuadé qu'il ne faut pas chercher hors de la Phénicie les Isles dont il s'agit. Ce qui me le fait croire, est que la célebre Didon, fille de Methrès ou de Belus II, Roi des Tyriens, eut le nom d'*Elise* qu'elle porta toute sa vie, celui de Didon ne lui aiant été donné qu'après sa mort; & je présume qu'il y avoit aux environs de Tyr des Isles d'Elisa d'où cette Princesse avoit emprunté le nom d'*Elise*, parce que dans la Langue Phénicienne ce terme signifie *un Lieu de délices & de joie.* Aussi est-ce par cette raison que les Phéniciens appellerent *Champs Elisées* ou *Elisiens* les lieux où ils croyoient que les ames des gens de bien étoient reçues après leur mort. On me répondra qu'il est plus naturel de rapporter le nom de ces Isles à celui d'*Elisa*, fils de Javan & petit-fils de Japhet, duquel ainsi que de ses freres étoient descendus les Peuples qui avoient partagé entr'eux les Isles des Nations, suivant le Chapitre X. de la Genese. Mais en pourra-t-on conclure pour cela que les Isles d'où l'on apportoit de la Pourpre & de l'Hyacinthe à Tyr, n'étoient pas dans la Phénicie? Et quand on le supposeroit même, s'ensuivra-t-il encore qu'elles fussent dans le Péloponese, lorsqu'on sait qu'il y avoit dans la Palestine une ville du nom d'*Elusa*, &

 qu'on

(*) Plin. lib. 9. cap. 35. Pausan. & alii apud Bochart. Phaleg. lib. 3. cap. 4.

qu'on fera attention que les Hiſtoriens Juifs, tels par exemple que Joſephe, ont compris ſouvent la Paleſtine ſous la Syrie? Il me ſemble plutôt que, ſi l'on pouvoit conclure quelque choſe de tout cela, ce ſeroit que la pourpre des Isles d'Eliſa étoit la même que celle qui étoit apportée par les Syriens à Tyr. Mais, après tout, ce paſſage d'Ezéchiel ſur la pourpre de Syrie, ne ſe trouve ni dans les Septante ni dans la Vulgate. Ainſi concluons plutôt que la critique de Calmet porte à faux, & qu'elle eſt d'autant moins fondée, qu'ajoutant enſuite que la pourpre de Syrie n'étoit pas connue dans l'Antiquité, il ſe trompe viſiblement, en ce qu'il ne fait point attention 1°. que dans le tems d'Ezéchiel il y avoit plus de deux cens ans que les Syriens & les Aſſyriens ne faiſoient plus qu'un peuple; 2°. que la pourpre d'Aſſyrie aiant été célébrée par les Anciens; témoin ce vers de Virgile: *Alba nec Aſſyrio fucatur lana veneno;* Ezéchiel a fort bien pu déſigner cette pourpre ſous le nom de celle de Syrie. Au reſte, pour achever ce que j'avois à dire de celle des Isles d'Eliſa, quand on ſuppoſeroit encore avec Calmet, que ces Isles ſeroient l'Elide, comme il le prétend, ou ſi l'on veut même, les Isles Eoliennes ſituées entre l'Italie & la Sicile, loin que le témoignage d'Ezéchiel en fût pour cela contraire à la vraiſemblance, toute l'induction qu'on en pourroit tirer, ſe réduiroit à dire que les habitans de ces Isles, ne ſachant pas employer cette pourpre auſſi parfaitement que les Tyriens, ſe contentoient de la ramaſſer ſur leurs côtes & de l'aller vendre aux marchés de Tyr, ce qui n'en procuroit néceſſairement qu'une plus grande abondance aux Teinturiers de cette ville, qui n'en pouvoient trop avoir à cauſe du prodigieux débit des laines & des étoffes qu'ils teignoient, ayant le ſecret d'y réuſſir beaucoup mieux que les autres Nations. On a cru fort longtems avoir perdu cette pourpre: les François ſurtout n'en avoient jamais gueres connu que le nom, parce qu'au tems où l'on commença à lui ſubſtituer le ſuc des plantes, les Gaulois, qui apprirent ce ſecret aux Romains ignoroient eux-mêmes, au rapport de Pline, qu'ils euſſent ſur leurs côtes des poiſſons teſtacés propres à leur fournir la teinture de pourpre, & qu'ils en négligerent la recherche, vû qu'avec le ſuc des plantes ils faiſoient des tein-

Lib. 2. Georgic. v. 465.

Plin. Hiſt. Natur. lib. 22.

teintures aussi belles, plus diversifiées & moins cheres que celles qui se tiroient de la pourpre marine. Mais, comme il étoit impossible qu'un secret, autrefois si connu, se perdît dans le sein de la Nature & échapât à la sagacité d'un Siecle aussi éclairé que le nôtre, aussi n'avons-nous plus lieu d'envier aux Anciens celui de la pourpre marine, quoique nos Teinturiers n'en ayent pas encore fait usage jusqu'à présent. Thomas Gage est le premier qui nous ait appris dans le XVII Siecle que le poisson à coquille nommé *Pourpre* se trouve aujourd'hui dans les Mers des Indes Espagnoles, aux environs du port de Nicoya, petite ville de l'Amérique septentrionale, dépendante de la province de Costarica. Mais il en fait une description si semblable à celle de Pline, qu'il semble l'avoir copiée d'après cet Auteur. Cependant il ajoûte que l'usage de cette teinture commence à s'établir aux Indes; que le drap de Ségovie qui en est teint, se vend jusqu'à 20 écus l'aune; & que par cette raison il n'y a que les plus grands Seigneurs Espagnols qui puissent en faire emplette. Les parties des Isles Antilles, qui appartiennent à la France, ont aussi une sorte de pourpre marine, suivant le P. Labat. Le poisson dont on la tire, se nomme *Burgan de Teinture.* Il est de la grosseur du bout du doigt & ressemble aux Limaçons ordinaires qu'on appelle *Vignaux*. Sa coquille est assez forte quoique mince: elle est de couleur d'azur brun: la chair est blanche & les intestins d'un rouge très-vif, dont la couleur paroît au travers de son corps. C'est ce qui teind l'écume qu'il jette quand il est pris, laquelle est d'abord d'un violet tirant sur le bleu. Pour obliger ces animaux à jetter plus d'écume, on les met dans un plat, on les agite & on les bat les uns contre les autres, avec la main ou avec des verges: dans un moment ils ont couvert & rempli le plat de leur écume qui, étant reçue sur un linge, se change en un rouge de pourpre à mesure qu'elle se seche. Le P. Labat n'ose pourtant assurer que cette pourpre soit la même que celle des Anciens; & il se contente de dire que, si c'est la véritable pourpre Tyrienne, on a du moins perdu le secret de fixer & de cuire cette couleur, qui s'affoiblit peu à peu & se dissipe entiérement à mesure qu'on lave le linge qui en a été teint. Mais il n'est pas besoin d'al-

Relat. des Ind. Occid.

ler chercher cette découverte dans les Indes de l'Amérique; nos Mers possedent ce précieux poisson; & il y en a même de plusieurs sortes qui seroient comme autrefois également propres à nous donner la pourpre, si un peu plus d'expérience pouvoit mettre nos Teinturiers en état de s'en servir. Il n'y a pas 60 ans que la Société Royale d'Angleterre retrouva un des coquillages qui la fournissent, lequel est très-commun sur les côtes de ce pays-là. C'est une des especes comprises sous le genre de poissons appellés *Buccinum* par les Anciens, qui leur avoient donné ce nom à cause que leur coquille a quelque ressemblance avec un cor de chasse. Depuis ce tems-là, le sávant M. de Réaumur, qui a fait dans ce siecle plus de découvertes que les Plines & les Aristotes n'en avoient fait dans les leurs, a trouvé que les Côtes occidentales de France ne donnoient pas à la vérité des Pourpres, mais qu'en revanche on y rencontroit communément une des petites especes du *Buccinum*. Il n'y a point remarqué celle du *Buccinum* d'Angleterre, & n'y a trouvé que rarement le vrai *Buccinum* des Anciens, tel que Columna l'a fait graver dans son Traité de la Pourpre: encore ne lui a-t-il point vû cette liqueur qui donne la pourpre; mais peut-être la différence des Mers ou des Saisons où il l'a observé, en sont la cause. A l'égard de l'espece qui est commune sur les Côtes de France, les plus grandes coquilles ont douze à treize lignes de long & sept à huit de diametre dans l'endroit où elles ont le plus de grosseur: ce sont des coquilles d'une seule piece, tournées en spirale comme celles de nos Limaçons de Jardin, mais un peu plus allongées. Leur grandeur convient fort avec ce que Pline dit de son *Buccinum*, qu'il appelle *petit coquillage*, *minor concha*, & elles sont aussi gravées ou canelées de même au bord de leur ouverture. Il y en a de fort différentes en couleurs. Les unes sont blanches, les autres sont brunes, d'autres ont des raies couleur de sable qui suivent les spirales de la coquille sur des fonds blancs ou bruns: la surface extérieure de ces mêmes coquilles est ordinairement canelée, mais de deux manieres différentes. Les canelures des unes sont formées par des especes de cordons qui suivent la longueur des spirales qu'elles décrivent, & les autres ont encore d'autres cane-

Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris pour l'année 1711.

Ibidem.

canelures qui traverſent les premieres. En conſidérant au bord de l'Océan les coquillages de cette eſpece que la mer avoit laiſſés à découvert pendant ſon reflux, M. de Réaumur a trouvé une nouvelle teinture de pourpre qu'il ne cherchoit point. Le hazard a preſque toujours part à nos découvertes; tout ce que peut faire l'attention, c'eſt de mettre en phyſique, comme au jeu, les hazards à profit. Les *Buccinum* ſont ordinairement aſſemblés autour de certaines pierres, ou ſous des arcades de ſable que la Mer a creuſées. Ils ſe trouvent quelquefois en ſi grande quantité dans ces endroits, qu'on peut les y ramaſſer à pleines mains, au lieu qu'ils ſont diſperſés çà & là partout ailleurs. Mais en même tems ces pierres ou ces arcades de ſable ſont couvertes de grains ovales, longs d'un peu plus de trois lignes, & gros d'un peu plus d'une ligne. Ils contiennent une liqueur blanche un peu jaunâtre, aſſez approchante de celle qui ſe tire des *Buccinum* mêmes, & qui, après quelques changemens, prend la couleur de pourpre. M. de Réaumur croit que ces grains ne ſont ni les œufs des *Buccinum*, ni les ſemences de quelque plante marine, ni des plantes naiſſantes; & il en conclud que ce ſont les œufs de quelque autre poiſſon. Ils ne commencent à paroître qu'en Automne. Ces grains écraſés ſur un linge blanc ne font d'abord que le jaunir preſque imperceptiblement, mais en 3 ou 4 minutes, ils lui donnent un très-beau rouge de pourpre, pourvû cependant que ce linge ſoit expoſé au grand air; car, ce qui eſt bien digne de remarque & fait voir de quelle délicateſſe eſt la génération de cette couleur, l'air d'une chambre, dont même les fenêtres ſeroient ouvertes, ne ſuffiroit pas. La teinture de ces grains s'affoiblit un peu par un grand nombre de blanchiſſages. L'effet de l'air ſur cette liqueur conſiſte, à ce qu'il paroît par les expériences de M. de Réaumur, non en ce que l'air enleve à la liqueur quelques unes de ſes particules, ni en ce qu'il lui en donne de nouvelles, mais ſimplement en ce qu'il l'agite, & change l'arrangement des parties qui la compoſent. Nous avons dans la Cochenille une très-belle couleur rouge, mais qui n'eſt bonne que pour la laine, & ne vaut rien pour la ſoie ni pour la toile. Le Carthame ou Saffran bâtard donne le beau ponceau & le cramoiſi, mais

ce

ce n'eſt que pour la ſoie. On pourra trouver, en préparant les grains de M. de Réaumur, le beau rouge qui nous manque pour la toile, & qui peut-être ſurpaſſera le rouge des toiles des Indes qui n'eſt pas beau. A l'égard des *Buccinum* qui ſe trouvent aux environs de ces grains, ils ont à leur collier, car on peut leur en donner un auſſi bien qu'aux Limaçons, un petit réſervoir appellé improprement *Veine* par les Anciens, qui ne contient qu'une bonne goutte de liqueur un peu jaunâtre. Les linges qui en ſont teints, expoſés à une médiocre chaleur du Soleil, prennent d'abord une couleur verdâtre, enſuite une couleur de citron, après cela un verd plus clair, & puis plus foncé, de là le violet, & enfin un beau pourpre. Cela ſe fait en peu d'heures; mais, ſi la chaleur du Soleil eſt fort vive, les changemens préliminaires ne s'apperçoivent point & le beau pourpre paroît tout d'un coup. Un grand feu fait le même effet, à cela près qu'il le fait un peu plus lentement, & qu'il ne produit pas une couleur ſi parfaite. Sans doute la chaleur du Soleil, beaucoup plus ſubtile que celle d'un feu de bois, eſt plus propre à agiter les plus fines particules de la liqueur. Le grand air agit auſſi, quoique moins vîte, ſur la liqueur des *Buccinum*, ſurtout ſi elle eſt détrempée dans beaucoup d'eau, d'où M. de Réaumur conjecture avec aſſez d'apparence, que la liqueur des *Buccinum* & celle des grains ſont à peu près de même nature, excepté que cette derniere eſt plus aqueuſe. Mais je ſuis ſurpris qu'il n'en conclud pas auſſi que ces grains ſont les œufs des *Buccinum*, & qu'il aime mieux les prendre pour ceux de quelque autre poiſſon. Il remarque à la vérité que ces deux liqueurs different encore par le goût, celle des grains étant ſalée & celle des *Buccinum* extrémement poivrée & piquante. Mais, puiſqu'il avoue que cette différence de goût ne provient apparemment que de ce que la liqueur des *Buccinum* eſt moins détrempée d'eau, n'eſt-il pas naturel auſſi que la qualité aqueuſe qu'il remarque dans celle des grains ne provienne que de ce qu'elle eſt plus détrempée que l'autre? Au reſte, la liqueur des grains ſeroit d'un uſage bien plus commode dans la Teinture & coûteroit moins, parce qu'il eſt très-aiſé de la tirer d'une grande quantité de grains que l'on écraſera à la fois: au lieu que

que celle du *Buccinum* eſt en bien moindre quantité, & que pour la prendre, il faut ouvrir le réſervoir de chaque *Buccinum*, ce qui demande beaucoup de tems: ou ſi, pour expédier, on écraſe les plus petits de ces coquillages, comme faiſoient les Anciens, on gâte la couleur par le mêlange des différentes matieres que renferme l'animal. Avec cela, je ne doute pas qu'on ne puiſſe trouver des liqueurs chymiques qui feront paroître la couleur de pourpre plus vîte ou plus commodément que le feu, le ſoleil ou le grand air: déja M. de Réaumur a imaginé le ſublimé corroſif qui produit cet effet ſur la liqueur de *Buccinum*, mais la pratique & ſurtout une pratique qui viendroit à faire partie d'un métier, demanderoit beaucoup d'autres obſervations & des vues toutes nouvelles. Il y a bien de la différence entre un Phyſicien qui veut connoître, & un Artiſan qui veut gagner.

Me ſera-t-il permis ici de parler à mon tour d'une découverte que j'ai faite autrefois ſur le genre de teinture dont il s'agit? J'étois en 1725 dans une ville maritime de Picardie (St. Valeri ſur Somme). Des femmes, qu'en ce païs-là on nomme *Verotieres* parce qu'elles s'occupent à chercher dans le ſable une ſorte de ver qui ſert d'appât pour la pêche, trouverent par hazard une Huître qui me tomba entre les mains. Je dis qu'elles la trouverent par hazard, parce qu'il étoit ſans exemple qu'on y en eût trouvé de mémoire d'homme, au rapport de tous les Pêcheurs que je conſultai. Cette huître reſſembloit parfaitement à ces grandes coquilles que les Pélerins de S. Jacques portent ſur leurs habits & à leurs chapeaux: c'eſt à dire qu'elle étoit canelée, plus plate & plus unie que l'écaille des Huîtres ordinaires. L'aiant ouverte, je fus extrémement ſurpris de voir au milieu du poiſſon, une matiere d'une belle couleur de ceriſe, occupant l'étendue d'une piece de deux Dreyers. Je déchirai avec la pointe d'un coûteau la pellicule qui enveloppoit cette matiere, & aiant remarqué que le fer en étoit teint, je fis l'épreuve de cette couleur ſur un linge qui prit une teinture d'un rouge un peu plus foncé: mais enfin, comme la matiere étoit en trop petite quantité, & que je ne pus parvenir à trou-

ver aucune autre Huître semblable, il me fut impossible d'en réitérer l'expérience, & de perfectionner cette découverte.

Après cette Dissertation sur la Pourpre marine, je viens aux autres couleurs anciennes dont j'ai parlé plus haut.

L'Ecarlate double ou le Cramoisi étant, comme j'ai dit, le **κόκκινον διπλοῦν** des Grecs, que les Interpretes Latins ont rendu par les termes de *coccum duplex* ou *bis-tinctum:* il paroît aisé d'en conclure que c'étoit de la laine ou étoffe deux fois teinte avec la graine d'Ecarlate ou le *Kermès* des Arabes, d'où vraisemblablement le *Cramoisi* a pris son nom. Ovide dans son Livre *de Arte amandi*, fait bien mention de la laine qui se teignoit deux fois avec le Murex: *Nec quæ bis Tyrio murice lana rubet:* & Martial au 4 Livre de ses Epigrammes: *Quod bis murice vellus inquinatum.* Mais ni eux, ni d'autres avant Pline, n'ont parlé du cramoisi, dont il s'agit. Et Pline lui-même n'en dit rien non plus, à moins qu'on n'entende de cette couleur, ce qu'il dit de l'*Hysginum* qui, suivant le P. Hardouin, étoit une Teinture de pourpre tirant sur le rouge, laquelle se faisoit, comme je l'ai dit, de deux manieres, l'une par le mêlange de la graine d'Ecarlate & de la Pourpre Tyrienne, & l'autre en emploiant simplement du Vaciet ou de l'Hyacinthe. Mais il est bon d'observer que, de tous les endroits de l'Histoire des Juifs où les Interpretes François se sont servi du mot *cramoisi*, il n'y en a que deux, que les Versions Grecques & Latines traduisent par
Exod. ch. 25. v. 4. ch. 35. v. 6. ceux de **κόκκινον διπλοῦν**, *coccum duplex;* l'une & l'autre se servant partout ailleurs des termes de **κοκκίνου κεκλωσμένου**, *coccum tortum*, *fil d'écarlate tors;* **κοκκίνου νενησμένου** ou **διανενησμένου**, *coccum netum*, *Ecarlate filée.* Ainsi je trouve qu'il est fort difficile de déterminer en quoi consistoit le *cramoisi* des Anciens, à supposer qu'il fût autre qu'une double Teinture d'Ecarlate, comme je l'ai dit d'abord.

Il me sera plus aisé d'expliquer ce que c'étoit que le simple rouge: car le terme d'*Erytrodanum*, que les Grecs lui donnoient, étant le nom de la Garance qui est le *Rouge des Teinturiers*, nommé en Latin

Ru-

Rubia Tinctorum, il n'y a presque pas lieu de douter que cette Teinture ne se fît avec la racine de cette Plante, qui est encore emploiée au même usage par nos Teinturiers d'aujourd'hui. Pline, aux XIX & XXIV Livres de son Histoire, dit que cette racine servoit non seulement à teindre les laines, mais aussi les peaux, ce qui est précisément le cas dont il s'agit. Car, dans les passages de l'Exode où il est parlé de cette Teinture, il n'est question que de peaux de moutons & de béliers teintes en rouge, *pelles rubricatæ*. Pline ajoûte que la Garance croît en abondance dans toutes les Provinces; mais que la plus estimée de son tems étoit celle d'Italie, principalement des Fauxbourgs de Rome. Dioscoride met cependant celle de Ravenne au dessus de toutes les autres.

Telles sont les seules Teintures que l'on peut prouver avoir été découvertes dans les XXV premiers siecles du Monde. Ce n'est que dans le XXXV, c'est à dire 931 ans après, qu'on trouve, pour la premiere fois, la Teinture verte, sous le régne d'Assuérus qui, suivant le 1 Chapitre d'Esther, avoit des Tapisseries où cette couleur étoit alliée à la blanche & à l'hyacinthe. On n'en connoissoit point d'autre chez les Grecs au tems d'Alexandre le Grand: qui est, suivant Pline, l'époque des premieres Teintures que l'on commença à donner au lin, & aux toiles composées de cette matiere. Car jusqu'alors on s'étoit contenté de teindre des laines ou des étoffes qui en étoient faites. Ainsi ce ne fut que sous les successeurs d'Alexandre que les Grecs perfectionnant cet Art, inventerent, à ce qu'on prétend, les Teintures bleues, jaunes, noires, &c. En quoi je suis cependant persuadé que les Gaulois & les Indiens les avoient devancés. Mais si l'on en veut croire les Chinois, ils les avoient découvertes bien des siecles auparavant. Hoangti, ou Hoham-ti, leur troisiéme Empereur, qui régnoit 318 ans avant le déluge, ornant sa tête d'un diademe, se réserva, disent-ils, la couleur jaune qu'il interdit à tous ses sujets. Un de ses successeurs de la famille de Hia, choisit dans ses drapeaux la couleur noire que l'Empereur Tang, ou Chim-Tam, chef de la famille de Xam & contemporain de Jacob, changea dans la suite pour prendre la

Pline lib. 19.

Descr. de la Chine par le P. Martin Martini Jésuite.

la couleur blanche. Depuis encore, l'Empereur Fau, ou Vu-Vam, chef de la famille de Cheva & contemporain de Samuel, prit la couleur de pourpre. Mais ces faits, comme toutes les autres Antiquités de la Chine, ne sont fondés que sur des traditions fort incertaines. On sait plus surement que les Grecs & les Gaulois aiant inventé ces diverses Teintures, elles passerent aux Romains qui apprirent des premiers la maniere de faire la Pourpre Tyrienne; & des uns & des autres le secret de teindre en toutes sortes de couleurs avec le suc des plantes, les Gaulois surtout ne teignant point avec d'autres matieres, comme je l'ai déja dit après Pline. On voit d'ailleurs dans son Histoire, que les laines naturellement noires ne recevoient aucune Teinture; & qu'à l'égard des autres, elles étoient teintes ou avec les matieres dont j'ai parlé, ou avec les fleurs de grenadier, le sumac, le chêne, la noix de galle, le bois de fustet, le genêt, la racine de l'alisier, le noier & le poirier sauvage, le pastel ou guede, la pariétaire, l'orcanette, l'algue marine, le nitre, &c. L'usage de la plûpart de ces matieres s'est conservé dans la Teinture des Modernes, comme je le montrerai dans la seconde partie. Je vais finir cette premiere par les passages du VI[e] Livre de mon poëme sur le *Ver à soie*, qui ont rapport aux Couleurs en général, & à la Teinture des Anciens en particulier.

Lib. 8.

Lib. 13. 16. 20. 22. 31. 32.

Jusqu'ici la Nature, inimitable encor,
De l'humaine industrie a surpassé l'essor;
Mais bientôt nous verrons, dans l'art de la Teinture,
L'industrie à son tour égaler la Nature.
Les couleurs*, dont se peind la Nature en tous lieux,
Sont de ses ornemens les plus beaux à nos yeux.
Qui le croiroit pourtant? Ces couleurs admirables
Toujours à notre esprit seront impénétrables.
D'audacieux Mortels ont fait de vains efforts,
Soit pour en expliquer la cause dans les corps,
Soit pour en découvrir la secrete origine
Dans les impressions que reçoit la rétine.

Neu-

Neuton, le plus subtil de nos Observateurs,
Neuton le confessoit à ses admirateurs:
Il trouvoit par le prisme, il mesuroit peut-être
Les plis des sept couleurs, qu'un seul rayon fait naître;
Mais lorsqu'il veut percer cet abîme profond,
Son œil troublé s'y perd, son esprit s'y confond.
Ce n'est point nous, c'est Dieu, qui sans nous les opere.
Eut-il besoin, ce Dieu, de notre ministere,
Pour créer les objets sous les dehors divers
Qui nous font distinguer les objets bleus des verds?
J'entends avec plaisir, j'écoute un Philosophe
Du manteau de Phœbus me déployant l'étoffe,
M'y montrant l'*orangé*, l'*azur*, l'*or*, le *rubis*,
Au *pourpre*, au *violet*, à l'*émeraude* unis.
Des rayons du Soleil, que chacun en sa teinte
Offre ainsi les couleurs dont la Nature est peinte,
Et que de leur mélange embellissant les cieux,
Il en résulte encor la blancheur à nos yeux;
Je connois tout le prix d'une étude si belle;
Mais pour nous procurer quelque aisance nouvelle,
Tous ces spéculateurs ont-ils mis dans nos mains
Le feu, dont Prométhée anima les humains?
Ont-ils de la Teinture ouvert le mécanisme?
Avouez-le, ô Savans! vainement votre prisme
D'un rayon lumineux eût montré les couleurs,
Si Dieu n'avoit pris soin de les fixer ailleurs,
Vous n'eussiez rien produit en les faisant connoître,
Et l'art du Teinturier seroit encore à naître.

Cet art donc, de tout tems, reconnoît pour auteur
De l'Univers entier l'infini Créateur:
Dieu, tirant de son sein ces dons élémentaires,
En revêt tous les ans les fleurs de nos parterres;
Et pour nous donner lieu d'imiter leur émail,
Le besoin d'un habit nous invite au travail.
Salomon dans sa gloire, admirant la Nature,
Souvent du lis champêtre envia la parure;



Tant il est vrai qu'un fil, dans sa propre couleur,
N'a rien de comparable à la plus vile fleur.
Les uns, sous leur aspect rarement dissemblable,
Rendroient, entre son peuple, un Roi méconnoissable;
Les autres, obscurs, noirs, redoutés de nos yeux,
Porteroient, sans raison, sa tristesse en tous lieux.
De là l'esprit humain reconnut l'avantage
D'exprimer des couleurs qui manquoient au filage.
Vers ce but desirable il dirigea ses soins;
Mais Dieu, pour y pourvoir, attend-il nos besoins?
Partout il avoit mis, à l'usage des hommes,
Les terres & les sels, les plantes & les gommes,
Afin que l'art au fil donnât l'éclat des fleurs,
Le préparât d'avance à saisir les couleurs,
Ou pour en éviter le trop fréquent divorce,
Renforçant leur foiblesse & modérant leur force,
Unît, par un mélange exact & toujours sûr,
Le plus pâle au trop vif, & le clair à l'obscur.
Par là, nous pouvons tous, au gré des conjonctures,
Colorer nos habits, varier nos parures;
Par là, le simple aspect de divers ornemens
Annonce aux yeux d'autrui nos propres sentimens;
Par là l'homme, obligé d'honorer son semblable,
Observe en l'abordant un maintien convenable;
Ne vient point, en des lieux d'un sombre deuil couverts,
Amener brusquement les ris & les concerts,
Et distingue, aux couleurs d'un habit qu'on apprête,
Si l'on va d'un hymen solenniser la fête,
Fêter le jour natal d'un premier-né chéri,
Ou pleurer au tombeau d'un pere, d'un mari.
Chaque jour, chaque état, chaque sexe, chaque âge
Peut avoir au besoin sa couleur en partage,
Et rendre précieux, par un heureux secret,
Cent poisons que la terre enfantoit à regret.
La Teinture en fait cas, & cet art admirable,
En un *verd*, en un *rouge* éclatant & durable,

Convertit à ſon gré, mais non pas ſans effort,
L'inſtrument du dégoût, ou celui de la mort.

Dans l'enfance des Arts & des Manufactures,
Le hazard produiſit les premieres teintures,
Et la teinture aînée, entre tant de couleurs,
Fut ce beau *vermillon*, ſi commun ſur les fleurs.
On dit qu'aſſis un jour à l'ombre de l'yeuſe,
Un Berger la trouva ſur ſa branche épineuſe,
Dans un balon rempli de moucherons *vermeils*,
Héritiers annuels de *vermiſſeaux* pareils.
Tel eſt le vrai Kermès, & telle eſt au Mexique
Cette émule en nos jours de l'écarlate antique,
La cochenille-inſecte, à qui des fruits *ponceaux*
Ont ſervi d'alimens, de toits & de berceaux.
Cependant du Kermès une double teinture
Forma du *cramoiſi* l'empreinte plus obſcure,
Et le noir vaciet, éclairci par le lait,
Sous le nom d'*yanthin*, donna le *violet*.
Sitôt que la garance eut montré ſa racine,
D'un autre *rouge* encore elle fut l'origine;
Mais la *pourpre* de Tyr, avec bien plus d'éclat,
Vint du ſang de l'Amour imiter l'incarnat.

De l'Amour? oui, ce Dieu, ſi chéri de ſa mere,
Un jour dans les jardins, qu'elle avoit à Cythere,
Conduit par les Zéphirs, & jouant avec eux
Y vit couler ſon ſang . . .
Chaque fleur en paſſant lui dérobe un regard . . .
Mais quelle eſt ſa ſurpriſe à l'aſpect de la roſe! . . .
Zéphirs, s'écria-t-il, *ô la charmante fleur* . . .
Comme moi, jeune, fraîche, à ma taille aſſortie,
Reſpirant, comme moi, la divine ambroſie,
Ses feuilles ſont d'un blanc *que je n'efface point,*
Et leur arrangement m'eſt conforme à ce point,
Qu'il retrace à vos yeux le deſſin de mes aîles.
Cette fleur, le portrait des amitiés trop frêles,

Lui

Lui ressembloit encor par un endroit secret,
Endroit bien dangereux, mais l'enfant l'ignoroit.
Il n'en connoissoit pas les aiguillons funestes,
Tels & non moins cuisans que ses flêches célestes.
En achevant ces mots, cet aimable innocent
Va porter sur la rose un baiser caressant;
D'une épine aussitôt il sent la vive atteinte . . .
L'Amour veut voir l'épine, on la cherche, ô prodige!
La rose en ce moment *rougissoit* sur sa tige:
Digne destin d'un sang cruellement versé!
Le Ciel à le venger étoit intéressé . . .
Il en teignit la fleur qui l'avoit fait répandre,
L'éclat, qu'elle en reçut, lui donna tant de prix,
Que pour ses autres sœurs on conçut du mépris;
Elle fit l'ornement de l'empire de Flore,
Et toujours aussi belle, elle le fait encore.

C'est ainsi que, semblable à la Reine des fleurs,
La pourpre a surpassé les plus belles couleurs.
Mais par quelle avanture a-t-on pu la connoître?
Amour fit ce miracle: Amour est un grand maître!

Pour la Nymphe Tyros Hercule épris d'ardeur
Lui portoit chaque jour le tribut de son cœur,
N'ayant pour compagnon qu'un barbet domestique
De ses amoureux soins le confident unique.
Un jour qu'il côtoyoit le liquide élément,
(C'étoit la seule route ouverte au jeune Amant)
Le barbet affamé surprend un coquillage,
Nourrisson d'Amphytrite exilé sur la plage.
Par ce mets délicat quelque tems retenu,
Il vient après son Maître, au logis si connu:
Arrivé dans la grotte, Hercule & sa Maîtresse
Sont l'objet tour à tour de sa tendre caresse.
Mais la jeune Tyros, qui, d'un œil attentif,
Sur sa levre observoit l'incarnat le plus vif,

S'écrie:

S'écrie: *Ah! si tu veux me témoigner ton zele,*
Va me teindre un habit d'une couleur si belle,
Hercule, ou pour jamais tu seras à mes yeux
Un perfide, un ingrat, un objet odieux.
Amans, qu'eussiez-vous fait! eu recours à la ruse?
Saisi quelque prétexte? inventé quelque excuse? . . .
Amour n'en connoît point: l'Amant empressé part,
Cherche, trouve la pourpre & l'asservit à l'art.

On vit dans l'Orient les Teinturiers novices,
Assez & trop longtems bornés à ces prémices,
En orner, à grands fraix, les habits d'un Mortel,
Et du Dieu de Moïse en décorer l'autel.
Avec la couleur blanche enfin la couleur verte
Des premieres couleurs suivit la découverte,
Et lorsqu'à Babylone Alexandre mourut,
Chez les Teinturiers Grecs nulle autre ne parut.
Mais déja le Gaulois, instruit par ses Druides,
Avoit fait dans cet art des progrès plus rapides,
Sans avoir, ou marché sur les traces des Grecs,
Ou du sein de Neptune enlevé le Murex.
De tout tems, la Teinture a trouvé dans la Gaule
Des fruits, des arbrisseaux plus communs que le saule:
Là le *fauve* naissoit du simple brou de noix,
La gaude *jaunissante* y croissoit dans les Bois,
On cueilloit sur le chêne une *noire* teinture,
Et les champs nourrissoient, avec peu de culture,
Pour le *bleu* le pastel, & pour le *rouge* enfin
Les vermisseaux du rouvre, ou le billon moins fin.
Dès qu'ainsi l'on connut les cinq couleurs matrices,
L'esprit donna carriere à cent & cent caprices:
L'art ne prit que d'eux seuls ses nouvelles leçons,
Et cherchant des rapports en cent & cent façons,
Par le mélange adroit du lumineux au sombre,
De ces simples couleurs fit des mixtes sans nombre.

SECONDE PARTIE.

De la Teinture des Modernes.

La Teinture n'eut pas un ſort plus heureux que tous les autres Arts, dans cette longue éclipſe que leur fit ſouffrir l'invaſion des Barbares dans l'Occident. On y perdit le ſecret des plus belles couleurs, & entr'autres celui de teindre avec la Pourpre marine, que l'on n'a pas encore bien retrouvé, malgré les recherches, & les découvertes que M. de Réaumur a prétendu avoir faites à ce ſujet. Mais, ce qui eſt digne de remarque; c'eſt au fanatiſme des Croiſades, devenues à la mode dans ces tems de barbarie, que la Teinture dut ſa renaiſſance en Europe: car s'étant conſervée chez les Grecs & les Saraſins, avec quelques autres Arts, tels que celui de la Peinture, d'élever des Vers à ſoie, de faire des Tapiſſeries de haute-liſſe à grands perſonnages, &c. les Princes Croiſés engagerent quelques Artiſtes de ces Nations à les ſuivre dans leurs Etats & à s'y établir. Les Vénitiens apprirent des uns à teindre. La Calabre & la Pouille inſtruite par d'autres, fut bientôt en état de monter des manufactures d'étoffes de ſoie. Florence accueillit la Peinture & en devint la premiere Ecole. La France elle-même ne fut pas des dernieres à profiter de l'induſtrie de ces Artiſtes. Le nom de Saraſinoiſes que l'on y a longtems donné à ces anciennes Tapiſſeries de haute-liſſe, & même celui de Saraſinois que porte encore dans ſes ſtatuts la Communauté des Tapiſſiers, ſont une bonne preuve que leur origine vient de là. Et l'on en peut même inférer que la Teinture reparut dès lors en France, auſſi-bien qu'en Italie, puiſqu'elle étoit indiſpenſablement néceſſaire pour le ſoutien de ces manufactures Saraſinoiſes. La découverte de l'Amérique contribua à perfectionner cette Teinture Européenne, en lui procurant de nouvelles Drogues, particuliérement la Cochenille qui en eſt la plus précieuſe. Cependant le premier qui la mit en uſage en France, ne vivoit pas avant François I. C'étoit un nommé Gilles Gobelin, qui crut avoir découvert que les eaux de la petite riviere de Bievre, qui paſſe dans St. Marceau, l'un des fauxbourgs de Paris, avant que de s'y

jetter

jetter dans la Seine, avoit des propriétés singulieres pour sa teinture. Il s'établit le long de cette petite riviere; & lui, ou plutôt ses enfans, y firent bâtir une maison dont le vaste enclos, aussi-bien que la riviere même, a pris & retient toujours le nom des Gobelins. Mais le premier nom de cette maison fut *la Folie-Gobelin* que le public lui donna, dans l'idée où l'on étoit, que l'entreprise de ces Teinturiers ne réussiroit pas. L'événement démentit cette opinion. Leur Teinture se soutint, s'accrédita, & loin d'être déchue depuis, sa réputation n'a fait qu'augmenter avec le tems. Tel est l'état où nous l'avons vue entre les mains de Mrs. Glucq & Julienne. Le premier étant mort, l'autre qui lui a survécu est resté seul Directeur de cette Teinture Royale, & le seul dépositaire du secret de l'Ecarlate des Gobelins; mais lui-même étant aussi mort en dernier lieu, sans enfans, il a laissé ce secret à un de ses amis. Cependant comme cette Teinture n'est & n'a jamais été que pour les laines, & pour la seule couleur écarlate, dans le tems que Gilles Gobelin l'établissoit à Paris, un Peintre Flamand, nommé Pierre Koeck, rendoit un plus grand service encore à son pays, en y mettant en œuvre les plus belles couleurs pour la teinture des soies & des laines, dont il s'étoit procuré la connoissance, dans les voyages qu'il avoit faits en Turquie. Il mourut l'an 1550. Voilà quelles ont été les sources & les voies par lesquelles la Teinture est venue aux Modernes en s'étendant chez eux de proche en proche. Il n'y a aucun doute que les guerres qui ont désolé si longtems tous les Etats de l'Europe retarderent les progrès de cet art. Aussi remarque-t-on que les Teinturiers de Paris, à l'exception des Gobelins, ne teignoient qu'en petit teint sous Henri III, & même encore sous Louis XIII; tant les guerres civiles & les impôts avoient appauvri le peuple & donné des entraves à l'industrie. Tout le commerce de la France avec les Etrangers étoit dans leurs mains. Tous les Draps fins qu'on portoit à Paris venoient d'Angleterre & de Hollande; ce qui fait juger que la teinture des Gobelins n'avoit pour objet que celle des laines écarlates pour la tapisserie. En effet quand M. Colbert voulut établir les manufactures de Draps fins de Van-robais, de Sedan & autres, il

ne les désigna dans les lettres patentes, que sous le nom de Draps fins façon de Hollande & d'Angleterre. Mais c'est à cette époque qu'on doit rapporter la vraie naissance de la Teinture en France; car ce Ministre ne tarda pas à dresser des réglemens qui eurent pour but la perfection de cet Art & l'avantage du Public. Les Réfugiés François les porterent après sa mort, aux Nations étrangeres qui accueillirent ces innocens persécutés. Mais depuis Colbert, ses réglemens sur la Teinture ont souffert quelques changemens; & en dernier lieu, lorsque M. Fagon, Intendant des Finances, étoit à la tête du Bureau du Commerce & des Manufactures, aidé des lumieres de l'Académie des Sciences, il innova beaucoup de choses sur cette matiere. Voilà les guides que j'ai suivis, sans avoir pourtant négligé de m'instruire en voyant travailler les Teinturiers mêmes. Ainsi de cette histoire de la Teinture des Modernes je vai passer à ce qui regarde son mécanisme.

Il y a cinq Couleurs, appellées matrices, premieres ou simples, qui sont le Bleu, le Rouge, le Jaune, le Fauve & le Noir. Ces couleurs diversement mêlées les unes avec les autres produisent les couleurs suivantes.

I. De la nuance ou du mêlange du Bleu & du Rouge se composent la couleur de roi, la couleur de prince, l'amarante, le violet, la couleur de pensée, le colombin, le pourpre, l'amarante cramoisi, le violet cramoisi, le gris argenté, le gris de lin, le gris violant, le gris vineux, & généralement toutes les sortes de gris cramoisis ou autres couleurs cramoisies où il entre du Fauve, comme gris lavandé, gris de sauge, gris de ramier, gris plombé, couleur d'ardoise, pain bis & tristamie, la couleur de poivre & minime, le tané, la rose seiche, les passevelours, le gris brun & le surbrun.

II. De la nuance du Bleu & du Jaune se forment le verd jaune, le verd naissant, le verd gai, le verd d'herbe, le verd de laurier, le verd molequin, le verd brun, le verd obscur, le verd de mer, le verd céladon, le verd de perroquet & le verd de chou.

III.

III. De la nuance du Rouge & du Jaune ſe tirent le jaune d'or, l'aurore, la couleur de ſouci, l'orange, le nacarat, la fleur de grenade, le ponceau, la couleur de feu, l'iſabelle, la couleur de chamois, &c.

IV. De la nuance du Rouge & du Fauve dérivent la couleur de canelle, de châtaigne, de muſc, de poil d'ours, même la couleur de roi.

V. De la nuance du Jaune & du Fauve ſont produites toutes les couleurs de feuille morte & la couleur de poil.

Outre toutes ces couleurs, les Teinturiers en inventent tous les jours de nouvelles, mais qui ne ſont que les mêmes ou plus chargées ou plus affoiblies.

Quoique je n'aye point dit qu'il ſe tire des couleurs de la nuance du Bleu & du Fauve, ni de celles du Noir & des autres couleurs, ce n'eſt pas qu'il ne s'en puiſſe tirer, mais il n'eſt pas ordinaire que l'on en tire.

Toutes ces couleurs ſont produites par la vertu de certaines drogues diverſement mêlées & employées, dont il y a deux ſortes; les unes ſont les drogues non-colorantes, qui ne donnent point de couleurs par elles-mêmes, mais ſervent à diſpoſer les étoffes pour recevoir les teintes des drogues colorantes, ou pour en rendre les couleurs plus belles, plus vives & plus aſſurées: les autres ſont les drogues colorantes qui donnent la couleur aux étoffes.

Je vai donner la liſte des unes & des autres, en obſervant pour les diſtinguer, d'écrire les non-colorantes en caracteres Italiques.

1. *Agaric.*
2. Alcana.
3. *Alun.*
4. *Amidon.*
5. Anate, ou Attole.
6. *Arſenic.*
7. Bayes de Myrtes, ou Myrtilles.
8. Bayes de Nerprun, Noirprun ou Bourg-épine.
9. Bidauſt, ou ſuye de cheminée.

10. *Bier-*

10. *Biere double.*
11. Bois de Bresil & Bresillet.
12. Bois de Caliapour, Caliatour, ou Cariatour.
13. Bois de Fustet, ou Fustel.
14. Bois de Fustok, ou Bois jaune.
15. Bois d'Inde, de la Jamaïque & de Campêche.
16. Bois de Sandal, ou Santal.
17. Bois de Sapan.
18. Bourre de chevre.
19. Brou de noix.
20. Burgan de teinture, ou Cornet de pourpre.
21. *Cendres communes & recuites.*
22. *Cendres gravelées.*
23. *Cendres potasses & vedasses.*
24. *Chaux.*
25. Cochenille.
26. *Colle de poisson, ou Carlock.*
27. Couperose, ou Vitriol.
28. *Crême, Cristal, ou Sel de tartre.*
29. Dividivi.
30. *Eau commune.*
31. *Eau de Courge.*
32. *Eau forte.*
33. *Eaux sures*, ou Liqueur.
34. Ecarlate, Graine, ou Pastel d'Ecarlate, ou Kermès, ou Graine de vermillon.
35. Ecorce de bois d'Aulne.
36. Ecorce & feuilles de bois de Noyer.
37. *Esprit de Vin.*
38. Essaye.
39. *Etain fin.*
40. Fenugrec, ou Senegré.
41. Fleurée.
42. Fouie.
43. Garance, Rouge des Teinturiers, ou Billon.
44. Garouille.
45. Gaude, ou Herbe jaune.
46. Genestrole, Genest des Teinturiers, ou Herbe de pâturage.
47. *Gomme Ammoniac.*
48. Gomme Laque.
49. *Gomme Turique.*
50. Gouthiou.
51. Graine d'Avignon, Graine jaune, ou Grainette.
52. Guede, ou Pastel.
53. *Huile d'olive.*

54. Inde, & Indigo.
55. *Jus de citron & de limon.*
56. *Jus d'orange.*
57. *Levûre de biere.*
58. Lichen.
59. Limaille.
60. Litharge.
61. Malherbe.
62. Missein.
63. Moulée, ou Terre de moulard.
64. Noix de galle, ou Cassenolle.
65. Orcanette.
66. Orobe.
67. Orseille, ou Orchel.
68. Panque.
69. Perelle.
70. *Pierre Phrygienne.*
71. Pirethre.
72. Poquelle.
73. Pouchoe.
74. Racine de Noyer.
75. *Réagal.*
76. Redon, Rodon, ou Roudon.
77. Reilbon.
78. Rocou, ou Roucou, & Orléane.
79. Rodoul.
80. Ronas.
81. Rupiedse.
82. Ruynas, ou Soliman-Doftyn.
83. Safran bâtard, Safranum, Safran-bourg, ou Carthame.
84. *Salpêtre, ou Sel nitre.*
85. Sarrette, Sereth, Sereque, ou Grisel.
86. *Savon.*
87. *Sel armoniac.*
88. *Sel gemme, ou Sel minéral.*
89. *Sel marin.*
90. *Sonde.*
91. *Souphre.*
92. *Sublimé.*
93. Sumac, Rou, Roure, ou Roux.
94. Tamaris.
95. *Tartre, Graine de tonneau & Gravelle.*
96. Terra-merita, Cucurma, Concourme, ou Souchet des Indes.
97. Tournesol, Ricinoïdes.

98. Tren-

98. Trentanel.
99. Vahats.
100. Velani, ou Avelanede.
101. Verdet, ou Verd de gris.
102. Vouede, ou Voide.
103. *Urine.*

Il sera bon d'expliquer ici la nature de ces drogues, leur différentes especes, leurs propriétés, & les lieux d'où elles sont apportées.

1. L'*Agaric* est une espece de champignon ou d'excroissance, qui naît sur le tronc & les grosses branches de certains arbres, tels que le Melese, en Latin *Larix*, & le Chêne quand il est vieux. L'Agaric de Chêne, qui est rougeâtre & fort pesant, ne vaut rien dans la teinture. L'autre est de deux sortes, l'Agaric mâle & l'Agaric femelle. Le premier qui est l'Agaric commun, est celui dont les Teinturiers se servent ordinairement: il est compacte & d'une couleur tirant sur le jaune. L'Agaric femelle ne s'employe gueres qu'à la médecine. Les meilleurs de ces deux derniers Agarics viennent du Levant; ceux de Savoye & de Dauphiné ne sont pas si bons: la Hollande en fournit aussi, mais c'est le moindre de tous.

2. L'Alcana est un suc que l'on tire des feuilles d'une plante que les Botanistes appellent *Ligustrum Ægyptiacum*, ou Troëne d'Egypte. Ce suc donne une couleur rouge ou jaune, suivant qu'on le prépare: jaune, si on le fait tremper dans l'eau; & rouge, si on le laisse infuser dans du vinaigre, du jus de citron ou de l'eau d'alun. Cette drogue vient d'Egypte & de quelques autres endroits du Levant.

3. L'*Alun* est dans la Teinture la principale des drogues non-colorantes. C'est un sel fossile ou minéral, blanc, dont le meilleur & le plus estimé est celui de Rome: on se sert cependant aussi de celui d'Angleterre, que l'on appelle Alun de roche, Alun blanc ou Alun de glace; ainsi que de celui de Liege; mais ce dernier étant gras & par cette raison le moins propre à la Teinture, on ne l'employe que quand on n'en peut pas trouver d'autres.

4. L'*Amidon* eſt la fécule ou le réſidu qui ſe trouve au fond des bermes ou des tonneaux remplis d'eau, dans leſquels on a mis tremper des recoupes ou du grain de froment. Cette fécule étant ſéparée du ſon par la putréfaction du grain, on en forme des pains que l'on fait ſécher au four ou au ſoleil, & que l'on réduit enſuite en petits morceaux. Le meilleur Amidon eſt fait de froment en grain, & l'on en peut faire partout où croît le froment. La Hollande eſt cependant le pays qui fournit le plus d'Amidon, que l'on y fabrique avec les fromens de Dantzic & de la Livonie.

5. L'Anate ou l'Attole eſt une pâte ſeche & noirâtre, faite des fleurs rouges d'un arbriſſeau que l'on cultive dans l'Amérique Eſpagnole.. Cette drogue a la forme d'un rouleau ou d'un tourteau; elle eſt fort eſtimée des Teinturiers d'Angleterre qui en tirent une couleur rouge. Ceux de France n'en font point uſage, ayant chez eux le paſtel d'Ecarlate & autres drogues qui leur en tiennent lieu; & il n'y a peut-être aucun d'eux qui la connoiſſe, parce qu'elle n'eſt point nommée dans les réglemens qui ont été faits pour la Teinture. Les Teinturiers de Berlin qui n'ont pas la même raiſon qu'eux de ſe paſſer de l'Anate, pourroient en tirer aiſément par la voye de Cadix.

6. L'*Arſenic* eſt un minéral blanc, très-cauſtique, & du nombre des plus violens poiſons. Il y en a de deux ſortes, le mat & le tranſparent ou criſtallin: on les employe indifféremment dans la Teinture, & ils ſe tirent de Hollande.

7. Les Bayes de Myrte ou les Myrtilles ſont le fruit & la ſemence du Myrte, qui eſt un arbriſſeau très-connu. Cette graine eſt aſſez blanche, en forme de croiſſant, d'une ſubſtance ſolide & fort dure & d'un goût aſtringent. On préfere celle que produit le Myrte femelle, dont les feuilles ſont quatre ou cinq fois plus petites que celles du mâle, qui ne donne ni de ſi bonnes bayes, ni en ſi grande quantité. On en recueille en Languedoc, en Provence, & plus communément en Eſpagne, ſurtout dans les montagnes de Sierra Morena. Mais il n'y a

 gueres

gueres que les Teinturiers Allemands qui en fassent usage, s'en servant pour teindre en bleu.

8. Les Bayes de Nerprun, Noirprun, ou Bourg-épine, sont le fruit & la semence d'un arbrisseau, nommé en Latin *Rhamnus*, qui croît en abondance dans le pays d'Avignon, & ailleurs. Cette graine ressemble à celle de Genievre. Les couleurs qu'on en tire sont le jaune, le bleu & le verd, selon qu'elle est plus ou moins mûre. Etant encore verte, on en tire du jaune, en la faisant tremper & amortir longtems dans de l'eau. Pour faire du bleu, sa maturité doit être plus avancée; & pour le verd, il faut qu'elle soit entiérement mûre.

9. Le Bidauct est le nom que les Teinturiers donnent à la suye de cheminée, dont ils se servent pour les couleurs brunes, musques & autres qui en approchent. La couleur fauve qu'ils en font est assez belle: il est vrai qu'elle est d'une mauvaise odeur, mais en récompense elle préserve les étoffes de cette espece de ver appellé *Teigne*, qui les perce & les ronge. Elle s'employe aussi avec succès pour faire les feuilles-mortes & couleur de poil de bœuf. Les ramoneurs de cheminées devroient donc être plus ménagers de cette drogue qu'ils ne le font.

10. La Biere double, qui est la Biere brune la plus forte, tant par la quantité de grain & de houblon que par le degré de cuisson qu'elle a eu, sert à lustrer les taffetas noirs.

11. Le Bois de Bresil est un bois très-pesant, fort sec, qui pétille beaucoup dans le feu, & n'y fait presque point de fumée à cause de sa grande sécheresse. Il y en a de plusieurs sortes, que l'on distingue par les noms des lieux d'où ils viennent, & qui sont le Bresil de Fernambouc, le Bresil de Lamon, le Bresil de Ste. Marthe, & le Bresil des Isles Antilles dans l'Amérique. Tous ces différens bois de Bresil n'ont point de moëlle. Ils servent à teindre en rouge, mais ils different en bonté, le meilleur étant le Bresil de Fernambouc, & le moindre de tous celui des Antilles, que par cette raison on ne nomme que Bresillet. Il faut que le premier soit en buches pesantes, compact, bien

bien sain, c'est à dire sans aubier & sans pourriture; qu'après avoir été mis en éclats, de pâle qu'il est, il devienne rougeâtre; & qu'étant mâché il ait un goût sucré. Mais, quelque bien choisi que soit ce bois, il ne peut faire, non plus que les autres Bresils, qu'une fausse couleur qui s'évapore aisément.

12. Le Bois de Caliapour, Caliatour, ou Cariatour, est connu pour un bois de teinture, tant par la liste des revenus publics sur les entrées des marchandises en Hollande, que par les réglemens sur les Teintures de France. Mais, quelque recherche que j'aye faite, je n'ai pu savoir ni ce que c'est que ce bois, ni d'où il vient.

13. Le Bois de Fustel, ou Fustet, qu'il ne faut pas confondre avec le Fustok dont je parlerai ensuite, est un bois dont on se sert pour teindre en feuille-morte & en caffé, mais dont la couleur n'est pas assurée. Ce bois croît abondamment en Provence, mais celui que les Teinturiers tirent de Hollande & d'Angleterre, est moins cher. Ce bois doit être choisi de couleur jaune & bien sec.

14. Le Bois de Fustock est le bois d'un arbre fort élevé, qui croît en Amérique, dans toutes les Isles Antilles, & surtout dans l'Isle de Tabago, d'où on l'apporte en Europe. On l'appelle aussi communément Bois jaune, parce que la couleur qu'on en tire est d'un très-beau jaune doré, mais elle a besoin d'être assurée par le mêlange de quelques autres ingrédiens. On l'employe ordinairement dans les teintures noires.

15. Le Bois d'Inde est le cœur du tronc d'un grand arbre qui croît en abondance dans plusieurs Isles de l'Amérique, particuliérement dans celles de Campêche, de la Jamaïque & de Ste. Croix, ce qui fait qu'on lui donne les noms de ces Isles. On le distingue aussi par la coupe: le meilleur est celui de la coupe des Espagnols, c'est à dire dont les bouts sont hachés; parce que l'on connoît à cela qu'il est vrai Campêche: les Anglois de la Jamaïque scient au contraire leur Bois d'Inde, qui n'est pas si estimé. Ce bois doit être solide & pesant,

non pourri, ni outré d'eau. On s'en sert pour teindre en violet & en noir.

16. Le Bois de Sandal ou Santal est de trois sortes, l'un blanc, le second couleur de citron, & le dernier rouge. Le blanc n'est d'aucun usage dans la Teinture, non plus que le citrin. Le rouge, qui est le seul dont il s'agit ici, est en grosses & longues buches; le meilleur doit être noirâtre en dessus, & rouge-brun en dedans. Il est aisé de le connoître à son peu d'odeur, à son goût insipide, & à la difficulté de le fendre parce qu'il n'est pas de fil. Il croît à Tanasserim & à la Côte de Coromandel, d'où il est apporté par les Hollandois & les Anglois.

17. Le Bois de Sapan est de deux sortes; le gros que l'on nomme simplement Sapan, & le petit qu'on appelle Sapan-Bimaës. Tous deux sont mis au rang des Bois de Bresil, sont confondus avec eux dans la Teinture, & appellés Bresil du Japon. Mais ils different du Bois de Bresil, parce qu'ils ont de la moëlle, ce que n'a point celui-ci.

18. La Bourre de chevre est le poil le plus court de cet animal, apprêté avec de la Garance, dans laquelle on l'a fait bouillir plusieurs fois. Cette Bourre ainsi préparée se fond entiérement dans la cuve à teindre, par le moyen de quelques acides que l'on y mêle, comme cendre gravelée, urine, &c. On s'en sert pour teindre en rouge.

19. Le Brou de noix est l'écorce verte qui couvre les noix avant leur maturité. Cette enveloppe n'est bonne en teinture que quand on tire la noix en cerneau. Elle sert à faire la couleur fauve, l'une des cinq couleurs simples ou matrices.

20. Le Burgan de Teinture est un coquillage dont on tire une espece de pourpre marine, d'où ce coquillage est aussi appellé Pourpre. On en trouve aux Isles Antilles & dans l'Amérique Espagnole. Celui des Antilles donne un assez beau rouge de pourpre, mais cette couleur se dissipe en peu de tems, & l'on n'en fait par cette raison aucun usage en France ni en Angleterre. Mais celui des Colonies Espagnoles leur sert à teindre des draps de Ségovie qui se vendent jusqu'à 20 écus l'aune; aussi ne s'en fait-il pas un grand débit: on peut teindre

dre à bien meilleur marché avec de la cochenille, de la graine d'écarlate & un pied de pastel.

21. Les *Cendres communes & recuites* sont celles qui proviennent des bois de chauffage, & qui ont resté quelque tems dans le foyer. Les meilleures sont celles du hêtre, du charme & du jeune chêne, quand ces bois sont neufs, ou non flottés, & avec toute leur écorce.

22. Les *Cendres gravelées* sont des cendres que l'on fait en faisant calciner au feu de la lie de vin qu'on a fait sécher en pains, après que les vinaigriers en ont tiré de l'eau de vie & du vinaigre. Ces cendres sont en pierres d'un blanc verdâtre, grénées ou graveleuses, & d'un goût salé & amer. Les meilleures pour la teinture se tirent de Lyon & de Bourgogne.

23. Les *Cendres potasses & vedasses* passent pour n'être qu'une seule & même espece de cendre qui est faite de branches d'arbres calcinées & arrosées avec de la lessive commune pendant qu'elles sont en feu. Ces cendres sont en morceaux de différente grosseur, pesantes, salées & âcres au goût: on ne les peut conserver qu'en les tenant dans des vases bien clos & dans des lieux très-secs; sans quoi l'humidité les résoud en liqueur. Elles viennent de Lorraine, d'Allemagne, & du Nord.

24. La *Chaux* la plus propre à la Teinture est celle qui est faite, non de pierre tendre ou de marne, mais de pierre dure & lourde, appellée par cette raison pierre à chaux. Cette chaux doit être pesante & avoir le son d'un pot de terre cuite.

25. La Cochenille est la plus précieuse & la plus chere des drogues qu'on employe dans la Teinture. Mais il s'en trouve jusqu'à cinq sortes qui different en bonté; savoir, la Cochenille Mesteque, qui est la meilleure; la Campétiane qui n'est autre chose que les criblures de la Mesteque, ou la Mesteque même qui a déja servi à la teinture; la Tesqualle ou Tetrechalle qui est un mélange de la Campétiane avec de la terre; la Sylvestre fine qui est le pépin qu'on trouve dans le fruit d'un arbre de l'Amérique; & la Sylvestre commune, qui est la graine

 que

que l'on recueille sur la grande pimprenelle. Toutes ces Cochenilles, à l'exception de la Mesteque & de la Sylvestre fine de l'Amérique, ne servent qu'à teindre de petites étoffes. La Mesteque, qui s'employe dans les plus belles teintures cramoisies & écarlates, est un petit insecte desséché au soleil, & qui ne conservant plus aucune forme d'animal, paroît comme une graine de médiocre grosseur, brune & presque noire, chagrinée, luisante & comme argentée, ou du moins legérement couverte d'une poussiere blanche, impalpable & tout à fait adhérente à l'insecte. La Sylvestre fine de l'Amérique donne presque d'aussi belles couleurs que la Mesteque, & l'on peut s'y tromper; mais il s'en faut bien qu'elle soit autant estimée. L'une & l'autre, ainsi que la Campétiane & la Tesqualle, viennent du Mexique & du Pérou par la voye des Galions; & c'est de Cadix que les François, les Anglois & les Hollandois les tirent.

26. La *Colle de poisson* ou le *Carloek* est faite avec la vessie de l'esturgeon & vient d'Archangel: mais elle est de peu d'usage dans la Teinture.

27. La Couperose ou le Vitriol est la marcassite du cuivre que l'on a purifiée en la faisant passer par plusieurs lessives jusqu'à ce qu'on l'ait réduite en cristaux. Cette drogue ainsi préparée est ou verdâtre & en petits morceaux, comme est la Couperose de Pise; ou d'un beau verd clair, comme celle d'Angleterre; ou d'un bleu céleste & en morceaux taillés en pointe de diamant, comme celles de Chypre & de Hongrie; ou d'un verd céladon & aussi transparente que le verre, comme celle d'Italie; ou enfin d'un verd bleuâtre & également transparente, comme est celle de Goslar en Saxe, avant qu'on l'ait blanchie; ce qui se fait en la calcinant & la mettant ensuite dans l'eau, puis la filtrant & la réduisant en sel dont on fait des pains de 40 à 50 livres lorsqu'il commence à se coaguler. La Couperose est une drogue des plus nécessaires dans la Teinture, surtout pour le noir.

28. La *Crême*, le *Cristal* ou le *Sel de Tartre*, n'est autre chose que le tartre blanc ou rouge mis en poudre, & ensuite réduit en petits

tits criftaux blancs, par le moyen de l'eau bouillante paffée au travers d'une chauffe, & glacée par la fraîcheur de la cave. La meilleure Crême de tartre vient de Montpellier. Il s'en prépare auffi à Nîmes & aux environs, mais elle n'eft pas fi bonne.

29. Le Dividivi eft une plante dont la propriété pour la teinture n'a été connue en Europe que depuis l'année derniere (*), que la Compagnie Efpagnole des Caracas en vendit des effais dans fes magazins de Madrid, de Cadix, de St. Sébaftien, de la Corogne, de Barcelone & d'Alicante. Cette plante eft propre à la compofition de différentes fortes de teintures, tant pour la foie que pour la laine & le coton. Elle croît dans la province des Caracas & de Maracaybo, où on lui donne le nom de Dividivi, & elle a la propriété de la Noix de Galle. On a même prouvé par plufieurs expériences faites à Madrid & ailleurs, qu'elle furpaffe en vertu la Noix de Galle pour la teinture noire. La Junte Royale du commerce & de la monnoie, ayant été informée des avantages qu'on pourroit retirer de cette plante, a pris les mefures néceffaires pour étendre cette nouvelle branche de commerce; & le Roi d'Efpagne a bien voulu l'encourager, en exemtant le Dividivi, pour un certain nombre d'années, des droits d'entrée. S. M. a auffi ordonné qu'on imprimeroit le réfultat des nouvelles expériences qu'on devoit faire fur cet objet. Mais les papiers publics n'en ont plus rien dit depuis.

30. L'*Eau commune* eft une chofe dont les Teinturiers ne peuvent fe paffer, foit pour mettre leurs étoffes en bain, foit pour les teindre, foit auffi pour laver & dégorger le fil, la foye, ou les étoffes mêmes: mais ce dégorgement ne doit fe faire que dans de l'eau de riviere ou de fontaine, qui eft auffi la meilleure pour la teinture. Je dirai à ce propos que l'on a été longtems dans l'opinion que ce qui donnoit tant d'éclat & de réputation à l'Ecarlate des Gobelins étoit la qualité des eaux de la petite riviere de Bievre, près de laquelle cette manufacture eft établie. Les Teinturiers des Gobelins ont trouvé leur inté-

(*) Ceci eft écrit en 1769, car ce Mémoire a été augmenté à diverfes reprifes.

intérêt dans cette prévention populaire, & n'ont rien épargné pour l'accréditer. Mais on est parvenu aujourd'hui & depuis longtems à faire de très-belles écarlates en plusieurs autres endroits de France, surtout à Ivry en Normandie, & même en Hollande, en Angleterre, & ailleurs. Et véritablement on en peut faire partout lorsqu'on y employera les drogues convenables tant en quantité qu'en qualité.

31. L'*Eau de courge* est tirée par l'alembic du fruit de ce nom qui croît communément dans les jardins. Elle sert à lustrer les taffetas de couleurs.

32. L'*Eau forte* que l'on employe dans la teinture des écarlates & couleurs de feu, vient de Hollande & de France. Celle de Hollande n'est pas la meilleure, n'étant que médiocrement déflegmée; outre que l'on y fait entrer beaucoup d'alun, ce qui ne convient pas aux Teinturiers, dans les cas dont il s'agit. L'eau forte de France, surtout celle qui se fait à Lyon & à Bourdeaux, est beaucoup plus estimée. Il faut conserver cette drogue dans des bouteilles de grès ou de gros verre bien bouchées.

33. Les *Eaux sures*, ou *Liqueur* en terme de Teinturier, sont des eaux communes que l'on a fait sûrir ou aigrir par le moyen du son de farine qu'on y a laissé fermenter jusqu'à certain degré. Elles sont composées de cinq parties d'eau sur une de son que l'on a fait bouillir ensemble pendant une heure pour préparer la fermentation. On fait aussi des Eaux sures avec les farines mêmes, soit de froment soit de pois.

34. L'Ecarlate, appellé aussi Graine, ou Pastel d'Ecarlate, Kermès & Graine de Vermillon, avec laquelle les Teinturiers font l'Ecarlate de graine & le Cramoisi, est la coque ou l'aurélie d'un insecte, qui le dépose sur une espece de petit houx ou chêne verd qui croît sans culture dans la Provence, le Languedoc, le Roussillon, l'Espagne & le Portugal. L'Ecarlate de Languedoc passe pour la meilleure, étant ordinairement grosse & d'un rouge fort vif, au lieu que celle d'Espagne est presque toujours maigre & d'un rouge noirâtre. Cette drogue [illegible] doit

doit être recueillie très-mûre, & elle n'eſt bonne que quand elle eſt nouvelle, c'eſt à dire de l'année; autrement le moucheron qui ſe forme dans la coque en conſume l'intérieur, ce qui diminue la vertu de ſa qualité colorante.

35. L'Ecorce de bois d'Aulne eſt employée par quelques Teinriers pour faire certaines couleurs que j'expliquerai dans la ſuite de ce Mémoire. Le bois d'aulne ſe trouve partout en abondance.

36. L'Ecorce & les feuilles de bois de Noyer ſervent dans la Teinture aux mêmes uſages que le Brou de noix dont j'ai parlé plus haut (19). Elles ne ſont bonnes que quand l'arbre eſt en pleine ſeve, ou quand les noix ne ſont pas encore bien formées.

37. L'*Eſprit de vin* eſt une eau de vie de vin rectifiée par pluſieurs diſtillations, dont une ſeule ſuffit, lorſqu'on ſe ſert d'un inſtrument chymique à pluſieurs cucurbites.

38. L'Eſſaye eſt une racine des Indes Orientales, avec laquelle on teind en rouge ces belles toiles de coton de Maſſuliparan, dont la couleur eſt ſi vive qu'elle réſiſte au jus de cédrat, eſpece de jus de citron, qui en eſt comme la pierre de touche. Il me ſeroit aiſé de donner des marques à quoi l'on pourroit connoître la véritable racine d'Eſſaye; mais par malheur on en apporte très-peu en Europe, & ainſi ceux qui y veulent teindre ou peindre des toiles de coton, ſe ſervent d'autres drogues moins rares, mais auſſi moins bonnes & moins aſſurées.

39. L'*Etain fin*, qui eſt l'Etain d'Angleterre, eſt employé dans la Teinture par préférence à celui d'Allemagne, comme étant en rature, c'eſt à dire neuf, ſans alliage, & mis par les potiers d'étain d'Angleterre, au moyen d'un tour & d'un inſtrument tranchant, en raclures ou petites bandes très-minces, larges d'environ trois lignes, ce qui rend cet Etain plus facile à ſe diſſoudre dans l'eau forte, que celui d'Allemagne qui eſt en morceaux épais, & qui d'ailleurs n'eſt envoyé de Hambourg & de Hollande, qu'après y avoir ſervi à blanchir le fer en feuille que l'on nomme fer blanc, ce qui fait que cet Etain eſt un peu altéré & mêlé de vif argent.

40. Le Fenugrec ou Senegré eſt la ſemence d'une plante du même nom qui eſt très-commune en France, d'où l'on en envoye en Hollande & en d'autres païs étrangers. Les Teinturiers François en employent beaucoup dans le rouge écarlate où elle fait fort bien. Cette graine eſt plus petite qu'un grain de chenevis, dure & ſolide, de figure triangulaire & d'une odeur forte & déſagréable. On préfere la récente qui doit être bien nourrie, & d'un jaune preſque doré. Celle qui a été gardée devient rougeâtre & même brune; les Teinturiers n'en font point de cas.

41. La Fleurée eſt un ſuc tiré par expreſſion d'une eſpece de paſtel appellé Vouede, dont je parlerai plus bas (102). Ce ſuc eſt en pains & ſert à teindre en bleu. On le tire de Normandie.

42. Le Fouic eſt la feuille d'un arbriſſeau qui croît en divers endroits de France ſans être cultivé. Elle ne peut ſe conſerver, qu'elle n'ait été cueillie en parfaite maturité; mais pour l'employer ſur le champ ou peu de tems après, il n'eſt pas néceſſaire qu'elle ſoit ſi mûre. Elle ſert à teindre en noir.

43. La Garance, ou le Rouge des Teinturiers, en Latin *Rubia Tinctorum*, eſt une racine qui a une écorce rouge & une moëlle couleur d'orange. Cette racine étant fraîche donne une couleur très-vive: au bout d'un an, elle ſert encore; mais gardée plus longtems, elle perd de ſon éclat & de ſa qualité. Dans les lieux où l'on cultive cette racine, après l'avoir tirée de terre & fait ſécher à l'ombre, on la réduit en poudre dans un moulin, & enſuite on enferme cette poudre dans un double ſac, pour empêcher qu'elle ne s'évente. La Garance à laquelle on a ôté la premiere écorce & le cœur, eſt appellée Garance de grappe ou robée: c'eſt la meilleure. Celle qu'on nomme Garance non robée eſt la Garance en branche pulvériſée, & la Garance en branche n'eſt autre choſe que la racine ſéchée ſans autre préparation. La Garance de grappe eſt apportée en balles, & les autres dans des pipes. Cette racine ſe cultive en divers endroits, principalement en Flandres & en Zélande, où il s'en fait un riche commerce qui attire

tous

tous les ans bien de l'argent des autres pays. La graine de la Garance est noire & de la grosseur d'un grain de poivre. On la seme au mois de Mars après la pleine Lune, sur des terres médiocrement humides, qui doivent avoir été profondément labourées & bien fumées avant l'hiver. On laisse grossir les racines l'espace de 18 mois. Ensuite on arrache les plus grosses dans le mois de Septembre, qui est aussi le tems où se fait la récolte de la graine, & la coupe de la feuille qui peut servir de fourage aux bestiaux. Une Garanciere peut durer dix ans entiers, sans qu'il soit nécessaire de semer de nouvelle graine. Toute la culture pendant ces dix ans ne consiste qu'en un labour chaque année, & dans la peine de lever au mois de Septembre les racines qui ont le plus profité.

44. La Garouille est la feuille d'une plante qu'on nomme en François Garou, & en Latin *Thymecœa*, dont l'odeur est très-forte. Elle est propre à la teinture de couleur fauve, & vient de Provence, de Languedoc & de Roussillon. On s'en sert aussi pour la nuance du gris de rat, où elle réussit fort bien; son défaut se dissipant lorsqu'on fait passer les étoffes au foulon pour les dégorger.

45. La Gaude, ou Herbe jaune, en Latin *Luteola*, sert à teindre en jaune, comme son nom le marque. La plus menue & la plus rousse passe pour la meilleure: on estime moins celle qui est plus grande & d'un verd terni. Cette plante croît sans culture dans presque toutes les provinces de France & ailleurs; mais celle qu'on cultive est bien meilleure. On la seme clair ou au large dans des terres legeres au mois de Mars ou de Septembre, & elle se trouve mûre en Juin & Juillet: dans les pays chauds elle est souvent assez seche lorsqu'on la recueille; mais dans les pays plus froids il faut prendre le soin de la faire sécher après l'avoir coupée. On doit observer de ne la cueillir que dans sa parfaite maturité, & d'empêcher qu'elle ne soit mouillée quand elle est cueillie.

46. La Genestrole, ou Genest des Teinturiers, ou Herbe du pâturage, en Latin *Genista tinctoria Germanica*, parce qu'elle croît en

Allemagne, est une plante qui vient sans culture comme la Gaude, & qui sert comme elle à teindre en jaune, mais seulement les étoffes de peu de conséquence: cette plante n'est de garde que quand elle a été cueillie en maturité; mais si l'on veut s'en servir sur le champ, il n'importe pas qu'elle soit si mûre. Elle est assez semblable au Genest proprement dit, d'où vient qu'on lui en donne aussi le nom: cependant ses verges, ses feuilles, ses fleurs & ses gousses sont plus minces & plus courtes.

47. La *Gomme Ammoniac* est une gomme que l'on tire d'Alep & de Smyrne, ou en larmes, ou en masse. La premiere doit être en larmes rondes, blanches dedans & dehors, d'une odeur douce & d'un goût amer, désagréable. L'autre doit être en grosses masses chargées de larmes, sans saleté & sans grains. Les Teinturiers préferent cette derniere, comme étant à meilleur marché que l'autre, qui ne sert gueres qu'à la Médecine.

48. La Gomme Laque, dont les Teinturiers font usage, est une espece de cire rougeâtre, dure, claire & transparente, qui vient des Indes, surtout des Royaumes de Pégu & de Bengale, par la voye des Anglois, des Hollandois & des François qui y ont des établissemens de commerce. Cette drogue a différens noms, suivant ses diverses formes. On appelle Laque en bâton celle qui est attachée à des roseaux de la grosseur du doigt, & qui est telle qu'elle vient des Indes; Laque en graine, celle que l'on a fait passer legérement entre deux meules pour en exprimer la substance la plus précieuse; & Laque plate, celle qu'on a fondue & applatie sur un marbre. La premiere est la meilleure étant vraie Bengale; celle de Pégu, qui vient ordinairement en grosses masses n'est ni si bonne ni si pure, étant plus brune & mêlée de terre & d'autres impuretés. Cette gomme bouillie dans de l'eau avec quelques acides fait une teinture d'un très-beau rouge. Les Indiens en teignent ces toiles qui ne perdent point leur éclat à l'eau: les Levantins en rougissent leurs maroquins; les Anglois & les Hollandois en font une sorte d'Ecarlate.

49. La

49. La *Gomme Turique* est une espece de Gomme Arabique, qui ayant la même origine n'en differe qu'en ce que tombant des Acacias dans les tems de pluye, elle s'amoncele en grosses masses, au lieu que l'Arabique est en petites larmes blanches, claires & transparentes. Cette gomme vient du Levant; elle est propre aux Teinturiers en soie, & ceux de Lyon en consument beaucoup.

50. Le Gouthiou est un arbrisseau servant à teindre en noir; il croît dans quelques endroits de l'Amérique Espagnole, surtout dans le Chili: mais les Teinturiers d'Europe n'en font point d'usage.

51. La Graine d'Avignon, ou Graine jaune & Grainette, est la semence d'un arbrisseau épineux nommé en Latin *Lycium*, ou *Pizacanta*, lequel croît en abondance tant aux environs d'Avignon que dans le Comtat Venaissin, le Dauphiné, la Provence & le Languedoc. Cette graine est d'un verd tirant sur le jaune, de la grosseur d'un grain de froment, d'un goût astringent & amer. Elle sert à teindre en jaune.

52. La Guede est la couleur propre à teindre en bleu, qu'on tire du Pastel, qui est une plante dont les feuilles sont semblables à celles du Plantain. Dans le haut Languedoc où cette plante se cultive, on fait ordinairement chaque année quatre récoltes de ses feuilles, souvent cinq, & quelquefois jusqu'à six. Il n'y a que les quatre premieres qui soient estimées, & non pas également, mais à proportion de leur rang, la premiere étant meilleure que la seconde, & ainsi des autres. Le Pastel de la cinquiéme est très-foible, & celui de la sixiéme qu'on nomme Marouchin, absolument mauvais. Dans les lieux où l'on cultive cette plante, on en seme la graine tous les ans au commencement du mois de Mars. Quand la feuille est mûre, on la laisse flétrir quelque tems avant que de la mettre sous la roue pour la piler; & cela dans l'intention de la faire mûrir davantage, & de lui ôter une partie de son suc huileux qui pourroit nuire à la Guede. Après que ces feuilles ont été pilées ou moulues, on les laisse huit ou dix jours en piles, & ensuite on les réduit en boules ou en petits pains qu'on

fait sécher à l'ombre sur des clayes, jusqu'à ce qu'on veuille les mettre en poudre. Pour lors, les pains de Pastel étant rompus avec des masses de bois, on les mouille d'eau croupie, & après avoir d'abord bien remué & mêlé cette drogue, on continue de faire cette opération quarante fois dans l'espace de quatre mois; après quoi elle est en état d'être emballée & employée à la Teinture. Le Pastel vieux est le meilleur; il peut se garder dix ans entiers. Une forte couleur de Guede est d'un bleu foncé presque noir; c'est la base d'un si grand nombre de couleurs, que les Teinturiers ont une échelle qui leur sert à composer les différentes nuances du Pastel depuis la plus obscure jusqu'à la plus claire.

53. L'*Huile d'Olive* est une denrée trop connue pour avoir besoin d'explication. Outre la Provence, le Languedoc & la Riviere de Genes où se recueillent les meilleures huiles d'olive, il s'en fait encore beaucoup, mais de moindre qualité, dans le Royaume de Naples, dans la Morée, dans quelques Isles de l'Archipel, en Candie, en quelques lieux de la Côte de Barbarie, dans l'Isle de Majorque, & dans quelques provinces d'Espagne & de Portugal. Les Teinturiers n'employent point de fines huiles d'olive: les communes leur suffisent; ils en mêlent avec de la cendre gravelée pour courroyer certains noirs.

54. L'Inde & l'Indigo que les Hollandois appellent Orellane, sont deux drogues que l'on confond, quoique la premiere soit faite seulement des feuilles de la plante nommée Anil, & l'autre de la tige & des feuilles de la même plante. Ce sont les fécules qu'on en tire par le moyen de l'eau souvent brassée. Ces drogues viennent ainsi préparées des Indes tant Orientales qu'Occidentales. Elles sont en morceaux plats d'une épaisseur raisonnable, moyennement durs, nets, nageans sur l'eau, inflammables, de belle couleur bleue ou violet foncé, parsemés en dedans de quelques paillettes argentées, & ils paroissent rougeâtres en les frottant sur l'ongle. C'est à toutes ces marques qu'on reconnoît si l'Indigo est bon & s'il n'est pas contrefait. Autrefois il n'étoit pas permis en France de mettre dans les teintures plus de

six

six livres d'Indigo sur chaque balle de Pastel ou de Guede, ni plus d'une livre sur un quintal de Vouede, parce qu'on ne regardoit pas l'Indigo comme une bonne drogue: mais depuis on a pensé autrement, dans la vue sans doute de favoriser les Isles Françoises de l'Amérique qui fabriquent tous les ans plus de six mille quintaux d'Indigo. Mais les Etats où l'on peut cultiver le Pastel, & qui n'ont point d'Indigo à débiter, préferent avec raison le premier au second.

55. Le *Jus de Citron* & *de Limon* est le suc qu'on exprime de ces deux fruits, principalement du premier, à St. Remo ville de la Riviere de Genes, & à Menton dans la Principauté de Monaco, où il y a une telle abondance de citrons, qu'on ne destine à cet usage que ceux qui passent par un anneau de fer dont le diametre est réglé par autorité publique. Ce jus est transporté dans des barils à Avignon & à Lyon pour les Teinturiers du grand teint.

56. Le *Jus d'Orange* est le suc que l'on tire de même de ce fruit en Provence, dans le Comtat de Nice, dans l'Etat de Genes, en Espagne, en Portugal, &c. Les Teinturiers de Lyon, qui l'employent pour le lustre des taffetas noirs, le préferent au jus de citron qui y est moins propre, étant sujet à blanchir.

57. La *Levûre de Biere* est l'écume ou la mousse qui s'éleve sur cette boisson lorsqu'elle fermente dans le tonneau. En Flandre où l'on ne fait que des bieres de garde, les Brasseurs les faisant fermenter chez eux avant que de les débiter, cela leur donne la facilité de recueillir la Levûre, qu'ils réduisent en pains après l'avoir fait sécher; & c'est en cet état qu'elle est de quelque usage aux Teinturiers dégraisseurs & détacheurs d'habits.

58. Le Lichen est une plante ou sorte de mousse que l'on recueille sur les rochers de quelques-unes des Isles de l'Archipel. Cette plante est blanche, d'un goût salé, & par bouquets d'environ deux ou trois pouces de long. Les Anglois en enlevent beaucoup qu'ils portent chez eux; & leurs Teinturiers s'en servent pour la teinture rouge,

rouge, à peu près comme le font ceux de France avec la Pérelle d'Auvergne, dont je parlerai plus bas (69).

59. Les Limailles sont les parties qu'on a enlevées des métaux dégrossis, blanchis & polis avec la lime. Celles d'acier, de fer & de cuivre sont les seules qui soient de nature à servir dans la Teinture: mais le mauvais effet qu'elles y font, est cause qu'il est défendu aux Teinturiers de France d'en faire usage.

60. La Litharge est une drogue qui vient de Pologne, de Suede & de Danemarc, & qu'on croit n'être autre chose que le plomb qui a servi à l'affinage du cuivre qu'on a mis en rosette au sortir de la Mine. Cette Litharge est de deux sortes, celle d'or & celle d'argent. Mais on prétend que c'est la même, à qui la diversité des couleurs qu'elle a reçues des différens degrez de feu par lesquels elle a passé lui a fait donner ces deux noms. Celles de Pologne sont les plus estimées, étant pour l'ordinaire moins terreuses & d'une plus belle couleur. La Litharge menue est préférable à la grosse, parce qu'elle est plus calcinée, & par cette raison plus facile à dissoudre dans la teinture.

61. La Malherbe est une plante d'une odeur forte, qui croît dans le Languedoc & la Provence, mais dont il n'est permis aux Teinturiers de France de se servir que dans les provinces où ils n'ont pas la commodité de trouver de meilleures drogues.

62. Le Misseit est une drogue qui vient d'Arabie, mais dont la nature n'est pas bien connue, parce que les Européens en tirent très-peu; presque toute cette drogue se consumant à Surate & dans les autres lieux du Royaume de Guzurate, où l'on s'en sert à l'impression & à la peinture des toiles de coton.

63. La Moulée ou Terre de Moulard est le sédiment qui se forme des parties de fer & de pierre qui tombent au fond des auges posées au-dessous des meules sur lesquelles on aiguise les ouvrages de coutellerie & de taillanderie. Ce sédiment est propre à faire une sorte de mauvais noir qui est défendu aux Teinturiers de France.

64. La



64. La Noix de Galle est une sorte d'excroissance qui se trouve sur les feuilles du Rouvre, qui est une espece de Chêne. Les meilleures viennent de Smyrne, de Tripoli de Syrie, & surtout d'Alep, d'où elles ont pris le nom de Galles Alépines. Celles qu'on trouve en Gascogne & en Provence, nommées Cassenoles, leur sont beaucoup inférieures, étant legeres, rougeâtres & tout unies; au lieu que celles du Levant sont pesantes, raboteuses ou inégales à leur superficie, & d'une couleur, ou noirâtre, ou tirant sur le verd, ou à demi-blanche; ce qui en fait comme trois sortes qui ont aussi leurs usages différens, les deux premieres servant à teindre en noir & la derniere à teindre les toiles. A l'égard des Cassenoles ou Galles legeres de France, elles ne servent qu'à faire le noir écru des Teinturiers en soie. Les Galles d'Alep passent en bonté toutes celles du Levant: la marque à laquelle on les distingue, est qu'elles sont mises dans des balles longues & étroites, au lieu que celles de Tripoli & de Smyrne viennent en balles grosses & courtes, dont la toile est ordinairement rayée. Il faut aussi prendre garde qu'elles ne soient ni legeres, ni percées, ni mêlées de poudre ou d'autres corps étrangers.

65. L'Orcanette, en Latin *Anchusa*, est la racine d'une espece de Buglose sauvage, laquelle sert à teindre en rouge. Il y en a deux sortes; l'Orcanette de Constantinople, & celle de France. La premiere, qu'on tire du Levant, est une racine assez souvent grosse comme le bras & longue à proportion: elle ne paroît à la vue qu'un amas de feuilles assez larges, roulées & tortillées à la façon du tabac: au sommet, on voit une espece de moisissure blanche & bleuâtre, qui est comme la fleur. Cette racine a différentes couleurs, dont les principales sont le rouge & le violet; au milieu est la moëlle ou le cœur, rouge en-dessus, blanc en-dedans, & couvert d'une écorce très-mince: la couleur que les Teinturiers tirent de cette Orcanette, est un rouge-brun tirant sur le tanné, couleur très-mauvaise & peu assurée. A l'égard de l'Orcanette de France, qui croît en Provence & en Languedoc, c'est une racine d'une grosseur & longueur moyenne, d'un

rouge

rouge-foncé en-dessus & blanche en-dedans; cette racine, dont la qualité colorante ne consiste que dans le rouge dont elle est couverte à sa superficie, doit être choisie nouvelle, souple quoique seche, avec une petite tête de couleur bleue, & qui mouillée ou seche teigne d'un beau vermeil en la frottant sur l'ongle ou sur la main.

66. L'Orobe est la semence & la racine d'une plante qu'on appelle en Latin *Orobus*. Elle sert à teindre en verd, mais on n'en fait point d'usage en France.

67. L'Orseille est de trois sortes, savoir, l'Orseille des Isles Canaries, celle de Hollande & de Flandre, & celle de France. L'Orseille des Canaries, qu'on nomme Orchel ou Ursolle, & qui est la seule véritable, est une petite mousse ou croûte qui se forme sur les pierres & les rochers des montagnes, & qui étant apprêtée avec la chaux & l'urine, fait une fort belle nuance de couleurs, mais qui ne sont pas de durée. L'Orseille de Hollande & de Flandre est une composition faite avec du tournesol en drapeau, de la perelle, de la chaux & de l'urine. Cette drogue est en pâte ou en pierres, dans de petits barils du poids d'environ trente livres. L'Orseille de France est composée des mêmes matieres, à l'exception du tournesol; mais quelques-uns le remplacent par une teinture de bois de Bresil: cette Orseille se fait à Lyon, en Auvergne, en Languedoc & en Roussillon. Les Teinturiers distinguent encore l'Orseille en Orseille d'herbe & en Orseille de terre. La premiere est celle des Canaries, ainsi que le tournesol non apprêté ni allié à la perelle & aux autres drogues dont j'ai parlé. L'Orseille de terre au contraire est le tournesol ainsi apprêté & la perelle.

68. Le Panque est une plante du Chili, dont la tige y sert à teindre en noir, en la faisant bouillir avec le Gouthiou dont j'ai fait mention plus haut (50), & avec quelques autres drogues de ce pays-là. Le noir qui s'en fait est parfaitement beau, & ne brûle point les étoffes, comme les noirs d'Europe, où par malheur ces excellentes drogues ne sont point en usage, ni peut-être connues.

69. La

69. La Perelle est une terre grise en petites écailles, qui se trouve aux environs de St. Flour dans la haute Auvergne, attachée sur les rochers, où elle est portée par les vents, & où ensuite ayant été mouillée de la pluye elle se calcine par l'ardeur du soleil, & devient comme une espece de croûte ou de mousse de l'épaisseur d'une ligne ou deux. Ce sont les Paysans Auvergnacs qui la vendent, après l'avoir ratissée avec des instrumens de fer, de dessus les rochers, où elle se reproduit peu de tems après. Cette terre n'est d'usage que pour faire une espece d'Orseille à teinture nommée Orseille de terre, comme je l'ai dit ci-dessus (67).

70. La *Pierre Phrygienne* est une pierre spongieuse, pesante, mal liée, de couleur pâle traversée de veines blanches, & d'un goût âcre. Les Teinturiers s'en servoient autrefois à dégraisser les étoffes qu'ils vouloient teindre, mais s'étant apperçus de sa qualité un peu corrosive, ils lui ont substitué le savon & la terre glaise.

71. La Pirethre est une racine de la grosseur du petit doigt & quelquefois moins, grisâtre en dehors, blanchâtre en dedans, garnie de quelques fibres, & d'un goût âcre & brulant. Elle vient du Royaume de Tunis par la voye de Marseille. Les Vinaigriers en font plus d'usage en France que les Teinturiers; mais il s'en consume beaucoup plus en Angleterre, en Hollande & en Piémont.

72. La Poquelle est une plante dont la fleur est une espece de Bouton d'or, qui sert à teindre en jaune, & sa tige en verd: mais l'usage n'en est connu que dans le Chili, sur la Côte de la Mer du Sud.

73. Le Pouchoc est une drogue propre à teindre en jaune, & très-commune à Siam, mais on ne s'en sert point en Europe.

74. La Racine du Noyer sert dans la Teinture à faire la couleur fauve, l'une des cinq couleurs matrices. Et sous le nom de Racine on comprend aussi l'écorce & la feuille du Noyer, ainsi que la coque verte ou le brou de la noix. Pour conserver longtems ces différens ingrédiens, il faut les mettre dans une cuve remplie d'eau, & ne les

 en

en tirer que pour les employer. La Racine du Noyer n'est bonne en teinture que tirée de terre pendant l'hiver, qui est le tems où la seve de l'arbre s'y trouve comme retirée. J'ai parlé des autres (19 & 36).

75. Le *Réagal*, selon quelques-uns, est un minéral naturel, & selon d'autres ce n'est autre chose que de l'Orpiment qui est de l'Arsenic jaune, tel qu'on l'a tiré de la Mine, mais rougi au feu par le moyen des huiles de chenevis, d'olive & de noix: cette drogue doit être en gros morceaux, pesans, luisans & très-hauts en couleur. C'est, comme l'Arsenic, un poison très-violent qui est apporté de Hollande.

76. Le Redon, Rodon ou Roudon, est une herbe qu'on seme tous les ans comme le Chanvre. Cette herbe est très-commune en Russie aussi bien qu'en France. Elle sert aux tanneurs pour la préparation de différens cuirs, & principalement de ceux qu'on nomme Vaches de Russie. Son usage est moins réel dans la Teinture, car ce que les Teinturiers appellent Rodon, n'est autre chose que le Rodoul dont je parlerai plus bas (79).

77. Le Reilbon est une espece de Garance qui croît au Chili dans l'Amérique méridionale: mais cette Garance étant plus rare & plus chere, sans être meilleure que celle qui se cultive en Europe, les Teinturiers ont raison de s'en tenir à cette derniere, dont j'ai parlé (43).

78. Le Rocou, Roucou ou Orléane, que quelques-uns nomment improprement Rocourt ou Raucourt, est une pâte seche, faite des graines d'un arbre que cultivent dans l'Amérique les diverses Colonies Européennes qui y sont établies. Cette drogue est en tablettes ou en boules, d'une odeur d'Iris ou de Violette, très-seches, très-hautes en couleur, d'un rouge ponceau, douces au toucher, sans aucune dureté, faciles à s'étendre, & jamais si dures qu'en les touchant un peu fortement, on ne puisse y laisser l'empreinte des doigts. C'est à ces marques qu'on reconnoît le Rocou véritable & pur, ainsi qu'à sa couleur intérieure dont on juge en rompant la tablette ou la boule, & qui doit être d'un rouge encore plus vif que le dehors. Pour éprouver la bon-

bonne ou mauvaiſe qualité du Rocou, on en fait diſſoudre un morceau dans un verre d'eau : s'il eſt pur, il ſe diſſoud entiérement; mais s'il eſt mêlé de terre ou de pierre, l'une ou l'autre tombe au fond du verre. On tire de cette drogue une couleur rouge, qui eſt plus chere & moins aſſurée que celle qui eſt faite avec la Bourre de chevre : on en employe cependant pour les couleurs d'orange.

79. Le Rodoul eſt un petit arbriſſeau, dont les feuilles ſervent à teindre en noir. Pour les conſerver, il faut les cueillir mûres; ce qui n'eſt pas néceſſaire, ſi elles ſont employées auſſitôt ou peu après avoir été cueillies. Il eſt défendu d'employer dans la teinture de vieux Rodoul, c'eſt à dire du Rodoul avec lequel on a mis en couleur du maroquin ou d'autres cuirs. Cette plante croît ſans culture dans pluſieurs provinces de France, & elle eſt du nombre des poiſons.

80. Le Ronas eſt une racine à peu près groſſe comme la Régliſſe, courant comme elle dans la terre, & coupée en morceaux de la longueur de la main. Elle ſe trouve dans l'Arménie, & donne une teinture rouge ſi forte & ſi vive, qu'elle dure plus, pour ainſi dire, que l'étoffe même; ſa vivacité augmentant à meſure qu'elle vieillit. C'eſt du ſuc de cette racine que ſont peintes ces belles toiles de l'Orient qu'on nomme véritables Perſes, auſſi bien que celles qui ſe font dans les Etats du Mogol; les ſujets de ce Prince tirant tous les ans du Ronas de Perſe pour de grandes ſommes : mais on ne s'en ſert point en Europe.

81. La Rupiedſie eſt une drogue fort en uſage dans la Chine pour teindre en noir : mais les Teinturiers d'Europe ne s'en ſervent point.

82. Le Ruynas ou Soliman-Doſtyn eſt une racine excellente pour la teinture; elle ſe trouve dans quelques provinces de Perſe, particuliérement dans le Servan & aux environs de Tauris, d'où l'on en envoye annuellement aux Indes environ 500 quintaux qui ſont employés à peindre des toiles de coton; mais on n'en uſe point en Europe.

83. Le Safran bâtard, autrement Safran-bourg, Carthame & Safranum, eſt la fleur d'une plante fort commune en Provence & aux

environs de Strasbourg en Alsace, aussi-bien qu'en Egypte, où elle croît sur le bord du Nil aux environs du Caire, d'où elle est envoyée toute préparée à Alexandrie & de là en Europe, où les Teinturiers en soie en employent beaucoup pour les couleurs rouges vives. La préparation qu'on lui donne est de la faire passer au moulin où de rouge & jaune qu'elle étoit sur la plante, comme celle du Safran-bourg de Provence & d'Alsace, elle devient toute rouge; on la met ensuite dans l'eau, d'où la retirant on la fait sécher à l'ombre, le soleil lui étant contraire. Le Safran-bourg de Provence & d'Alsace est quelquefois employé pour faire la couleur que l'on nomme Nacarat de bourre, mais la teinte en est fausse, & le Nacarat se peut faire avec la Bourre de chevre beaucoup mieux & à moins de fraix. Cependant comme cette plante peut servir à d'autres usages, il est bon de la cultiver avec soin.

84. Le *Salpêtre* ou *Sel nitre* est une drogue non-colorante, fort connue. Le meilleur Salpêtre pour la Teinture, est celui qui est bien dégraissé, blanc, sec & le moins chargé de sel.

85. La Sarrette, Sereth, Sereque ou Orisel, est une plante qui croît en plusieurs lieux de France, & qui pour se conserver doit être cueillie très-mûre, ce qui n'est pas si nécessaire quand on l'employe sur le champ. Elle tire son origine des Isles Canaries, mais elle s'est naturalisée en France, où l'on en cultive beaucoup. Ses feuilles, quoique très-vertes, servent à teindre en jaune, d'où vient que les Teinturiers François la nomment communément Herbe à jaunir. Cependant elle ne fait pas une si belle couleur que la Gaude; & ainsi il ne faudroit l'employer que pour les verds, les feuille-mortes & autres couleurs composées, où entre le jaune: elle peut aussi servir pour la teinture jaune des couvertures de laine les plus grossieres & des étoffes d'un très-bas prix.

86. Le *Savon* est de deux especes; l'un dur & sec, blanc ou marbré; l'autre moû & liquide, verd ou noir. Les Teinturiers ne se servent que des savons de la premiere espece, dont les plus estimés & les meilleurs se tirent d'Alicante & de Carthagene en Espagne, de Gayet-

Gayette en Italie, de Marseille & de Toulon en France; les bonnes huiles d'olive & la soude avec lesquelles ces savons sont faits contribuant beaucoup à leur bonté.

87. Le *Sel Armoniac* est un sel artificiel qu'on a tiré, par le moyen des vaisseaux sublimatoires, de toutes sortes d'urines d'hommes & d'animaux, où l'on a mêlé du sel commun & de la suye de cheminée. Les Teinturiers le font venir de Venise & de Hollande, en masses de diverses couleurs faites en forme de couvercles de pot; mais ils préferent celui qui est en pains de sucre, blancs, clairs, transparens, secs, sans crasse, & dans lesquels, après les avoir rompus, il paroît comme des aiguilles.

88. Le *Sel Gemme*, ou *Sel minéral*, est un sel terrestre & fossile dont il y a des mines très-abondantes en Pologne, en Hongrie & en Catalogne. Ce sel est en gros morceaux clairs & transparens, faciles à se rompre, & qui étant rompus, se mettent en petits grains quarrés.

89. Le *Sel Marin*, qui se fait d'eau de mer que l'air & le soleil épaississent & cristalisent, est de deux sortes, le gris & le blanc. La France fournit de l'un & de l'autre en abondance; & les Teinturiers les employent indifféremment, pourvu que le blanc n'ait été ni cuit ni raffiné au feu.

90. La *Soude* est une espece de pierre grise, très-poreuse & lixiviale, ce qui la rend propre non seulement à la teinture, mais encore à la composition du Savon blanc & marbré, & au blanchissage du linge. Elle se fait avec une plante qui croît en Espagne sur le bord de la mer, qu'on y seme tous les ans, & qu'on coupe comme le foin. Lorsque cette plante est seche, on en remplit de grandes fosses en terre, on y met le feu, on couvre cette herbe; étant réduite en cendre & humectée d'eau de mer, il s'en forme après quelque tems une pierre si dure, qu'on est obligé pour l'employer, de la rompre avec des marteaux. Elle vient d'Alicante & de Carthagene: la premiere est la meilleure. Elle doit être seche, sonnante, d'un gris bleuâtre en-dedans, percée en-dehors de petits trous en forme d'œil de perdrix, &

étant

étant mouillée elle ne doit pas sentir un goût marécageux: il faut surtout rejetter celle qui est mêlée d'autres pierres, & couverte d'une croûte verdâtre. La Soude de Carthagene n'est jamais si bleue que celle d'Alicante; elle a de plus petits trous, est plus couverte de cette croûte verdâtre, & vient aussi dans des balles plus grosses.

91. Le *Souphre*, dont on se sert pour blanchir les soies, les laines & les étoffes qui en sont faites, est du Souphre commun ou du Souphre en canon, ainsi nommé à cause de sa forme, étant en espece de billes ou de bâtons ronds. Il est plus ou moins bon suivant l'affinage d'où il vient. Celui de Hollande étoit autrefois préféré à ceux de Venise & de Marseille: mais aujourd'hui ce dernier est autant estimé pour le moins que les deux autres. Il doit être en canons gros & longs, d'un jaune doré, leger, facile à rompre, & qui cassé paroisse brillant & comme cristallisé.

92. Le *Sublimé* est une préparation chymique, dont le vif-argent est la base. Il en vient de Hollande, de Venise & de Smyrne, outre celui que tous les Chymistes des autres Nations font aussi. C'est un des plus violens poisons: il doit être bien blanc, très-brillant, leger & compact. Celui de Smyrne est le plus pesant, & par cette raison le moins bon de tous.

93. Le Sumac, autrement, Rou, Roure ou Roux, en Latin Rhus, est un arbrisseau assez semblable au petit Cormier; ses feuilles sont oblongues, pointues, velues & dentelées; ses fleurs sont ramassées en grappe, de couleur rouge & ressemblantes aux roses de jardins; son fruit est une espece de petit raisin rouge d'une qualité très-astringente; sa semence est presque ovale & renfermée dans des capsules de même figure. Cet arbrisseau croît en abondance dans le pays de Vôges vers la Lorraine, & dans plusieurs provinces de France, aussi-bien qu'en Portugal. On pile dans un mortier ses feuilles & ses jeunes branches pour en faire la drogue que l'on appelle Sumac, & qui est également propre à l'apprêt des maroquins noirs & à la teinture de cou-

couleur verte: mais les Teinturiers ne doivent point employer le vieux Sumac, c'est à dire celui qui a déja servi à passer les peaux.

94. Le Tamaris est un arbre de moyenne grandeur, qui croît en Languedoc, dont les feuilles sont petites, & le fruit en façon de grappe, d'une couleur tirant sur le noir. C'est de ce fruit que les Teinturiers se servent au défaut de Noix de Galle, pour teindre en noir.

95. Le *Tartre*, autrement *Graine de tonneau* & *Gravelle*, est une croûte qui se forme au dedans des tonneaux où il y a du vin, dont il emprunte la couleur. Le Tartre blanc est préférable au rouge; & le meilleur est celui qui se tire de ces gros foudres de Vin de Rhin, parce qu'il est plus épais, facile à casser, brillant & peu terreux; toutes qualités que n'ont qu'imparfaitement ceux de Montpellier & de Lyon dont on se sert communément en France: c'est ce dernier qu'on appelle vulgairement Gravelle. Mais il faut observer en général que l'emploi bien ou mal fait de cette drogue dans les bains ou bouillons, met une grande différence dans les teintures.

96. La Terra-merita, autrement Cucurma, Coucourme, ou Souchet des Indes, est une racine dont les Teinturiers se servent pour teindre en jaune. Elle est jaunâtre en dehors & en dedans, dure & comme pétrifiée, presque semblable en figure & en grosseur au Gingembre: elle est apportée de l'Isle de Madagascar située au Midi de l'Afrique. Cette drogue ne fait pas un jaune aussi assuré que celui de la Gaude: mais il n'y en a point de plus propre pour jaunir, éclaircir ou faire approcher du nacarat les couleurs rouges. Pour que cette racine soit bonne, elle doit être grosse, résineuse, difficile à rompre, pesante, nouvelle, ou du moins non vermoulue ni pourrie. On reconnoît celle qui est vieille en ce qu'elle est brune, & que réduite en poudre elle paroît plus rouge que la nouvelle.

97. Le Tournesol, Maurelle, ou Ricinoïdes des Botanistes, est une plante qui croît en divers endroits du Languedoc. Sa racine est blanche, ronde & ordinairement assez droite. Elle pousse une tige ron-

ronde qui se divise en plusieurs branches. Ses feuilles sont d'un verd-clair, tirant beaucoup sur le cendré: ses fleurs sont de couleur jaune, renfermées dans de petits boutons en forme de grape. Elles sont de deux sortes; les unes stériles qui sechent à mesure que la grape croît, & les autres fécondes qui produisent le fruit. Le plus grand usage de cette plante est pour la Teinture, & l'on tire de son suc la couleur, dont avec quelque préparation on compose en France, dans les lieux même où elle naît, ce qu'on appelle Tournesol en drapeaux. Voici la maniere dont on le prépare: on cueille dans la campagne au commencement du mois d'Août les sommités de cette plante; & les ayant écrasées avec des meules semblables à celles dont on se sert pour écraser les noix & les olives dont on veut tirer de l'huile, on les met dans des especes de cabas pour en exprimer le suc avec des presses. On expose ce suc au soleil l'espace d'une heure ou environ pour le dépurer; puis on y trempe des chiffons & on les étend à l'air; quand ils sont bien secs, on les humecte à la vapeur de 8 ou 10 livres de chaux vive éteinte dans une suffisante quantité d'urine. On les remet sécher au soleil, pour les tremper une seconde fois dans le suc du Tournesol; & lorsqu'ils sont secs derechef, ils se trouvent dans leur état de perfection, & propres à être envoyés en différens endroits de l'Europe où il s'en fait un commerce assez considérable, soit pour colorer les vins & autres liqueurs, soit pour teindre les étoffes en une sorte de rouge.

98. Le Trentanel est une plante qui sert dans la Teinture à faire la couleur fauve & ses nuances: mais elle n'est bonne que pour les étoffes grossieres & du plus bas prix. L'odeur de cette plante est très-forte. C'est une espece de Thymecœa ou de Garouille; on la tire de Provence & de Languedoc.

99. Le Vahats est une racine dont on leve l'écorce qui seule est propre à la Teinture. Pour s'en servir, on en réduit une partie en cendre, dont on fait une lessive dans laquelle on met bouillir les étoffes, qu'on teind ensuite avec l'autre partie d'écorce qu'on a réservée. Mais il faut prendre garde de ne pas donner au bouillon de ces étoffes

un

un feu trop vif. La teinture que produit cette drogue est un beau rouge couleur de feu, ou un jaune éclatant si l'on y ajoute un peu de jus de citron. Le Vahats croît dans l'Isle de Madagascar.

100. Le Velani ou Avelanede n'est autre chose que l'enveloppe du gland de chêne, c'est à dire cette petite coque en forme de calice auquel tient la queue du fruit, & qui est orné d'une espece de ciselure naturelle. Quoiqu'il y ait des forêts de chêne en Europe, on ne laisse pas de tirer beaucoup de Velani de Smyrne, mais il n'y a gueres que les Italiens qui s'en servent, soit pour teindre soit pour passer les cuirs.

101. Le Verdet ou Verd de gris est une rouille verte que l'on tire du cuivre rouge, en mettant dans des pots de terre des lames très-minces de ce métal & des raffes ou grapes de raisin, déja pressurées, qu'on y range par lits & qu'on a imbibées d'un vin fort, tel que le clairet de Languedoc & du Rhône. On conserve ces pots à la cave, d'où on les tire de tems en tems pour enlever le Verdet qui couvre les plaques de cuivre. Cette drogue est apportée de Languedoc, en poudre & en pains du poids de 25 livres. On ne voit gueres de Verdet tout à fait pur. Pour être bon, il faut qu'il soit sec, d'un verd foncé, & peu rempli de taches blanches. Les Teinturiers en font une très-grande consommation tant pour les verds céladons & les couleurs de souphre que pour le noir. Cette drogue est un poison.

102. Le Vouede ou Voide est une espece de Pastel que l'on cultive en Normandie, & dont on tire par expression le suc, appellé Fleurée, qui sert comme le Pastel à teindre en bleu, mais qui ne produit pas chaque année autant de récoltes que lui: sa préparation exige que son suc ne soit que médiocrement mouillé. Pour s'en servir, on le mêle avec le Pastel & l'Indigo, étant moins bon que le premier & meilleur que le second.

103. L'*Urine* dont les Teinturiers se servent, est l'Urine humaine. Elle aide à mettre le Pastel en fermentation & en chaleur: on la substitue à la chaux dans les cuves de bleu. Quelques - uns l'employent encore pour dégraisser les laines & les ouvrages qui en sont

faits: mais ce dégraiſſage eſt très-mauvais, & ne doit ſe faire qu'avec du ſavon ou de la terre bien préparée.

En finiſſant cette explication des Drogues de la Teinture, je dois obſerver qu'il y a parmi elles un certain nombre de plantes qui me paroiſſent pouvoir être naturaliſées dans les Etats du Roi; tels ſont le fénugrec, le fouic, le fuſtel, la garance (*), le garou & le trentanel, la gaude, la geneſtrole, la courge, la malherbe, le nerprun, l'orcanette, le paſtel & le vouede, le pizacanta, le redon, le rodoul, le rouvre, le ſafran bâtard, la ſarrette, le ſumac, le tamaris, le ricinoïdes ou le tourneſol des Teinturiers, &c. &c.

Il s'agit à préſent de décrire l'uſage des drogues dont on ſe ſert dans la Teinture, c'eſt à dire de marquer le mêlange qui s'en fait pour compoſer chaque couleur. Mais, comme l'uſage des drogues varie ſelon les matieres qui doivent être teintes, je diviſerai ces matieres en cinq Articles.

Le premier, de la teinture des étoffes de laine qui ont des liſieres, & des laines ſervant à les fabriquer.

Le ſecond, de la teinture des laines fines, deſtinées à faire des tapiſſeries tant au métier qu'à l'aiguille.

Le troiſiéme, de la teinture de la ſoie, & des étoffes & autres ouvrages qui en ſont faits.

Le quatriéme, de la teinture des petites étoffes de laine ſans liſieres, & des laines ſervant à fabriquer ces petites étoffes & autres ouvrages.

Le cinquiéme, de la teinture du fil & du coton, & des toiles & autres ouvrages qui en ſont fabriqués.

Les différentes teintures des laines ſont partagées entre deux claſſes d'ouvriers, dont l'une eſt celle des Teinturiers du grand teint, & l'autre eſt celle des Teinturiers du petit teint. Les Teinturiers en ſoie ſont de la premiere claſſe, moyennant qu'ils renoncent à la teintu-

re

(*) On en cultive depuis longtems en Siléſie, & le débit s'en eſt étendu juſqu'à Amſterdam.

re de la soie pour exercer celle de grand teint en laine; mais tant qu'ils restent à la soie, ils forment une classe séparée.

ARTICLE PREMIER.

De la Teinture des étoffes de laine avec lisieres, & des laines servant à les fabriquer.

1. Avant de mettre à la Teinture les étoffes de laine, il faut les avoir suffisamment dégraissées & dégorgées, même deux fois si elles ont été blanchies avec du souphre ou de la céruse, qui empêcheroit la couleur de pénétrer ou d'être unie & égale.

2. Il faut pareillement que chaque piece d'étoffe soit lisée pour les couleurs qui l'exigent, comme je le dirai plus bas (10 & 18). Cette formalité se fait en attachant, avec du gros fil ou de la menue ficelle, de petites cordes de la grosseur du bout du petit doigt le long de la piece, entre l'étoffe & la lisiere, afin que la partie qui en a été couverte, ne puisse pas prendre la teinture, & qu'elle conserve toujours son pied ou son premier fond, ce qui fait connoître la bonne teinture de l'étoffe.

3. L'écarlate rouge, communément appellée écarlate de Venise, est teinte avec la graine d'écarlate, sans aucun mélange de bresil.

4. L'écarlate ordinaire, ou couleur de feu, est teinte de pure cochenille mesteque, avec de l'eau forte, sel ammoniac, étain fin & amidon, sans aucun mélange de terra-merita ni de cochenille sylvestre.

5. Les demi-écarlates ordinaires, ou couleur de feu, sont teintes de même, excepté qu'on y ajoute la garance, ou la cochenille sylvestre.

6. Les demi-écarlates rouges, ou de Venise, sont teintes avec le Kermès ou écarlate & la garance, sans aucun mélange de bresil.

7. Les rouges de garance sont bouillis avec les eaux sures, l'alun & le tartre, & garancés de garance grape, sans mélange de bresil, ni d'autre bois de teinture.

N 3 8. Les



8. Les cramoisis, après avoir été bouillis avec l'alun & le tartre, sont teints en pure cochenille mesteque, & rabattus avec un bain de sel ammoniac & de cendre potasse. Rabattre une couleur, c'est la diminuer quand elle est trop vive.

9. Les violets, pourpres, amarantes & autres couleurs semblables, sont premiérement guédés, c'est à dire teints en bleu avec le pastel, le vouede ou l'indigo, & ensuite bouillis dans l'alun & le tartre, & passés en cochenille, sans aucun mêlange de bois d'inde ni d'orseille.

10. Les violets, pensées & pourpres, sont les couleurs qui doivent être litées (voyez plus haut 2); on met le liteau après que les draps ont été guédés, pour servir de preuve qu'ils l'ont été également dans toute la longueur de la piece. On lite aussi d'autres couleurs, comme verds, écarlates, &c. lorsque les fabriquans le souhaitent pour l'ornement de leurs draps.

11. Les Teinturiers pour teindre toutes ces couleurs de grand & bon teint ne peuvent se servir des nacarats de bourre, ni des autres couleurs qui se tirent de la bourre garancée.

12. Ils doivent laisser une rose à toutes les étoffes qu'ils teignent des couleurs énoncées ci-dessus (9 & 10), & de toutes les autres qui reçoivent d'abord un pied différent de la couleur qu'elles ont après être achevées; & la partie de l'étoffe où se trouve cette rose ne doit pas recevoir un pied différent de celui qui est donné au reste de l'étoffe.

13. Les gris bruns, minimes, tannés, sont guédés, bouillis, garancés & brunis: les Teinturiers peuvent employer à ces sortes de couleurs la racine de noyer & les vieux bains de cochenille.

14. Le gris de perle, de castor, de souris, & autres gris clairs, tant en laine qu'en étoffe, sont faits avec la noix de galle, la couperose, & tous les autres ingrédiens du bon teint, suivant la nuance.

15. Les couleurs de roi & de prince sont guédées, ensuite bouillies & garancées, tant en laine qu'en étoffe, & l'on y laisse une rose pour

pour faire connoître s'il a été donné un pied de bleu convenable; sans que le bois d'inde y puisse être employé.

16. Les bleus de toutes nuances sont faits de pure cuve de pastel, de vouede ou d'indigo, sans aucun mêlange de bois d'inde ni d'orseille.

17. Le Teinturier employe dans les cuves de pastel ou de vouede la quantité d'indigo qu'il juge nécessaire, soit en les posant soit en les réchauffant.

18. Les verds de toute espece peuvent être lités, si les fabriquans le jugent à propos; & le Teinturier doit y laisser deux roses à chaque bout, savoir, une bleue & une jaune.

19. Il doit laisser aussi deux roses à chaque bout d'étoffes teintes des couleurs suivantes: savoir le violet, une rose de guede & l'autre de cochenille; le tanné ou amarante, une de bleu & l'autre de garance; la feuille-morte, une de jaune & l'autre de fauve.

20. Tous les verds sont d'abord passés en cuve de pastel, de vouede ou d'indigo, ainsi qu'il est dit pour les bleus (16); ensuite ils sont bouillis avec l'alun & le tartre; puis jaunis avec la gaude, la sarrette, la genestrole, le fenugrec ou le bois jaune, suivant la nuance, sans aucun mêlange de bois d'inde ni d'autre ingrédient de pareille espece.

21. Le Teinturier peut cependant passer d'abord l'étoffe en gaude, avant que de la mettre en bleu, pour les verds dont la nuance seroit trop difficile à faire autrement, en mettant toutefois les roses mentionnées ci-dessus (18).

22. Les jaunes de toutes nuances & couleurs sont bouillis avec l'alun & le tartre, & teints avec la gaude, la sarrette, la genestrole, le fenugrec, ou le bois jaune.

23. Les fauves ou couleurs de racine, pour les étoffes au dessus du plus bas prix, sont teints par les Teinturiers du grand & bon teint, qui doivent se servir de racine de noyer, ou de brou de noix, sans pouvoir y employer le bidauct ou la suie de cheminée.

24. Les

24. Les étoffes destinées à être teintes en noir, lesquelles par leur qualité doivent être guédées, sont premiérement mises en bleu de cuve, puis après avoir été bien lavées en eau claire, & dégorgées au foulon, elles sont remises par le Teinturier du grand & bon teint, entre les mains de celui du petit teint pour être noircies & achevées; & ce dernier en les noircissant, laisse à chaque bout de la piece une rose bleue, afin qu'on puisse juger si l'étoffe a eu le pied qu'elle devoit avoir.

25. Après que les étoffes ci-dessus ont été guédées, les fabriquans peuvent les faire garancer par le Teinturier du grand teint, s'ils le jugent à propos, soit pour la beauté ou pour la bonté des couleurs.

26. Dans les villes où il n'y a pas un nombre suffisant de Teinturiers du petit teint, pour noircir les étoffes guédées, & où par quelqu'autre raison l'on ne pourroit faire passer les étoffes guédées des mains du Teinturier du grand teint, pour les noircir; le Teinturier du grand teint obtient la permission d'achever les noirs qu'il a guédés.

27. On ne teind point une étoffe de blanc en noir, & on n'y met point des roses bleues sans que le fond ait été guédé.

28. Les draps noirs d'un prix médiocre n'ont le pied que de bleu turquin, au lieu de bleu pers qu'ont ceux d'un plus haut prix; & ceux du plus bas prix ne l'ont que de bleu céleste. D'ailleurs, on ne doit pas donner à la rose une couleur plus foncée que celle du fond de l'étoffe.

29. Tous les gris, qui sont une nuance dérivée du noir, se font avec la noix de galle & la couperose, & ceux qui tirent sur le gris d'ardoise, le gris lavandé, ou le gris de ramier, doivent avoir un pied de cuve de cochenille ou de garance, sans aucun mêlange de bois d'inde.

30. Lorsqu'une étoffe de couleur tachée, flambée ou autrement gâtée, est destinée à être mise en noir, elle reçoit le pied de guede par le Teinturier du grand teint, qui laisse à chaque bout une rose de la couleur qu'elle avoit avant que d'être guédée; & le Teinturier du petit

rit teint à qui l'étoffe est donnée pour la noircir, doit non seulement conserver ces roses, mais en ajouter même deux autres de la couleur qu'avoit l'étoffe en sortant du guede: ce qui s'observe également pour les draps appellés *chats*, qui sont fabriqués avec les restes des chaînes & des trames des autres draps de couleur.

31. Il n'y a que les étamines à voile & autres petites étoffes qui ne passent point au foulon, qu'on teigne de blanc; mais on leur donne auparavant un bain de racine de noyer, dont il reste une rose à chaque bout de l'étoffe, afin qu'on puisse juger s'il a été donné d'une hauteur convenable.

32. Les Teinturiers du grand teint font, concurremment avec ceux du petit teint, ces teintures de blanc en noir, sur un bain de racine très-foncé, pour certaines petites étoffes qui ne vont au foulon que pour être dégraissées & dégorgées.

33. L'avivage qui est une sorte de teinture ou d'apprêt fait avec le bois d'inde, ne se donne point aux étoffes dont la chaîne & la trame sont de laine brune ou de toute autre couleur que la noire.

34. Les drogues qui sont interdites aux Teinturiers du grand & bon teint, pour la teinture des étoffes & laines énoncées dans cet article, sont les bois d'inde & de campêche, de bresil, de sainte-marthe, de fernambouc, de japon, de sandal, de fustet, & autres bois de teinture excepté le bois jaune & le cariatour; le tournesol, la terra-merita, l'orseille, le safran bâtard, le rocou, la teinture de bourre, le bidauct ou la suie de cheminée, & la graine d'avignon.

ARTICLE SECOND.

De la Teinture des laines fines, destinées à faire des tapisseries tant au métier qu'à l'aiguille.

1. C'est au seul Teinturier du grand teint qu'il appartient de teindre les laines fines dont il s'agit dans cet Article; & il doit les teindre de bon teint, & non pas en teinture communément appellée *demi-fin*.

 2. L'é-

2. L'écarlate rouge doit se teindre de graine d'écarlate, & de vermillon, ou pastel d'écarlate, & on y peut mêler de l'agaric ou de l'arsenic.

3. On employe la même graine de kermès ou d'écarlate avec l'alun & le tartre dans la teinture des laines fines qui servent à faire les carnations foncées.

4. On fait avec la même graine de kermès, la teinture des laines fines en écarlate foncée; ainsi qu'en pourpre & maron, en les passant ensuite sur la cuve d'inde, ou les y ayant passées auparavant.

5. La même graine de kermès est aussi employée pour faire les gris vineux, gris plombé, gris ardoisé, & gris lavandé, en donnant un petit pied de cuve, & rabattant ensuite avec le brou de noix, ou la racine de noyer, s'il est besoin.

6. L'écarlate incarnate cramoisie est teinte avec cochenille mesteque & eau forte, sel armoniac, sublimé & esprit de vin, pour donner le bel œil & le lustre.

7. Les écarlates violettes, amarante, rose seche, pensée, gris de lin, passe-velours, gris brun, sur-brun & autres, le tout cramoisi, sont teints de guede ou pastel, avec cochenille mesteque, sans mélange de bois d'inde, bresil, orseille, ni autres ingrédiens de pareille qualité qui ne font que de fausses teintures.

8. Les gris bruns, minimes & tannés, doivent être de guede plus clair que dans la teinture noire, bouilli un peu plus fort avec l'alun & la gravelle ou le tartre, & être garancés d'avantage qu'au noir, afin que la couleur en soit plus belle. On y ajoute pour les minimes de la garance non robée. De plus, en cas que la garance commune soit trop obscure, on les brunit aussi moins que le noir, & seulement pour leur donner un bel œil. A l'égard des tannés, on leur donne une passe de cochenille; & on ne teind aucun des minimes avec de la racine de noyer brunie sur le noir, attendu que c'est une fausse teinture.

9. Les

9. Les gris de perle, de castor & autres couleurs que celles ci-dessus, se font avec la noix de galle & la couperose; & quelques-uns sont commencés avec très-peu de racine de noyer, & achevés avec la galle & la couperose; & pour les rendre de meilleur service, ils sont repassés sur des restes de bains de cochenille les plus foibles.

10. Les couleurs de roi & de prince sont guédées & garancées comme les noires.

11. Les rouges ordinaires, appellés rouges de garance, sont teints avec la garance pure, sans mêlange de bois de bresil, ni d'autres pareils ingrédiens.

12. Les rouges cramoisis, incarnats de rose, couleur de chair, fiamet, fleurs de pêcher & de pommier, & de toutes les autres couleurs cramoisies, sont teints, suivant leurs nuances, de pure cochenille mesteque, sans mêlange de garance, bourre ni autres ingrédiens; si ce n'est qu'à l'égard du rouge cramoisi, il est préparé avec l'alun de roche ou de rome, & achevé avec la cochenille; & qu'aux couleurs de fleurs de pommier & de pêcher, on donne un très-leger rabat avec un peu de galle & de couperose, afin de donner à ces couleurs un bel œil qui pour être parfait, doit être un peu violant.

13. Les orangés, isabelle, aurore, gingeolin, jaune doré, couleur de tuile & de chamois, & pelure d'oignon, sont teints, suivant leurs nuances, de gaude & de garance.

14. Les feuille-mortes, couleur de cheveux, couleurs de musc, de noisette, de canelle & autres semblables, sont aussi teints avec gaude & garance.

15. Les bleus bruns sont faits les premiers & dans la force du pastel; & les plus clairs se font en diminuant, à mesure que le pastel s'affoiblit dans le travail.

16. Les jaunes pâles, citrons & souphres sont teints avec gaude.

17. Les verds-herbus, verds-gais, verds-naissans, verds-jaunes, & verds-bruns, sont guédés & achevés de gaude, qui ne se

donne qu'après le guede, parce que le pied & le fond du bleu rend la laine de plus long usage que celui du jaune.

18. Les céladons & verds de mer sont aussi guédés avant qu'on leur donne la gaude, & il n'est pas besoin de les passer sur le noir: on ne doit point employer à ces couleurs, non plus qu'aux autres verds, du bois d'inde tant au bouillon qu'après qu'ils sont gaudés; ni les brunir sur le bois d'inde avec du verdet, ou sur le bain restant des noirs.

19. Les couleurs d'olive, depuis les plus brunes jusqu'aux plus claires, étant passées en couleur verte, se rabattent avec le bidauct ou la suie de cheminée; & ce rabat se donne selon l'œil qu'il leur faut, ou plus clair ou plus brun.

20. Les Teinturiers de laines fines se servent de cuve d'inde ou de celle de pastel, à leur choix, pour la teinture des laines en bleu, verd & autres couleurs qui demandent un pied ou une nuance de bleu; & se servant de la cuve de pastel, ils y employent la quantité d'indigo qu'ils jugent à propos.

21. Ces Teinturiers ont chez eux des bois d'inde & de campêche pour les employer aux teintures de laines fines en noir, pourpre, maron, pruneau & rouges bruns presque noirs; mais ils n'en doivent point mettre dans les teintures en bleu, verd, violet, ni ailleurs que dans les nuances les plus brunes des couleurs énoncées dans ce paragraphe 21.

22. Ils ne teignent les laines fines en noir qu'après leur avoir donné le pied de bleu le plus foncé qu'il est possible; ensuite ils leur donnent le rabat de galle alépine & de couperose, sans y mettre de la moulée.

23. Les drogues qui leur sont interdites dans quelque couleur que ce soit, sont le bois de bresil, la fonte de bourre, le rocou, le safran, le fustet & l'orseille de terre; mais ils employent l'orseille d'herbe ou des canaries dans la teinture des laines fines en violet, après leur avoir donné le pied de cuve & de cochenille suffisant.

AR-

ARTICLE TROISIEME.

De la Teinture de la ſoie & des étoffes qui en ſont faites.

1. Comme le luſtre de la ſoie en eſt la principale qualité, & qu'il eſt important qu'elle l'ait en perfection, ce qui dépend particuliérement de la bien décreuſer; cette premiere façon conſiſte de la part du Teinturier, à faire bien & duëment cuire la ſoie avec du bon ſavon blanc, dont il la dégorge après en la battant & lavant à la riviere; enſuite il la met dans un bain d'alun de rome tout à froid & non à chaud, attendu que la chaleur dans l'alun fait perdre le luſtre à la ſoie & en même tems la rend rude & âpre.

2. Le ſavon noir n'eſt pas propre pour le décreuſement de la ſoie.

3. Les ſoies qu'on doit teindre en cramoiſi étant bien dégorgées de leur ſavon, on les alune fortement; puis on les lave derechef & on les bat pour les dégorger de leur alun: enſuite elles ſont miſes dans un bain de cochenille, chacune ſelon ſa couleur, en la maniere qui va être expliquée.

4. Les rouges & écarlates cramoiſies ſont faites de pure cochenille meſteque, y ajoutant la galle alépine, la terra-merita, l'arſenic & le tartre, le tout mis enſemble dans une chaudiere pleine d'eau claire, preſque bouillante, avec la ſoie décreuſée, pour y bouillir continuellement l'eſpace d'une heure & demie, après quoi on enleve la ſoie & l'on ôte le feu de deſſous la chaudiere: la ſoie étant réfroidie par l'évent qu'on lui a fait prendre, elle eſt rejettée dans le reſte du bain de cochenille & miſe à fond pour y demeurer juſqu'au lendemain, ſans y mêler avant ou après, du breſil, de l'orſeille, du rocou, ni d'autres ingrédiens.

5. Les ſoies violettes-cramoiſies ſont préparées comme il vient d'être dit, & teintes de pure cochenille avec la galle alépine (plus modérément qu'au rouge), l'arſenic & le tartre, puis bouillies comme les

les autres ci-dessus, ensuite bien lavées & passées dans une bonne cuve d'inde ayant toute sa force, & sans aucun autre ingrédient.

6. Les canelles ou tannés cramoisis sont faits comme les violets ci-dessus: s'ils sont trop clairs, on les rabat avec la couperose; & s'ils sont trop brunis & violets, on les passe sur une cuve d'inde médiocre, sans mélange d'autres ingrédiens.

7. Les bleus pâles, & beaux bleus, sont teints de pure cuve d'inde.

8. Les bleus célestes ou complets ont le pied d'orseille de Lyon, autant que la couleur le requiert, puis ils sont passés sur une bonne cuve d'inde comme les précédens.

9. Les gris de lin silvie ou aubifoins sont faits d'orseille de Lyon ou de Flandres, puis rabattus avec un peu de cuve d'inde s'il en est besoin, ou avec de la cendre gravelée.

10. Les citrons sont alunés, puis teints de gaude, avec un peu de cuve d'inde.

11. Les jaunes de graine sont alunés, plus forts de gaude & même couverts avec un peu de bain de rocou, suivant la couleur.

12. Les jaunes pâles sont alunés & teints de gaude seule.

13. Les aurores pâles & bruns sont alunés, puis gaudés fortement, & ensuite rabattus avec le rocou, qui se prépare & se dissoud avec de la cendre gravelée, de la potasse ou de la soude.

14. Les isabelles pâles & dorés sont teints avec un peu de rocou préparé comme ci-dessus, & sur le feu.

15. Les orangés sont teints sur le feu, de pur rocou préparé de la même maniere, & les orangés bruns sont ensuite alunés & mis dans un petit bain de bresil, s'il en est besoin.

16. Les couleurs de feu que l'on appelle *ratines*, ont le même pied de rocou que les orangés; puis on les alune, & on leur donne un bain ou deux de bresil, suivant la couleur.

17. Les

17. Les écarlates ou rouges rancés n'ont de pied de rocou que la moitié de ce que l'on donne aux orangés; ensuite on les alune, & après on leur donne deux bains de bresil.

18. Les céladons, verds de pomme, verds de mer, verds naissans, & verds gais, sont alunés, puis jaunis avec gaude ou sarrette, suivant la nuance, & ensuite passés sur la cuve d'inde.

19. Les verds bruns, après avoir reçu les mêmes apprêts, sont rabattus avec le verd & le bois d'inde.

20. Les feuille-mortes sont alunés, puis teints avec la gaude & le fustet, & rabattus avec la couperose.

21. Les couleurs d'olive & verds roux sont alunés, teints de gaude & de fustet, puis rabattus avec le bois d'inde & la couperose.

22. Les rouges incarnats & couleurs de rose sont alunés & faits de pur bresil.

23. Les couleurs de canelle & de rose séche sont alunés & faits de bresil & de bois d'inde.

24. Le gris violant est aluné & fait de bois d'inde.

25. Les violets sont montés de bresil, de bois d'inde, ou d'orseille, puis passés sur la cuve d'inde.

26. Les gris plombés sont tous faits de fustet, de gaude, ou de sarrette, de bois d'inde, d'eau de galle & de couperose.

27. Les muscs minimes, gris de maure, couleurs de roi & de prince, tristamie, noisette, & autres couleurs semblables, sont faits de fustet, de bresil, de bois d'inde & de couperose.

28. On ne donne aucune surcharge de galle dans toutes les couleurs ci-dessus, attendu que c'est une fausse teinture, & que cette surcharge appesantit les soies, ce qui causeroit une notable perte à ceux qui les achetent & les employent.

29. Les grosses soies qu'on veut mettre en noir doivent, après le décreusement fait avec du savon blanc, être bien lavées & torses, puis

puis mises en corde ou autour d'un bâton; ensuite on fait bouillir un bain de galle appellé vieille galle; une heure & demie après qu'il a bien bouilli, on y met la soie, & on l'y laisse l'espace d'un jour & demi ou de deux jours, puis on l'en retire, on la lave bien dans de l'eau claire, ensuite on la tord, on la met dans une chaudiere de galle neuve, où il n'y a de galle fine que la moitié du poids de la soie, qui y demeure un jour ou deux tout au plus, après quoi on la lave & on la tord de nouveau; de là on la passe sur la teinture noire, & on lui donne trois feux au plus: enfin, après l'avoir bien battue & bien lavée, on l'adoucit avec du savon blanc de bonne qualité, on la tord pour la derniere fois, & on la fait sécher.

30. Le Teinturier ne doit point passer les soies noires plus de deux fois dans la galle, ni les passer dans l'alun, ni donner aucun noir entre deux galles, ni mêler aucun noir avec les galles, le noir devant être donné sur de la galle blanche, ni faire aucun biscuit ni faux noir, attendu que ces fausses préparations brûlent & surchargent les soies: il lui est aussi défendu de passer dans la galle les soies couleur de tristamie, canelle, minime, pain bis, gris sale, feuille-morte, & généralement toutes sortes de couleurs, excepté le gris brun, qui doit être décreusé, puis lavé & tors, ensuite mis à froid dans une vieille galle, & après lavé & séché. Enfin le Teinturier ne doit pas non plus mettre de la moulée de taillandier dans quelque noir qu'il fasse.

31. Quant aux fines soies noires, on les décreuse, on les lave & on les tord comme les grosses soies noires; ensuite on fait bouillir pendant une heure de la galle neuve, dans laquelle on les met une seule fois; puis on les lave, on les tord, & on les passe sur le noir deux ou trois fois au plus; enfin les ayant bien lavées & adoucies avec de bon savon blanc, on les met sur des perches pour sécher.

32. Les gris noirs, qu'on appelle gris minimes, sont engallés comme le noir, & passés sur la teinture noire qu'en terme de Teinture on appelle un feu, parce qu'on ne la fait bouillir qu'une fois seulement.

33. A l'égard des ſoies fines organſinées, moulinées & apprêtées pour la fabrication des étoffes de ſoie, même les poils ou trames de quelque qualité que ce ſoit, les unes & les autres ſont teintes ſeulement avec des galles legeres, à raiſon de 4 onces ou 8 lots de galle fine pour chaque livre de ſoie, & ſans alun ni aucune autre ſurcharge.

34. Le Teinturier ne peut mettre dans le bain d'alun les ſoies blanches, ſans ſouphre, tant pour filer l'argent que pour faire d'autres ouvrages.

35. Il ne peut auſſi teindre aucune ſoie en noir, ni en couleur à demi-bain qu'on appelle *teïnt ſur le cru*, étant obligé de bien faire cuire & décreuſer toutes les ſoies ſans exception, ainſi qu'il a été dit ci-deſſus (1). Cependant, comme pour les petits velours à un poil, les crêpes ou crépons, gaſes & toiles de ſoie ſeulement, on a néceſſairement beſoin de ſoies teintes ſur le cru, on nomme tous les ans un des maîtres Teinturiers qui peut ſeul cette année-là teindre des ſoies ſur le cru, dont il tient regiſtre avec les noms de ceux qui les ont fait teindre, d'où l'on connoît ſi toutes ces ſoies ont été employées ſelon qu'elles devoient l'être.

36. Les Teinturiers en ſoie & en étoffes de ſoie ne peuvent teindre en petit teint aucune étoffe ou autre ouvrage appartenant aux Teinturiers du petit teint, ni ceux-ci teindre aucune ſoie ou étoffe de ſoie, attendu que cela n'appartient qu'aux Teinturiers du bon teint, du nombre deſquels ſont les Teinturiers en ſoie, quoiqu'ils faſſent une claſſe ſéparée, comme il a été dit plus haut dans une remarque qui précede l'Article premier, page 100.

Après ce que j'ai dit juſqu'à préſent, tant ſur la Teinture des Modernes en général, que ſur celle de la ſoie en particulier, le Lecteur ſera peut-être curieux de voir ici comment la même matiere a été traitée en vers dans le ſixiéme livre du *Bombyx*, revu & corrigé:

Le Teinturier d'abord ne connut point de loix,
Il mit tout à profit, ſans réſerve & ſans choix;

Mais



Mais bientôt l'imposture & l'infame avarice
Firent un lâche abus d'un trop libre exercice,
Et n'offrant pour bon teint qu'une fausse couleur
Osoient impunément en tripler la valeur.
Sur leurs pas ténébreux, jusqu'au sein de la France
L'aveugle barbarie amena l'ignorance:
On le sentit en vain, & l'artiste à regret
Des plus riches couleurs y perdit le secret.
Les Gobelins depuis, à leur patrie ingrate
Rendirent les premiers la brillante écarlate.
O siécle malheureux! leurs travaux commencés
Furent traités longtems de projets insensés.
Cependant leurs succès, détrompant le vulgaire,
Triompherent enfin d'un soupçon téméraire:
Leur nom aussi longtems vivra dans Saint Marceau
Que la Biévre à la Seine unira son ruisseau.
Kœch vint bientôt après: les bords de la Mer Noire
Des larcins qu'il y fit, ont perdu la mémoire:
Mais, si mes vers sont lûs, ses larcins oubliés
Seront, avec son nom, justement publiés.
Il fit de cent couleurs, par son adresse, éclore
Les secrets dérobés aux rives du Bosphore,
Et le premier lui-même apprit aux artisans
A teindre du Bombyx les durables présens.
Heureux! si sur les Lys la discorde inhumaine
N'eût soufflé le poison de sa mortelle haleine,
Et près d'un siecle entier, dans le temple des Arts,
De Bellone en fureur planté les étendarts.
Réservé par le Ciel à des tems moins sinistres,
Enfin parut Colbert, l'exemple des Ministres:
Des sucs de la Teinture il montra le pouvoir,
Il fut l'assujettir aux regles du devoir:
La fraude, dans cet art, n'osa plus s'introduire,
Aux leçons de Colbert le François fut s'instruire,
Et de nos jours encore, en tous lieux à la fois,
De ce guide fidele il suit les justes loix.

Quel-

Quelquefois cependant, incertain dans ſes routes,
Il trouva, dans Fagon, le flambeau de ſes doutes :
Fagon fut à Colbert dignement comparé,
Autant ami des Arts, & non moins éclairé. . . .

C'eſt en vain qu'à grands fraix, voulant teindre la *ſoie*,
Dans des flots colorans un artiſte la noie,
Si, pour ne lui donner qu'un éclat trop changeant,
A l'épurer d'abord on le voit négligent.
Mêlée aux ſavons blancs, avec eux longtems cuite,
Au courant d'une eau pure, on l'en déprend enſuite,
On la lave, on la bat, & puis dans un bain froid
Le rouge alun de rome à l'inſtant la reçoit.
Ainſi toujours la ſoie, avant tout *décreuſée*,
A ſouffrir les couleurs en eſt mieux diſpoſée.
Veut-on du *cramoiſi* l'abreuver à grand prix ?
On la déprend encor de l'alun qu'elle a pris :
Et du ſouchet de l'inde alliant la racine,
Le tartre, l'arſenic, & la galle alépine,
Au riche vermillon du tonna-mexicain,
Le parfait cramoiſi naît de leur double bain.
Faut-il aux *violets*, aux *tannés*, aux *canelles*
Baiſſer des cramoiſis les teintures trop belles ?
L'indigo remplaçant le ſouchet qu'on bannit,
La couperoſe encore au beſoin les brunit.
Avec l'indigo ſeul le *beau bleu* s'appareille,
Le *céleſte* de plus exige un pied d'orſeille.
Et de celui-ci vient, rabattu tant ſoit peu,
Le *gris-de-lin-ſilvie*, & tout *aubifoin-bleu*.
Du *jaune*, avec l'alun, la gaude eſt la teinture ;
Ce jaune eſt pâliſſant, formé de gaude pure,
Mais pour le renforcer, l'affermir plus ou moins,
Pour le changer enfin, d'autres ſucs y ſont joints.
L'indigo le plus foible au *citron* le ramene,
Le plus foible rocou donne un *jaune-de-graine* :
Avec la ſoude uni, de leur concours commun
Sort un beau *jaune-aurore*, & non pâle, ni brun :

Sans la gaude, au rocou la soude incorporée
Engendre l'*isabelle*, ou plus ou moins dorée,
Et le rocou, sans soude, enfante l'*orangé*,
Qui brunit, dans l'alun & le bresil plongé.
Toute *couleur de feu* sous le nom de *ratine*,
Quoiqu'aux yeux différente, a la même origine;
Mais d'un bresil, deux fois, coup sur coup, répété,
Les bains plus rougissans font sa diversité.
De tout *rouge rancé* l'*écarlate* commune,
Non moins que le ponceau, se bresille & s'alune,
Mais l'un a du rocou double dose en son pié
Et l'*écarlate* au sien n'en a que la moitié.
Le *rouge incarnadin* & la *couleur de rose*
De bresil & d'alun, sans rocou, se compose:
Le campêche à tous deux se trouve-t-il mêlé?
Ils font la *rose seche*, ils font le *canelé*.
Rejettant le bresil, prétend-on l'en exclure?
D'un beau *gris violant* on aura la teinture.
Veut-on des *violets?* qu'on unisse au bresil,
L'orseille, le campêche, & le bleu de l'anil.
Au campêche, au bresil joind-on la couperose,
La galle & le fustet, chacun suivant sa dose?
On aura des *gris bruns* & des *tannés* divers,
Plus que n'en peut loger la prison de mes vers.
Mais, au lieu du bresil, qu'on y mette, sans fraude,
Ou l'or de la sarrette, ou celui de la gaude,
Il en résultera plus d'un beau *gris plombé*,
En qui des premiers *gris* le brun sera tombé.
La gaude & la sarrette, aux Teinturiers habiles,
Dans les différens *verds*, ne sont pas moins utiles:
Avec l'une des deux l'inde & l'alun ligués
Donnent des *céladons*, des *verds naissans & gais*.
S'il faut *brunir* ces *verds*, que le verdet bluâtre
Y soit le compagnon du campêche rougeâtre.
Qu'ensuite on substitue à l'inde le fustet,
Et l'aigre couperose au campêche, au verdet,

Au

Au lieu de ces *verds bruns*, leur nuance moins forte
N'offrira plus à l'œil qu'un *verd de feuille-morte*:
Mais enfin du campêche y voit-on le retour?
Les *roux verds* & l'*olive* en naîtront à leur tour.

Avec autant d'adresse, & plus d'apprêts encore,
La soie en un beau *noir* aisément se colore:
J'allois, au gré de l'art, en expliquer les loix;
Mais Pégase recule & ma Muse est sans voix.
O fille d'Apollon, &c.

ARTICLE QUATRIEME.

De la Teinture des petites étoffes de laine sans lisieres, & des laines servant à leur fabrication & à d'autres ouvrages.

1. Les couleurs violettes & amarantes cramoisies se font de cuve de cochenille, sans mélange d'orseille ou d'autres ingrédiens.

2. Les couleurs de rose & les pourpres se font de cochenille, sans les rabattre d'orseille.

3. Les rouges bruns de bon teint sont faits de cuve de cochenille, & rabattus de garance, sans mélange de bresil.

4. Les écarlates & incarnats couleur de feu, l'orangé, le jaune doré & l'isabelle, sont teints de bourre teinte en garance, sans mélange de fustet.

5. Les bleus, les verds gais, verd de pomme, verd de chou, verd d'olive, verd de mer, verd d'œillet & céladon, sont gaudés & passés en cuve, sans être brunis avec le bois d'inde.

6. Le more doré, les feuille-mortes & verds roux, sont gaudés & passés en cuve.

7. Le noir de bon teint est teint en bleu & rabattu de galle alépine & de couperose, sans y mettre de la moulée de taillandier.

Les ſept genres de teinture ci-deſſus appartiennent aux Teinturiers du grand teint, & à ceux qui pour teindre de bon teint certaines petites étoffes, ont renoncé au petit teint. Mais les ſuivans ne concernent que les Teinturiers en petit teint.

8. Les couleurs communes ſont teintes de galle alépine & de toutes ſortes d'ingrédiens permis, que les Teinturiers jugent les plus propres pour leur bonne qualité.

9. Les gris & noirs communs ſont teints de galle alépine & de couperoſe.

10. Les couleurs de feu, orangés & nacarats communs ſont faits de bourre teinte en garance.

11. Les Teinturiers du petit teint peuvent ſeuls teindre de ce teint, les ſerges, étamines, camelots & autres étoffes de bas prix qui ne ſont envoyées au foulon que pour être dégraiſſées & dégorgées: mais ils ne peuvent teindre aucune des étoffes drapées, quoique du même prix, leſquelles devant être foulées ne doivent ſe teindre qu'au grand & bon teint.

12. Les mêmes Teinturiers, à qui il appartient de teindre des laines dans les couleurs & avec les drogues ci-deſſus, peuvent auſſi blanchir toutes ſortes de toiles de lin, de chanvre & de coton, ainſi que toutes ſortes de fil & de bas d'eſtame.

13. Les drogues qui leur ſont interdites ſont le paſtel, le vouede, l'indigo, la cochenille, la graine d'écarlate ou le kermès, la garance, la ſarrette, la geneſtrole, le fenugrec & l'orcanette.

14. Ils ne peuvent avoir chez eux des cuves de bois pour le guede, mais ſeulement des chaudieres de cuivre & des cuves ou des tonnes pour conſerver le brou de noix.

AR-

ARTICLE CINQUIEME.

De la Teinture du fil & du coton, & des toiles & autres ouvrages qui en sont fabriqués.

1. Avant que le fil de lin ou de chanvre soit mis à la teinture, il est décrué ou lessivé avec de bonnes cendres de bois durs, puis retors, ensuite lavé dans de l'eau de riviere ou de fontaine, & enfin retors pour la seconde fois.

2. Le fil pers, appellé fil à marquer, retors & simple, & le bleu brun-clair & mourant, sont teints avec inde plate ou indigo.

3. Le verd gai est premiérement teint en bleu, ensuite rabattu avec bois de campêche & verdet, & enfin gaudé.

4. Le verd brun est teint de même, mais bruni davantage, & puis gaudé.

5. Le citron, le jaune pâle & le citron doré sont teints avec gaude & fort peu de rocou.

6. L'orangé, l'isabelle couvert & l'isabelle pâle, jusqu'au clair & à l'aurore, sont teints avec le fustet, le rocou & la gaude.

7. Le rouge clair ou plus brun, la ratine ou couleur de feu claire ou plus couverte, sont teints avec le bresil de fernambouc, ou, à son défaut, avec d'autre bresil & du rocou.

8. Le violet, la rose-seche, & l'amarante clair ou brun, sont teints avec bresil, & rabattus avec la cuve d'inde ou d'indigo.

9. Le feuille-morte clair ou brun & l'olive se brunissent avec la galle & la couperose, & se rabattent avec la gaude, le rocou ou le fustet, suivant l'échantillon.

10. Le minime brun ou clair, & le musc aussi clair ou brun sont brunis & rabattus comme le feuille-morte.

11. Le gris blanc, gris sale, gris brun, gris de castor, breda & toutes autres sortes de gris sont brunis avec la galle alépine & couperó-

peroſe, puis rabattus avec gaude, breſil, fuſtet, campêche & autres ingrédiens néceſſaires, ſuivant l'échantillon & le jugement de l'ouvrier.

12. Le noir ſe fait de galle alépine & de couperoſe; enſuite il eſt lavé, & achevé avec le bois de campêche. Il y a auſſi quelques noirs qui ſont courroyés avec de bonne huile d'olive & de la cendre gravelée.

13. Dans les teintures ci-deſſus on employe le ſavon de Marſeille, d'Alicante, ou tout autre qui en a la bonne qualité.

14. Les Teinturiers ne doivent pas mêler le fil de chanvre avec le fil de lin en bottes ou pelotons, ni le retors avec celui qui ne l'eſt point.

15. Les Teinturiers ne doivent pas ſe ſervir de ſuie de cheminée pour imprimer des toiles ou du fil, à moins qu'on ne les ait fait paſſer dans de bonnes galles.

16. Les toiles neuves ou vieilles, ainſi que le fil à marquer le linge, ne ſont breſillées qu'après avoir été teintes en bonne cuve, ſans avoir le pied d'autre teinture.

17. Aucune toile ne doit être débitée pour bon teint, qu'elle ne ſoit auſſi teinte de cuve; & il en eſt de même du fil de lin de quelque pays qu'il vienne.

18. Toutes les toiles doivent être bien & duëment teintes, avant que d'être empeſées ou collées pour la calandre.

19. Les Teinturiers ne doivent mettre aucun ſavon, huile, graiſſe & autres ingrédiens infects, gras & défectueux, aux marchandiſes qu'ils calandrent.

Après avoir rapporté dans les cinq articles ci-deſſus, la compoſition des couleurs de la Teinture pour toutes les matieres qui en ſont ſuſceptibles, il me reſte à parler d'une derniere opération qui y eſt intimement liée. C'eſt une épreuve à laquelle il eſt néceſſaire de ſoumettre toutes ces matieres teintes, pour connoître ſi la teinture en eſt bonne

bonne & assurée, ou si elle est fausse, de peu de durée & par conséquent d'un mauvais usage.

Pour faire cette épreuve, il faut supposer d'abord qu'on ait teint en toutes sortes de couleurs, des échantillons de laine, de soie ou d'étoffes de ces matieres. Si l'on expose ces échantillons à l'air & au soleil pendant un tems raisonnable, les bonnes couleurs se soutiendront parfaitement, mais les fausses s'affoibliront bientôt & s'effaceront insensiblement à proportion du degré de leur mauvaise qualité. Et comme une couleur ne doit être réputée bonne, qu'autant qu'elle résiste à l'action de l'air & du soleil, cette expérience servira de regle pour décider sur le plus ou moins de bonté des différentes couleurs.

Si l'on fait ensuite des épreuves sur les mêmes échantillons qui auront été exposés à l'air & au soleil, en les faisant bouillir avec des ingrédiens convenables, on reconnoîtra que les mêmes ingrédiens ne pourront pas être indifféremment employés dans les épreuves de toutes les couleurs, parce qu'il arrivera quelquefois qu'une couleur reconnue bonne après avoir été exposée à l'air & au soleil, sera considérablement altérée par l'épreuve, & qu'au contraire une couleur fausse y résistera.

Il s'agit d'abord de déterminer les ingrédiens qu'on doit admettre dans ces épreuves. La conviction où l'on est, qu'on ne sauroit s'assurer du degré d'acidité du jus de citron, du vinaigre, des eaux sûres & de l'eau forte, oblige à rejetter dans les épreuves l'usage de ces ingrédiens; pour n'y employer avec l'eau commune que des matieres dont l'effet soit toujours égal.

En suivant ce principe & commençant par les teintures en laines, il suffira de séparer en trois classes, toutes les couleurs dont les échantillons de laine peuvent être teints, afin de fixer les ingrédiens dont on doit se servir dans l'épreuve des couleurs comprises dans chacune de ces trois classes. *Epreuve des teintures de laine, en trois classes.*

Les couleurs rangées dans la premiere seront éprouvées avec l'alun de rome; celles de la seconde avec le savon blanc; & celles de la troisiéme avec le tartre rouge.



Mais il ne suffit pas, pour s'assurer de la bonté d'une couleur par cette épreuve, d'y employer des ingrédiens dont l'effet soit toujours égal; il faut encore que la durée de cette opération soit exactement déterminée, & de plus que la quantité de liqueur soit fixée, parce que le plus ou moins d'eau diminue ou augmente extrémement l'activité des ingrédiens qui y entrent. Ainsi il est bon d'expliquer tout cela.

L'épreuve avec l'alun de rome se doit faire de cette maniere: on met dans un vaisseau de terre une livre, poids de marc, d'eau commune, & une demi-once d'alun: on pose le vaisseau sur le feu, & quand l'eau bout à gros bouillons, on y met l'échantillon dont l'épreuve doit être faite; on l'y laisse bouillir pendant cinq minutes; après quoi on le retire & on le lave bien dans l'eau froide.

L'épreuve avec le savon blanc se doit faire en mettant dans une livre d'eau, le poids de deux gros de savon blanc de marseille, haché en petits morceaux. Ayant posé ensuite le vaisseau sur le feu, on a soin de remuer l'eau avec un bâton pour bien faire fondre le savon. Lorsqu'il sera fondu & qu'on verra l'eau bouillir à gros bouillons, on y met l'échantillon que l'on fait pareillement bouillir l'espace de cinq minutes.

L'épreuve avec le tartre rouge se doit faire précisément de même, avec les mêmes doses & dans les mêmes proportions que l'épreuve avec l'alun, en observant de bien pulvériser le tartre, avant de le mettre dans l'eau, afin qu'il soit entiérement fondu, lorsqu'on y mettra l'échantillon.

Le poids de l'échantillon de laine dont on voudra faire l'épreuve, doit être du poids d'un gros poids de marc, & l'échantillon d'étoffe ne doit pas excéder la grandeur de deux pouces en quarré. Ainsi, lorsqu'il sera nécessaire d'éprouver de plus grands échantillons, ou plusieurs à la fois, il faudra augmenter à proportion le poids de l'eau & des drogues; ce qui ne changera en rien l'effet de l'épreuve: mais pour la rendre plus certaine, il ne faut pas éprouver ensemble des échantillons de différentes couleurs.

Les

Les couleurs qui doivent être éprouvées avec l'alun de rome, sont: Epreuve de la premiere classe.

Le cramoisi de toutes nuances.

L'écarlate de kermès ou de graine, dite communément *écarlate de venise ou d'hollande.*

L'écarlate couleur de feu ou de cochenille, que l'on nomme en France *écarlate des gobelins.*

Le rouge couleur de cerise & autres nuances de l'écarlate.

Les violets & gris de lin de toutes nuances.

Les pourpres.

Les couleurs de langouste, jujube & fleur de grenade.

Les bleus.

Les gris ardoisés, gris lavandés, gris violans, gris vineux & toutes les autres nuances semblables.

S'il a été employé, dans la teinture du cramoisi, des ingrédiens de faux teint, la fausseté se reconnoîtra facilement par l'épreuve avec l'alun, parce qu'elle ne fera que violenter un peu le cramoisi fin, c'est à dire le faire tirer sur le gris de lin. Mais, en détruisant les plus hautes nuances du cramoisi faux, elle les rendra d'une couleur de chair très-pâle, & blanchira presque toutes les basses nuances du même cramoisi faux.

L'écarlate de kermès ne sera nullement endommagée par cette épreuve. Elle fera monter l'écarlate de cochenille à une couleur de pourpre, & violentera les basses nuances, en sorte qu'elles tireront sur le gris de lin. Mais elle emportera presque toute la fausse écarlate de bresil, & la réduira à une couleur de pelure d'oignon. Elle fera encore un effet plus sensible sur les basses nuances de cette fausse couleur, & emportera presque entiérement l'écarlate de bourre garancée & toutes ses nuances.

Quoique le violet ne soit pas une couleur simple, étant formée des nuances du bleu & du rouge; elle est néanmoins si importante, qu'elle mérite un examen particulier. La même épreuve avec l'alun de rome ne fait presque aucun effet sur le violet fin; au lieu qu'elle endom-

dommage beaucoup le faux. Mais il faut obſerver que ſon effet n'eſt pas d'emporter toujours également une grande partie de la nuance du violet faux, parce qu'on lui donne quelquefois un pied de bleu de paſtel ou d'indigo. Ce pied étant de bon teint, n'eſt pas emporté par l'épreuve, mais la rougeur s'efface; les nuances brunes deviennent preſque bleues, & les pâles, d'une déſagréable couleur de lie de vin.

A l'égard des violets demi-fins qui ſont des couleurs de mauvais teint, ils doivent être mis dans la claſſe des violets faux, ne réſiſtant pas davantage à cette épreuve.

On connoîtra de la même maniere les gris de lin fins d'avec les faux; mais la différence eſt legere, les premiers perdant ſeulement un peu moins que les derniers.

Les pourpres fins réſiſteront parfaitement à l'épreuve avec l'alun, au lieu que les faux perdent la plus grande partie de leur couleur.

Les couleurs de langouſte, jujube & fleur de grenade, tireront ſur le pourpre après l'épreuve, ſi elles ont été faites avec la cochenille; au lieu qu'elles pâliront conſidérablement, ſi l'on y a employé le fuſtet qui fait une fauſſe couleur.

Les bleus de bon teint ne perdront rien à l'épreuve, ſoit qu'ils ayent été faits de paſtel, ou d'indigo; mais ceux de faux teint perdront la plus grande partie de leur couleur.

Les gris ardoiſés, gris lavandés, gris violans & gris vineux, perdront preſque toute leur couleur, s'ils ſont de faux teint; au lieu que les autres ſe ſoutiendront parfaitement.

Epreuve de la ſeconde claſſe.

Les couleurs qui doivent être éprouvées avec le ſavon blanc, ſont:

Les jaunes, jonquilles, citrons, orangés, & toutes les nuances qui tirent ſur le jaune.

Toutes les nuances du verd, depuis le verd-jaune ou naiſſant juſqu'au verd de chou ou de perroquet.

Les rouges de garance.

Les couleurs de canelle, de tabac d'eſpagne & autres ſemblables.

Cette

Cette épreuve ſera exactement connoître ſi les jaunes & les nuances qui en dérivent ſont de bon ou de mauvais teint: car elle emportera la plus grande partie de leur couleur, s'ils ſont faits avec la graine d'avignon, le rocou, la terra-merita, le fuſtet & le ſafran bâtard, qui ſont de fauſſes couleurs pour la laine. Mais elle n'altérera point les jaunes faits avec la ſarrette, la geneſtrole, le bois jaune, la gaude & le fenugrec.

La même épreuve fera auſſi connoître avec préciſion la bonté des couleurs vertes, en ce que celles de mauvais teint s'effaceront preſque tout à fait, ou deviendront bleues, ſi elles ont eu un pied de paſtel ou d'indigo; au lieu que celles de bon teint ne perdront preſque rien de leurs nuances & reſteront vertes.

Les rouges de pure garance ne perdront rien dans l'épreuve avec le ſavon & n'en deviendront que plus beaux; mais, ſi l'on y a mêlé du breſil, ils perdront de leur couleur, à proportion de la quantité qu'on en aura mis.

Les couleurs de canelle, de tabac d'eſpagne & autres ſemblables ne ſeront preſque pas altérées par cette épreuve, ſi elles ſont de bon teint: mais elles perdront beaucoup, ſi l'on y a employé le rocou, le fuſtet ou la bourre garancée.

L'épreuve avec l'alun ne ſeroit d'aucune utilité & pourroit même induire en erreur ſur pluſieurs couleurs de cette ſeconde claſſe: car elle n'endommagera pas la teinture de fuſtet ni celle de rocou, qui cependant ne réſiſtent point à l'action de l'air; & elle emportera une partie de la ſarrete & de la geneſtrole, qui ſont pourtant de très-bons jaunes & de très-bons verds.

Epreuve de la troiſiéme claſſe.

Les couleurs qui doivent être éprouvées avec le tartre rouge ſont tous les fauves ou couleurs de racine, qui ne ſont pas dérivés des couleurs primitives. Ces couleurs de racine ſe font avec le brou de noix, la racine de noyer, l'écorce d'aulne, le ſumac ou le roudon, le bois de ſantal & la ſuye de cheminée. Chacun de ces ingrédiens donne

ne un grand nombre de nuances différentes, qui sont toutes comprises sous le genre de fauves ou couleurs de racine.

Les ingrédiens que je viens de nommer sont bons, à l'exception du bois de santal & de la suye qui le sont un peu moins, & qui rudissent la laine lorsqu'on en met trop. Ainsi tout ce que l'épreuve avec le tartre doit faire connoître sur ces sortes de couleurs, c'est si elles ont été surchargées de l'une de ces deux drogues. Dans ce cas, elles perdront considérablement: mais elles résisteront beaucoup davantage, si elles ont été faites avec les autres ingrédiens, ou s'il n'y a qu'une médiocre quantité de santal ou de suye.

Exception pour la teinture de laine en noir.

Le noir est la seule couleur qui ne puisse être comprise dans aucune des trois classes énoncées ci-dessus, parce qu'il est nécessaire de se servir d'une épreuve beaucoup plus active pour connoître si la laine ou l'étoffe a eu le pied de bleu convenable.

Pour en faire l'épreuve, prenez une livre d'eau, dans laquelle vous mettrez une once, poids de marc, d'alun de rome, & autant de tartre rouge, tous deux pulvérisés: faites bouillir le tout, & alors mettez-y l'échantillon, & laissez-l'y bouillir à gros bouillons l'espace d'un quart d'heure. Lavez-le ensuite dans l'eau fraîche, & vous verrez alors s'il a eu le pied de bleu convenable: car, dans ce cas, sa couleur deviendra d'un bleu presque noir, sinon elle grisera beaucoup.

Cette épreuve fera connoître si les étoffes noires, après avoir eu un pied de bleu suffisant, ont été mal noircies, défaut provenant de ce que le Teinturier aura épargné la noix de galle: auquel cas l'échantillon perdra presque tout son noir & deviendra bleu.

Ainsi que pour la bruniture.

Comme il est d'usage de brunir quelquefois les couleurs avec la noix de galle & la couperose, & que cette opération, que les Teinturiers appellent *bruniture* & qui peut être permise dans le bon teint, peut faire un effet particulier dans l'épreuve de ces couleurs, il faut observer que, quoiqu'après l'épreuve le bouillon paroisse chargé de teinture, parce que la bruniture aura été emportée, l'échantillon cependant n'en sera pas moins de bon teint, s'il a conservé son fond: mais, s'il le perd

perd au contraire, ce ſera une marque qu'il eſt de faux teint. Ainſi, ce n'eſt pas ſur la couleur du bouillon de l'épreuve qu'il faut juger de la bonne ou mauvaiſe qualité de la teinture qui aura été brunie, mais ſur le pied de couleur qui reſtera après l'épreuve.

Quoique la bruniture qui ſe fait avec la noix de galle & la couperoſe ſoit de bon teint, comme elle rudit la laine, le mieux ſeroit que les Teinturiers ſe ſerviſſent par préférence de la cuve d'inde ou de celle de paſtel.

On ne peut ſoumettre à aucune épreuve les gris communs faits avec la noix de galle & la couperoſe, parce que ces couleurs ne ſe font pas autrement, pourvû que le Teinturier obſerve de les engaller d'abord & de mettre la couperoſe dans un ſecond bain beaucoup moins chaud que le premier: car, de cette maniere, ils ſont plus beaux & plus aſſurés. Et pour les gris communs.

Tout ce que j'ai dit juſqu'à préſent ne regarde que les épreuves des laines teintes; celles des ſoies doivent ſe faire différemment, ſoit par rapport aux couleurs, ſoit à l'égard de la proportion des ingrédiens. Voici de quelle maniere il faut procéder. Epreuve des teintures en ſoie.

Par rapport aux couleurs, il faut diſtinguer dans l'épreuve des ſoies, les couleurs de cramoiſi, des couleurs communes.

L'épreuve des premieres doit être faite premiérement pour le rouge & le violet cramoiſi avec de l'alun du poids de la ſoie, & pour l'écarlate cramoiſi avec du ſavon blanc approchant auſſi le poids de la ſoie. Ces ingrédiens ayant été jettés dans l'eau claire quand elle commencera à bouillir, mettez-y enſuite l'échantillon de ſoie dont vous voudrez faire l'épreuve & faites bouillir le tout environ un demi-quart d'heure.

Si la teinture en eſt fauſſe, le bouillon de la ſoie rouge cramoiſi ſera violet pour marque qu'elle aura été teinte avec de l'orſeille. Et s'il eſt fort rouge, cela prouvera qu'elle l'a été avec le breſil. Pour l'écarlate cramoiſi, s'il y a du rocou, le bouillon en deviendra comme couleur d'aurore; & s'il y a du breſil, il ſera rouge. Enfin, quant au

violet cramoisi, s'il y a du bresil ou de l'orseille, le bouillon sera d'une couleur tirant sur le rouge. Mais, si au contraire ces trois cramoisis sont de bonne teinture, leur bouillon aura très-peu de changement.

A l'égard des autres couleurs qui ne sont point cramoisi, & que l'on appelle *couleurs communes*; pour connoître si elles ont eu trop de noix de galle, ce qui est un défaut, il faut mettre la soie dans de l'eau claire & bouillante, avec du savon blanc ou de la cendre gravelée, environ du poids de la soie; & après un bouillon, on en retirera la soie.

Si cette soie a été surchargée de noix de galle, toute la couleur s'en perdra, & celle qui lui restera, ne sera plus qu'une espece de couleur de bois ou de feuille-morte qui sera la teinture de la noix de galle.

On peut faire encore cette épreuve d'une autre maniere, en mettant la soie dans de l'eau bouillante, avec un peu plus que le quart d'une bouteille de jus de citron; après quoi on retirera la soie, on la lavera dans l'eau froide, puis on la passera dans la teinture noire. Si la soie a été engallée, elle deviendra noire: sinon elle se trouvera d'une couleur de pain bis ou de tristamie. Mais il est si difficile, comme j'ai déja dit, de s'assurer parfaitement du degré d'acidité du jus de citron, qu'il sera toujours plus certain de préférer la premiere épreuve à celle-ci.

Exception pour les soies teintes en noir.

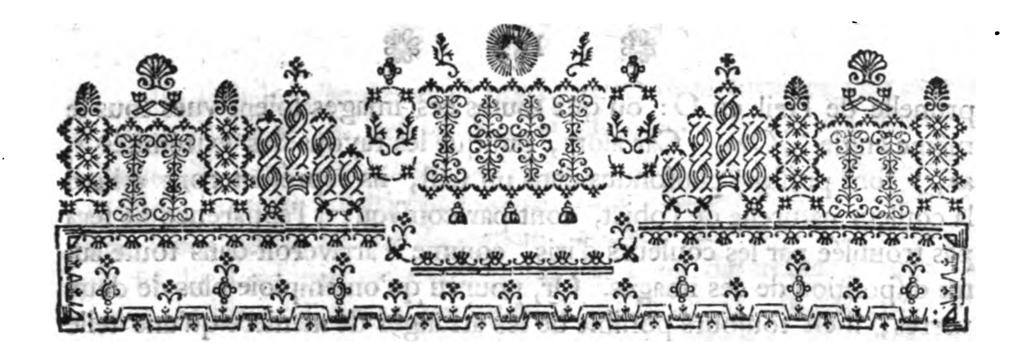
Les soies teintes en noir ne sont pas comprises dans ce que je viens de dire; & pour connoître si elles n'ont pas été trop engallées ou chargées de limaille de fer & de moulée des taillandiers, qui sont de mauvais ingrédiens, l'épreuve s'en doit faire dans de l'eau simple avec deux fois autant pesant de savon blanc que de soie; & après un bouillon, si l'on voit qu'elle devienne rougeâtre, c'est une marque qu'elle a été trop engallée ou surchargée de ces mauvaises drogues: sans quoi cette eau conserveroit sa couleur.

Le coton & le fil, les étoffes & les toiles teintes qui en sont faites, ne sont susceptibles d'aucune épreuve, parce que ne pouvant supporter les fraix d'une teinture fine, leurs couleurs ne sont point à l'épreuve.

Mé-

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.



MÉTHODE
POUR PORTER LES VERRES OBJECTIFS DES LUNETTES À UN PLUS HAUT DEGRÉ DE PERFECTION.

PAR M. L. EULER.

I.

Dans le XIII[e] Volume des Mémoires de l'Académie j'avois déjà avancé le sentiment dont les expériences faites en Angleterre par M. Dollond m'ont fourni dernierement une preuve bien éclatante; c'est que, pour éviter le défaut de la dispersion des couleurs, causée par la différente refrangibilité des rayons, il suffit de former les verres de telle sorte que la confusion causée par leur ouverture soit réduite à rien. En effet, j'avois déjà remarqué alors, que pourvu qu'on n'eût rien à craindre de la part de cette confusion, il est toujours possible d'arranger les verres de façon que l'effet produit par la différente refrangibilité des rayons devienne insensible. Ce n'est pas que les dernieres images, formées par les rayons de différentes couleurs qui constituent l'objet immédiat de la vision, soient réunies dans une seule; ce qui est absolument impossible en n'employant que la même matiere refringente: mais il s'agit de disposer ces images, Rr, Mm, Vv, (dont la premiere Rr est celle des rayons rouges, & Vv celle des violets) de maniere que la droite vr, tirée par leurs extrémités, passe par la Planche II. Fig. 1.

pru-

prunelle de l'œil en O: ou que toutes ces images soient vues sous le même angle MO*m*. Car alors, puisque les rayons des extrémités *r*, *m*, *v* sont presque confondus dans un seul, ils représenteront à l'œil la couleur naturelle de l'objet, dont par conséquent l'apparence ne sera pas troublée par les couleurs d'iris, comme il arriveroit dans toute autre disposition de ces images. Or, pourvu qu'on emploie plus de deux verres, il est toujours possible de les arranger de maniere qu'une telle situation des images en résulte.

2. Cependant on ne sauroit disconvenir que les différentes distances de ces images R*r* & V*v* de l'œil ne produisent quelque confusion, attendu que chaque œil exige une certaine distance pour voir distinctement les objets; de sorte que si l'image moyenne M*m* se trouve à cette distance ajustée à la nature de l'œil, l'image R*r* est trop proche & l'autre V*v* trop éloignée. Mais la confusion qui en naît sera toujours fort petite, & d'une toute autre nature que celle dont on se plaint ordinairement, où les objets paroissent bordés des couleurs d'iris. Toutefois il seroit bien à souhaiter qu'on pût délivrer aussi les lunettes de cette légere confusion, causée par la distance entre les images des différentes couleurs; mais j'ai déjà remarqué qu'en employant diverses matieres refringentes, ce qui est le seul moyen de parvenir à ce but dans la Dioptrique, on tombe dans un autre inconvénient, puisque les objectifs propres à ce dessein ne seroient pas susceptibles d'une aussi grande ouverture que la clarté de la vision l'exige: ou bien il faudroit admettre une trop grande distance de foyer. Outre cela, à moins qu'on ne demande un très grand grossissement, la confusion mentionnée n'est d'aucune conséquence, puisque chaque œil est accoutumé à voir assez distinctement à des distances très différentes. Mais, si l'on vouloit procurer un très grand grossissement, qui multipliât le diametre des objets 200 fois & davantage, il ne seroit pas inutile de donner tous ses soins à construire un objectif rempli d'eau, où tant la dispersion des couleurs que la confusion de l'ouverture seroient entiérement anéanties, suivant les regles & les mesures que mon Fils a déterminées; & une telle lunette auroit toujours de très grands avantages.

3. Or

3. Or je m'arrêterai ici aux Lunettes dont tous les verres ont le même degré de refraction, la différence entre les diverses especes de verre étant trop petite pour qu'on en pût tirer quelque avantage, comme je l'ai fait voir dans un Discours précédent sur cette matiere: j'y ai incontestablement prouvé, que tous les avantages que M. Dollond prétend avoir retirés de deux différentes especes de verre, résultent d'un principe tout à fait différent, & peuvent être procurés en n'employant que la même espece de verre. Tout revient à former les verres de telle sorte que la confusion qui tire son origine de l'ouverture des verres soit anéantie: & cette condition est absolument nécessaire, pour qu'on puisse exécuter l'arrangement des images rapporté ci-dessus, qui rend insensible la dispersion des couleurs. Dans un Mémoire précédent que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, j'ai donné la construction de semblables objectifs, qui étoient composés de deux verres joints immédiatement ensemble, où j'ai négligé leur épaisseur, comme il est toujours permis de le faire, à moins que les verres ne soient fort épais. Cependant, comme une double épaisseur porroit devenir de quelque conséquence, & qu'il n'est pas bon par d'autres raisons de joindre ces deux verres assez près ensemble pour qu'ils se touchent, j'ai cru qu'il seroit utile d'appliquer les mêmes recherches au cas où les deux verres qui constituent l'objectif sont éloignés à quelque distance l'un de l'autre; ce qui non seulement servira à perfectionner la construction précédente, en mettant cette distance fort petite, mais encore produira cet avantage, qu'on pourra dans chaque cas déterminer cette distance de façon qu'elle contribue à perfectionner les lunettes à d'autres égards, en augmentant le champ apparent, ou en les racourcissant davantage.

4. Le principe d'où l'on doit tirer cette recherche & d'autres semblables, est contenu dans la propôsition suivante, que je me contente de rapporter ici sans l'analyse qui y conduit. Soit AB un verre convexe des deux côtés; le rayon de sa face $AaB = a$, & de l'autre $AbB = b$, ces deux faces étant supposées parfaitement sphériques. Fig. 2

Soit de plus $m : 1$ la raison de refraction de l'air dans ce verre, laquelle est estimée comme $1,55 : 1$ pour le verre le plus refringent & les rayons moyens. Cela posé, si l'on conçoit un point lumineux F dans l'axe de ce verre à la distance $aF = f$, dont les rayons passent par le verre en m, & que la distance de ce point m à l'axe du verre soit $mp = x$, ces rayons après la refraction se réuniront avec l'axe en G, en sorte que posant $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$, on ait:

$$\frac{1}{bG} = \frac{m-1}{p} - \frac{1}{f} + \frac{(m-1)xx}{2m}\left(\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{f}\right)\left(\frac{m+2}{a}+\frac{3m+2}{f}\right) - \frac{m}{pp}\left(\frac{2m+1}{a}+\frac{3m+1}{f}\right)+\frac{m^3}{p^3}\right);$$

ou bien, si nous posons de plus pour abréger $\frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \frac{1}{r}$, de sorte que nous ayons $\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{f}$ & $\frac{1}{b} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} + \frac{1}{f}$, nous aurons:

$$\frac{1}{bG} = \frac{m-1}{p} - \frac{1}{f} + \frac{(m-1)xx}{2m}\left(\frac{1}{pr}\left(\frac{m+2}{r}+\frac{2m}{f}\right) - \frac{m}{pp}\left(\frac{2m+1}{r}+\frac{m}{f}\right)+\frac{m^3}{p^3}\right);$$

ou bien:

$$\frac{1}{bG} = \frac{m-1}{p} - \frac{1}{f} + \frac{(m-1)xx}{2mp}\left(\frac{m+2}{rr}+\frac{2m}{fr}-\frac{m(2m+1)}{pr}-\frac{mm}{fp}+\frac{m^3}{p^2}\right).$$

Donc, si x exprime le demi-diametre de l'ouverture du verre, les rayons qui passent par l'extrémité de l'ouverture représenteront l'image de l'objet en G, qui sera différente de celle que les rayons qui passent

sent par le milieu du verre en a représentent. C'est de là que naît la confusion relative à l'ouverture des verres, qu'il s'agit de faire évanouir.

5. Comme il est impossible de faire évanouir cette confusion en n'employant qu'un seul verre AB, plaçons derriere celui-ci sur le même axe un autre verre CD à la distance $bc = e$, & nommons le rayon de convexité de sa face de devant $CcD = c$ & de sa face de derriere $CdD = d$; où il faut remarquer que, si quelque face étoit concave, le rayon de courbure seroit négatif. Maintenant je me propose de déterminer ces deux verres de maniere qu'il n'en résulte aucune confusion dans l'image qui sera représentée par tous les deux. D'abord donc, puisqu'il s'agit des objectifs de lunettes, la distance de l'objet devant le verre AB, que je viens de poser $= f$, sera infinie, & partant $\frac{1}{f} = 0$; donc $\frac{1}{r} = \frac{1}{a}$ ou $r = a$ & $\frac{1}{b} = \frac{1}{p} - \frac{1}{a}$. Donc, posant le demi-diametre de l'ouverture de ce verre $= x$, par ce seul verre l'image sera représentée en G, de sorte que Fig. 3.

$$\frac{1}{bG} = \frac{m-1}{p} + \frac{(m-1)xx}{2mp}\left(\frac{m+2}{aa} - \frac{m(2m+1)}{ap} + \frac{m^3}{pp}\right).$$

Mais il faut que ces mêmes rayons, en passant par l'autre verre CD, représentent la seconde image en H, en sorte que la distance $dH = h$ soit indépendante de l'ouverture des verres, ou bien on pourra regarder l'image en H comme un objet dont l'image représentée par le seul verre CD doit tomber au même point G que nous venons de déterminer. On n'a donc qu'à renverser le cas, & poser $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{q}$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{h} = \frac{1}{s}$; de sorte que $\frac{1}{d} = \frac{1}{s} - \frac{1}{h}$ & $\frac{1}{c} = \frac{1}{q} - \frac{1}{s} + \frac{1}{h}$, & nommant le demi-diametre de l'ouverture du verre

CD

$CD = y$, puisque le lieu de l'image G tient une situation contraire, nous aurons :

$$\frac{-1}{cG} = \frac{m-1}{q} - \frac{1}{h} + \frac{(m-1)yy}{2mq}\left(\frac{m+2}{ss} + \frac{2m}{hs} - \frac{m(2m+1)}{qs} - \frac{mm}{hq} + \frac{m^3}{qq}\right);$$

où il faut remarquer que les ouvertures de ces deux verres tiennent un tel rapport entr'elles que $x : y = bG : cG$, ou bien si nous nommons $bG = g$, nous aurons $x : y = g : g - e$.

6. Posons pour abréger :

$$\frac{m-1}{2mp}\left(\frac{m+2}{aa} - \frac{m(2m+1)}{ap} + \frac{m^3}{pp}\right) = P \quad \&$$

$$\frac{m-1}{2mq}\left(\frac{m+2}{ss} + \frac{2m}{hs} - \frac{m(2m+1)}{qs} - \frac{mm}{hq} + \frac{m^3}{qq}\right) = Q,$$

& ayant nommé $bG = g$, nous aurons ces deux équations :

$$\frac{1}{g} = \frac{m-1}{p} + Pxx \quad \& \quad \frac{-1}{g-e} = \frac{m-1}{q} - \frac{1}{h} - Qyy,$$

qui doivent également subsister, quelque grande que soit l'ouverture des verres. D'abord donc, posant $x = o$ & $y = o$, nous aurons $\frac{1}{g} = \frac{m-1}{p}$ & $\frac{1}{g-e} = \frac{1}{h} - \frac{(m-1)}{q}$, d'où nous tirons le rapport

$$x : y = g : g - e = \frac{1}{g-e} : \frac{1}{g} = \frac{1}{h} - \frac{(m-1)}{q} : \frac{m-1}{p}.$$

Ensuite, pour éliminer la distance g, renversons nos deux équations :

$$g = \frac{1}{\frac{m-1}{p} + Pxx} = \frac{p}{m-1} - \frac{Pppxx}{(m-1)^2},$$

$$e-g=\frac{1}{\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}+Qyy}=\frac{1}{\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}}-\frac{Qyy}{\left(\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}\right)^2},$$

& nous aurons:

$$e=\frac{p}{m-1}+\frac{1}{\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}}-\frac{Pppxx}{(m-1)^2}-\frac{Qyy}{\left(\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}\right)^2}.$$

D'abord donc il faut qu'il soit $e=\frac{p}{m-1}+\frac{hq}{(m-1)h-q}$,

& ensuite $\frac{Pppxx}{(m-1)^2}+\frac{Qyy}{\left(\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}\right)^2}=o$, ou puisque

$\frac{m-1}{p}:\frac{1}{h}-\frac{(m-1)}{q}=y:x$, nous aurons $\frac{Pxx}{yy}+\frac{Qyy}{xx}=o$,

ou bien $Px^4+Qy^4=o$, qui se réduit à celle-ci:

$$P\left(\frac{m-1}{q}-\frac{1}{h}\right)^4+\frac{(m-1)^4}{p^4}Q=o \text{ ou } Q+P\left(\frac{p}{q}-\frac{p}{(m-1)h}\right)^4=o.$$

C'est donc de cette équation jointe à celle-ci: $e=\frac{p}{m-1}+\frac{hq}{(m-1)h-q}$, qu'il faut tirer la solution de notre probleme.

7. Substituons au lieu de P & Q leurs valeurs supposées, & en divisant par $\frac{m-1}{2m}$, notre seconde équation prendra cette forme:

$$\frac{1}{q}\left(\frac{m+2}{ss}+\frac{2m}{hs}-\frac{m(2m+1)}{qs}-\frac{mm}{hq}+\frac{m^3}{qq}\right)$$

$$+p^3\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{(m-1)h}\right)^4\left(\frac{m+2}{aa}-\frac{m(2m+1)}{ap}+\frac{m^3}{pp}\right)=o,$$

ou

ou bien celle-ci:

$$\frac{m+2}{ss}+\frac{2m}{hs}-\frac{m(2m+1)}{qs}-\frac{mm}{hq}+\frac{m^3}{qq}+p^3q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{(m-1)h}\right)^4\left(\frac{m+2}{aa}-\frac{m(2m+1)}{ap}+\frac{m^3}{pp}\right)=0,$$

d'où l'on peut aisément tirer la valeur de s, ou bien celle de a. On pourra donc prendre à volonté, premierement les distances $bc=e$ & $d\mathrm{H}=h$: ensuite la valeur de p, ou celle de q, ou bien leur rapport mutuel, d'où l'une ou l'autre sera déterminée par la premiere équation $e=\frac{p}{m-1}+\frac{hq}{(m-1)h-q}$. Enfin, prenant a à volonté, l'autre équation nous donnera la valeur de s, ou réciproquement: où il faut prendre garde que les racines de l'équation quarrée deviennent réelles. Or, ayant trouvé toutes ces valeurs, la forme de nos deux verres se tirera des formules suivantes:

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{p}-\frac{1}{a};\ \frac{1}{c}=\frac{1}{q}-\frac{1}{s}+\frac{1}{h}\ \&\ \frac{1}{d}=\frac{1}{s}-\frac{1}{h},$$

où il faut se souvenir que

pour le verre AB, le rayon de sa face $\begin{cases}\text{de devant est} = a\\ \text{de derriere est} = b\end{cases}$

pour le verre CD, le rayon de sa face $\begin{cases}\text{de devant est} = c\\ \text{de derriere est} = d.\end{cases}$

Le plus petit de ces quatre rayons, rapporté à la valeur de x ou y, donnera l'ouverture dont ces verres sont susceptibles, en faisant en sorte que l'ouverture n'embrasse aucun arc qui surpasse 20° environ. Pour cet effet il faut remarquer que $y=x-\frac{(m-1)ex}{p}$.

8. Pour développer ces équations, considérons la distance de foyer derriere le second verre CD, qui est $d\mathrm{H}=h$ comme donnée,

née, & posons la distance des verres $bc = e = \frac{h}{\varepsilon}$. Soit ensuite $\frac{q}{m-1} = \frac{h}{1-\mu}$, & la premiere équation donne $\frac{h}{\varepsilon} = \frac{p}{m-1} - \frac{h}{\mu}$, & partant $\frac{p}{m-1} = h\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\right)$. De là nous aurons $\frac{1}{q} - \frac{1}{(m-1)h} = \frac{-\mu}{(m-1)h}$ & $p^3 q = \frac{(m-1)^4}{1-\mu}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\right)^3 h^4$,

donc $p^3 q \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{(m-1)h}\right)^4 = \frac{\mu^4}{1-\mu}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\right)^3$,

& $y = x\left(1 - \frac{\mu}{\varepsilon - \mu}\right) = \frac{\varepsilon x}{\varepsilon + \mu}$, ou $x : y = \varepsilon + \mu : \varepsilon$.

Posons de plus $a = \frac{p}{\alpha} = \frac{(m-1)h}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\right)$, pour avoir $\frac{m+2}{aa} - \frac{m(2m+1)}{ap} + \frac{m^3}{pp} = \frac{1}{pp}(\alpha\alpha(m+2) - \alpha m(2m+1) + m^3)$, &

$$p^3 q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{(m-1)h}\right)^4\left(\frac{m+2}{aa} - \frac{m(2m+1)}{ap} + \frac{m^3}{pp}\right) = \frac{\mu^4\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\right)}{(m-1)^2(1-\mu)hh}(\alpha\alpha(m+2) - \alpha m(2m+1) + m^3),$$

ce qui est le second membre de notre équation. Posons outre cela $\varepsilon = \frac{(m-1)h}{\omega}$, & le premier membre prendra cette forme:

$$\frac{1}{(m-1)^2 hh}((m+2)\omega\omega - 3m\omega + \mu m(2m+1)\omega + (1-\mu)mm - \mu(1-\mu)m^3),$$

& notre équation entiere sera:

$$(m+2)\omega\omega - 3m\omega + \mu m(2m+1)\omega + (1-\mu)mm - \mu(1-\mu)m^3$$

$$+\frac{\mu^3(\varepsilon+\mu)}{\varepsilon(1-\mu)}(\alpha\alpha(m+2)-\alpha m(2m+1)+m^3)=0.$$

Après la résolution de cette équation, les rayons des faces de nos deux verres seront:

$$a=\frac{(m-1)(\varepsilon+\mu)h}{\alpha\varepsilon\mu};\quad b=\frac{(m-1)(\varepsilon+\mu)h}{(1-\alpha)\varepsilon\mu}$$

$$c=\frac{(m-1)h}{m-\mu-\omega}\quad \& \quad d=\frac{(m-1)h}{1-m-\omega},$$

où il faut remarquer, que si nous posions $\varepsilon=\infty$, nous aurions le cas traité auparavant où les deux verres sont immédiatement joints ensemble.

9. Posons pour abréger $\frac{\mu^3(\varepsilon+\mu)}{\varepsilon(1-\mu)}=\mathrm{M}$, &

$$\frac{3m}{m+2}=\mathrm{A};\quad \frac{m(2m+1)}{m+2}=\mathrm{B};\quad \frac{mm}{m+2}=\mathrm{C};\quad \frac{m^3}{m+2}=\mathrm{D},$$

& nous aurons cette équation à résoudre:

$$\omega\omega=\mathrm{A}\omega-\mu\mathrm{B}\omega-(1-\mu)\mathrm{C}+\mu(1-\mu)\mathrm{D}-\mathrm{M}(\alpha\alpha-\alpha\mathrm{B}+\mathrm{D}),$$

d'où nous tirons:

$$\omega=\tfrac{1}{2}\mathrm{A}-\tfrac{1}{2}\mu\mathrm{B}\pm\sqrt{\begin{pmatrix}\tfrac{1}{4}\mathrm{AA}-\tfrac{1}{2}\mu\mathrm{AB}+\tfrac{1}{4}\mu\mu\mathrm{BB}-\mathrm{M}(\alpha\alpha-\alpha\mathrm{B}+\mathrm{D})\\ -\mathrm{C}+\mu\mathrm{C}-\mu\mu\mathrm{D}\\ +\mu\mathrm{D}\end{pmatrix}}$$

qui se réduit à cette forme:

$$\omega=\frac{\mathrm{A}-\mu\mathrm{B}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-mm}{4(m+2)^2}((4m-1)(1-\mu)^2-4\mu(m-1)^2)-\mathrm{M}(\alpha\alpha-\alpha\mathrm{B}+\mathrm{D}\right)}.$$

Soit donc de plus: $\frac{mm(4m-1)}{4(m+2)^2}=\mathrm{E}$, & $\frac{mm(m-1)^2}{(m+2)^2}=\mathrm{F}$,

afin qu'il devienne:

$\omega=$

$$\omega = \frac{A - \mu B}{2} \pm \surd(\mu F - (1-\mu)^2 E - M(\alpha\alpha - \alpha B + D)).$$

Les lettres A, B, C, D, E & F, dépendent donc de la refraction de l'air dans le verre, laquelle n'étant pas la même pour toutes les especes de verre, développons-en les valeurs pour les cas principaux:

	I	II	III	IV	V	VI
$m =$	1,500000	1,510000	1,520000	1,530000	1,540000	1,550000
A $=$	1,285714	1,290598	1,295455	1,300254	1,305085	1,309859
B $=$	1,714286	1,729402	1,744545	1,759717	1,774915	1,790141
C $=$	0,642857	0,649601	0,656364	0,663144	0,669943	0,676765
D $=$	9,964286	0,980897	0,997673	1,014611	1,031713	1,048978
E $=$	0,229592	0,233190	0,236813	0,240463	0,244132	0,247827
F $=$	0,045918	0,048137	0,050420	0,052770	0,055185	0,057668

Or, si l'on joint à un tel objectif un oculaire dont la distance de foyer est $= r$, les objets seront grossis en diametre tant $\frac{h(\varepsilon + \mu)}{\varepsilon r}$ de fois.

De là il est aisé d'appliquer cette solution à toutes sortes de cas qu'on jugera convenables pour la pratique; j'en examinerai quelques uns.

10. Supposons $\mu = 3$ & $\alpha = \frac{1}{2}$, pour que le premier verre devienne également convexe des deux côtés, & nous aurons:

$$\omega = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{3}{2}B \pm \surd\left(3F - 4E + \frac{27(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}B + D),$$

donc, selon nos 6 hypotheses:

$$\text{I. } m = 1{,}50;\ \omega = -1{,}928572 \pm \surd\left(-0{,}780614 + 0{,}357143 \cdot \frac{27(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)$$

$$\text{II. } m = 1{,}51;\ \omega = -1{,}948804 \pm \surd\left(-0{,}788349 + 0{,}366196 \cdot \frac{27(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)$$

$$\text{III. } m = 1{,}52;\ \omega = -1{,}969090 \pm \surd\left(-0{,}795992 + 0{,}375401 \cdot \frac{27(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)$$

$$\text{IV. } m = 1{,}53;\ \omega = -1{,}989448 \pm \sqrt{\left(-0{,}803542 + 0{,}384752 . \frac{27.(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)}$$

$$\text{V. } m = 1{,}54;\ \omega = -2{,}009830 \pm \sqrt{\left(-0{,}810973 + 0{,}394255 . \frac{27(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)}$$

$$\text{VI. } m = 1{,}55;\ \omega = -2{,}030292 \pm \sqrt{\left(-0{,}818304 + 0{,}403907 . \frac{27(3+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)}$$

& ensuite pour les rayons des faces:

$$a = b = \frac{2(m-1)(\varepsilon+3)}{3\varepsilon}h;\ c = \frac{(m-1)h}{m-3-\omega};\ d = \frac{(m-1)h}{1-m+\omega}.$$

Soudivisons ce cas selon les diverses valeurs de ε, & pour cet effet enveloppons dans les derniers membres la fraction $\frac{27}{2}$, & nous aurons:

$$\text{I. } m = 1{,}50;\ \omega = -1{,}928572 \pm \sqrt{\left(-0{,}780614 + 4{,}821430 . \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

$$\text{II. } m = 1{,}51;\ \omega = -1{,}948804 \pm \sqrt{\left(-0{,}788349 + 4{,}943646 . \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}.$$

$$\text{III. } m = 1{,}52;\ \omega = -1{,}969090 \pm \sqrt{\left(-0{,}795992 + 5{,}067914 . \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

$$\text{IV. } m = 1{,}53;\ \omega = -1{,}989448 \pm \sqrt{\left(-0{,}803542 + 5{,}194152 . \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

$$\text{V. } m = 1{,}54;\ \omega = -2{,}009830 \pm \sqrt{\left(-0{,}810973 + 5{,}322442 . \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

$$\text{VI. } m = 1{,}55;\ \omega = -2{,}030292 \pm \sqrt{\left(-0{,}818304 + 5{,}452745 . \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

I. Cas.

11. Posons $\varepsilon = 30$, de sorte que la distance des verres soit $bc = e = \frac{1}{30}h$, & $a = b = \frac{2}{3} . \frac{11}{10}(m-1)h$ & $x : y = 11 : 10$, d'où nous aurons pour nos six hypotheses:

I. m

I. $m = 1,50$; $\omega = -1,928572 \pm \sqrt{4,522959} = 0,198153$
II. $m = 1,51$; $\omega = -1,948804 \pm \sqrt{4,649661} = 0,207503$
III. $m = 1,52$; $\omega = -1,969090 \pm \sqrt{4,778713} = 0,216937$
IV. $m = 1,53$; $\omega = -1,989448 \pm \sqrt{4,910025} = 0,226410$
V. $m = 1,54$; $\omega = -2,009830 \pm \sqrt{5,043713} = 0,235991$
VI. $m = 1,55$; $\omega = -2,030292 \pm \sqrt{5,179715} = 0,245606$,

d'où l'on formera ainsi le reste du calcul :

	I	II	III	IV	V	VI
$m =$	1,500000	1,510000	1,520000	1,530000	1,540000	1,550000
$\omega =$	0,198153	0,207503	0,216937	0,226410	0,235991	0,245606
$m-\omega =$	1,301847	1,302497	1,303063	1,303590	1,304009	1,304394
$m-\omega-3 =$	-1,698153	-1,697503	-1,696937	-1,696410	-1,695991	-1,695606
$1-m+\omega =$	-0,301847	-0,302497	-0,303063	-0,303590	-0,304009	-0,304394
$l(m-1) =$	9,6989700	9,7075702	9,7160033	9,7242759	9,7323938	9,7403627
$l(m-3-\omega) =$	0,2299769	0,2298106	0,2296657	0,2295309	0,2294255	0,2293249
$l(1-m+\omega) =$	9,4797869	9,4807211	9,4815329	9,4822875	9,4828865	9,4834361
$l\frac{-c}{h} =$	9,4689931	9,4777596	9,4863376	9,4947450	9,5029683	9,5110378
$l\frac{-d}{h} =$	0,2191831	0,2268491	0,2344704	0,2419884	0,2495073	0,2569266
$a = b =$	$0,366667h$	$0,374000h$	$0,381333h$	$0,388667h$	$0,396000h$	$0,403333h$
$c =$	$-0,294437h$	$0,300441h$	$0,306434h$	$0,312424h$	$0,318396h$	$0,324368h$
$d =$	$-1,656468h$	$1,685967h$	$1,715815h$	$1,745776h$	$1,776263h$	$1,806868h$.

Le diametre de l'ouverture de ces verres sera déterminé par le rayon c comme le plus petit ; & si on le met égal à la troisieme partie du rayon c, le plus grand arc dans l'ouverture sera de 19°, qui ne semble pas être trop grand : or, posant $2y = \frac{1}{3}c$, on aura $2x = \frac{11}{30}c$, ou bien on donnera

au premier verre AB une ouverture de $\frac{11}{30}c$ &

au

au second verre CD une ouverture de $\frac{4}{5}c$ en diametre, & cette ouverture exprimée en pouces suffit pour grossir les objets $\frac{11}{3}h$ fois en diametre.

Or l'intervalle entre les deux verres doit être mis $= \frac{1}{30}h$. Le premier verre AB qui regarde l'objet sera donc également convexe des deux côtés, & l'autre CD concave, mais inégalement. Là-dessus je fais les remarques suivantes:

I. Si nous avions posé la distance des verres $bc = o$, comme j'ai fait dans un Mémoire précédent, nous aurions trouvé les rayons pour les hypotheses $m = 1{,}50;\ 1{,}53;\ 1{,}55$ de la maniere suivante:

	$m = 1{,}50$	$m = 1{,}53$	$m = 1{,}55$
$a = b =$	$0{,}333333h$	$0{,}353333h$	$0{,}366666h$
$c = -$	$0{,}316134h$	$0{,}336305h$	$0{,}349762h$
$d = -$	$1{,}192297h$	$1{,}249850h$	$1{,}286544h$.

II. Afin que nous puissions mieux comparer ces rayons avec ceux que nous venons de trouver pour l'intervalle $bc = \frac{1}{30}h$, augmentons-les en raison de $10 : 11$ pour rendre le premier verre AB le même de part & d'autre, & nous aurons pour l'intervalle $bc = o$:

	$m = 1{,}50$	$m = 1{,}53$	$m = 1{,}55$
$a = b =$	$0{,}366667$	$0{,}388667$	$0{,}403333$
$c = -$	$0{,}347747$	$0{,}369935$	$0{,}384738$
$d = -$	$1{,}311526$	$1{,}374835$	$1{,}415198$.

III. De là il est clair que, supposant le premier verre AB donné, la petite distance que je mets entre les verres $bc = \frac{1}{30}h$, exige un changement très considérable dans le verre concave, le rayon de sa face de devant devenant beaucoup plus petit, & celui de derriere d'autant plus grand. Et partant on ne doit pas être surpris, si les verres construits suivant les mesures données pour le cas où l'intervalle bc est $= o$, ne réussissent pas assez bien dans la pratique; puisque la moindre distance qu'on est obligé de mettre entre les verres, demande une construction assez différente.

IV.

IV. Un tel verre objectif, où l'intervalle entre les deux verres bc est $= \frac{1}{30}h$, est représenté dans la figure 4me, dont le foyer tomberoit environ à la distance de 5 pouces, qui pourroit bien être employé à produire un grossissement de 20 fois en diametre. Fig. 4.

V. Enfin on réussira d'autant plus sûrement dans la construction de semblables objectifs, pourvu que l'ouvrier ne s'écarte pas grossierement des mesures prescrites, qu'on peut déterminer par l'expérience le plus juste intervalle entre les verres qui fait évanouir la confusion. Or alors, si l'on veut produire une multiplication de M fois en diametre, il faut employer un verre oculaire dont la distance de foyer $= \frac{11\,h}{10\,M}$; donc, si $M = \frac{11}{3}h$, cette distance de foyer est $\frac{3}{10}$ pouce.

II. Cas.

12. Mettons un plus grand intervalle entre les deux verres, & supposons cet intervalle $bc = \frac{1}{12}h$, où h marque toujours la distance de foyer derriere le second verre CD, de sorte que $\epsilon = 12$ & $x : y = 15 : 12 = 5 : 4$, & pour le verre convexe $a = b = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}(m-1)h = \frac{5}{6}(m-1)h$. Or, pour abréger le calcul, il suffira de considérer trois hypotheses de refraction $m = 1,51$; $m = 1,53$; & $m = 1,55$, puisqu'il sera toujours aisé d'en conclure les déterminations pour toutes les autres qui pourroient avoir lieu dans le verre dont on se sert. Nous aurons donc:

I. $m = 1,51$; $\omega = -1,948804 \pm \sqrt{5,391209} = 0,373093$

II. $m = 1,53$; $\omega = -1,989448 \pm \sqrt{5,689148} = 0,395745$

III. $m = 1,55$; $\omega = -2,030292 \pm \sqrt{5,997627} = 0,418713$

$m =$

$m =$	1,510000	1,530000	1,550000
$\omega =$	0,373093	0,395745	0,418713
$m - \omega =$	1,136907	1,134255	1,131287
$m - \omega - 3 =$	−1,863093	−1,865745	−1,868713
$1 - m + \omega =$	−0,136907	−0,134255	−0,131287
$l(m-1) =$	9,7075702	9,7242759	9,7403627
$l(m - \omega - 3) =$	0,2702347	0,2708523	0,2715426
$l(1 - m + \omega) =$	9,1364257	9,1279305	9,1182217
$l\frac{-c}{h} =$	9,4373355	9,4534236	9,4688201
$l\frac{-d}{h} =$	0,5711445	0,5963454	0,6221410.

Donc si

	$m = 1,51$	$m = 1,53$	$m = 1,55$
$a = b =$	$0,425000h$	$0,441667h$	$0,458333h$
$c =$	$-0,273738h$	$0,284069h$	$0,294320h$
$d =$	$-3,725157h$	$3,947712h$	$4,189296h$.

Prenant le diametre de l'ouverture du second verre $CD = \frac{1}{3}c$, celui du premier verre AB sera $= \frac{5}{12}c$, & l'intervalle des deux verres doit être pris $= \frac{1}{12}h$. Si l'on se sert d'un oculaire dont la distance de foyer est $= r$, on grossira les objets $\frac{5h}{4r}$ de fois.

Ici je remarque que l'ouverture du premier verre AB ne sauroit être prise aussi grande que sa courbure le permettroit, puisqu'il faut se régler sur le verre concave. Ayant supposé ici $\mu = 3$, développons aussi l'hypothese $\mu = 2$, afin qu'on puisse choisir pour chaque cas les déterminations les plus convenables.

13. Posons donc $\mu = 2$, & laissons $\alpha = \frac{1}{2}$, de sorte que

$$a = b = \frac{(m-1)(\varepsilon+2)}{\varepsilon}h;\ c = \frac{(m-1)h}{m-\omega-2};\ d = \frac{(m-1)h}{1-m+\omega},\ \&\ x : y = \varepsilon + 2 : \varepsilon;$$

où

où pour grossir les objets M fois en diametre, il faut employer un oculaire de $\frac{h(2+\epsilon)}{M\epsilon} = \frac{[illegible]\, a}{M(m-1)}$ foyer. Ensuite, puisque $M = \frac{-8(2+\epsilon)}{\epsilon}$, nous aurons:

$$\omega = \tfrac{1}{2}A - B \pm \sqrt{\left(2F - E + \frac{8(2+\epsilon)}{\epsilon}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}B + D\right)\right)},$$

& partant pour les trois hypotheses principales:

$$m = 1{,}51;\ \omega = -1{,}084103 \pm \sqrt{\left(-0{,}136916 + 2{,}929568.\frac{2+\epsilon}{\epsilon}\right)}$$

$$m = 1{,}53;\ \omega = -1{,}109590 \pm \sqrt{\left(-0{,}134923 + 3{,}078016.\frac{2+\epsilon}{\epsilon}\right)}$$

$$m = 1{,}55;\ \omega = -1{,}135211 \pm \sqrt{\left(-0{,}132491 + 3{,}231256.\frac{2+\epsilon}{\epsilon}\right)}.$$

III. Cas.

14. Posons maintenant $\epsilon = 2$, de sorte que $bc = e = \frac{1}{2}h$, & $a = b = 2(m-1)h$ & $x : y = 2 : 1$. Si l'on veut grossir les objets M fois en diametre, on n'a qu'à employer un oculaire dont la distance de foyer est $= \frac{2h}{M}$.

Donc si [illegible] on aura

$$m = 1{,}51;\ \omega = -1{,}084103 \pm \sqrt{5{,}722220} = 1{,}308013$$

$$m = 1{,}53;\ \omega = -1{,}109590 \pm \sqrt{6{,}021109} = 1{,}344205$$

$$m = 1{,}55;\ \omega = -1{,}135211 \pm \sqrt{6{,}330021} = 1{,}380743,$$

& l'on fera le calcul suivant:

$m =$	1,510000	1,530000	1,550000
$\omega =$	1,308013	1,344205	1,380743
$m - \omega =$	0,201987	0,185795	0,169257
$m - \omega - 2 =$	$-$ 1,798013	1,814205	1,830743
$1 - m + \omega =$	$+$ 0,798013	0,814205	0,830743
$l(m-1) =$	9,7075702	9,7242759	9,7403627
$lm - \omega - 2 =$	$-$0,2547928	0,2586863	0,2626274
$l1 - m + \omega =$	$+$9,9020099	9,9107337	9,9194667
$l\frac{-c}{h} =$	9,4527774	9,4655896	9,4777353
$l\frac{d}{h} =$	9,8055603	9,8135422	9,8208960
$a = b =$	1,020000 h	1,060000 h	1,100000 h
$c =$	$-$0,283646 h	0,292139 h	0,300424 h
$d =$	$+$ 0,639088 h	0,650942 h	0,660535 h.

L'ouverture de ces verres doit être réglée ſur le rayon c, d'où l'on mettra le diametre de l'ouverture du ſecond verre CD $= \frac{1}{3}c$, & celui du premier verre AB $= \frac{2}{3}c$. Un tel objectif compoſé eſt repréſenté dans la 5[me] figure; or le groſſiſſement doit être eſtimé par l'ouverture du premier AB; donc, ſi $\frac{2}{3}c$ eſt de 3 pouces, on pourra groſſir 100 fois, & alors l'oculaire ſera $= \frac{1}{10}h$ en foyer. Puiſque nous avons à peu près $c = \frac{3}{10}h$, cette multiplication demande $\frac{1}{5}h = 3$ pouces; donc $h = 15$ pouces, & l'oculaire $= \frac{3}{10}$ pouce. En général donc, ſi l'on veut groſſir M fois les objets en diametre, il faut prendre $h = \frac{3}{20}$M pouces, & le foyer tombera depuis le premier verre AB à la diſtance $e + h = \frac{9}{40}$M pouces, & l'oculaire reſtera toujours de $\frac{3}{10}$ pouce. Or, en employant un verre objectif de la premiere eſpece, la même multiplication, avec le même oculaire, demanderoit une diſtance de foyer de $\frac{3}{10}$M $= \frac{12}{40}$M pouces; donc notre lunette ici ſera plus courte d'un quart, ce qui eſt un avantage aſſez conſidérable.

Fig. 5.

15. J'ai remarqué que, pour la plûpart des verres dont on ſe ſert dans les lunettes, la raiſon de refraction eſt aſſez exactement comme

me

me 1,54 à 1; & il sera bon d'ajouter la Table suivante tirée du premier cas.

Table des verres objectifs composés (fig. 4.)

exprimée en pouces, & milliemes parties.

Distance de foyer après le second verre.	Distance du premier verre au second.	Rayon de convexité du premier verre.	Pour le second verre concave des deux côtés rayon de la face de devant.	rayon de la face de derriere.	Diametre de l'ouverture.	grossit les objets tant de fois.
1	0,033	0,396	0,318	1,776	0,11	3,67
2	0,067	0,792	0,637	3,553	0,22	7,33
3	0,100	1,188	0,955	5,329	0,33	11,00
4	0,133	1,584	1,274	7,105	0,44	14,67
5	0,167	1,980	1,592	8,881	0,55	18,33
6	2,200	2,376	1,910	10,658	0,66	22,00
8	0,267	3,168	2,547	14,210	0,88	29,33
10	0,333	3,960	3,184	17,763	1,10	36,67
12	0,400	4,752	3,820	21,316	1,32	44,00
15	0,500	5,940	4,776	26,644	1,65	55,00
18	0,600	7,128	5,731	31,973	1,98	66,
21	0,700	8,316	6,686	37,302	2,31	77
24	0,800	9,504	7,641	42,631	2,64	88
30	1,000	11,880	9,552	53,288	3,30	110
36	1,200	14,256	11,462	63,946	3,96	132
42	1,400	16,632	13,373	74,603	4,62	154
48	1,600	19,008	15,283	85,261	5,28	176
54	1,800	21,384	17,193	95,919	5,94	198
60	2,000	23,760	19,104	106,576	6,60	220
72	2,400	28,512	22,924	127,892	7,92	264
84	2,800	33,264	26,746	149,206	9,24	308
96	3,200	38,016	30,566	170,522	10,56	352
108	3,600	42,768	34,386	191,838	11,88	396
120	4,000	47,520	38,208	213,152	13,20	440
144	4,800	57,024	45,848	255,784	15,84	528

Le verre oculaire est supposé ici de $\frac{3}{10}$ pouce.

16. Au

16. Au cas que la refraction du verre soit différente de la raison 1,54 : 1 que j'ai supposée dans cette Table, j'ajoute les déterminations suivantes pour les hypotheses 1,53 : 1; 1,54 : 1; 1,55 : 1, parce qu'il semble que tous les verres y sont compris.

I. La distance entre le premier verre AB & le second CD est $\frac{1}{30}h$.

II. Le foyer commun tombe après le second verre à la distance $= h$.

Hypotheses de refraction	1,53:1	1,54:1	1,55:1
III. Le premier verre AB étant également convexe des deux côtés, le rayon de chaque face est - - - -	0,388667 *h*	0,396000 *h*	0,403333 *h*
IV. Pour le second verre CD concave des deux côtés, le rayon de sa face de devant est - -	0,312424 *h*	0,318396 *h*	0,324368 *h*
& de sa face de derriere - -	1,745776 *h*	1,776263 *h*	1,806868 *h*
V. Diametre de l'ouverture du premier verre AB est - -	0,114555 *h*	0,116745 *h*	0,118935 *h*
VI. du second verre CD est -	0,104141 *h*	0,106132 *h*	0,108123 *h*
VII. Exprimant la distance *h* en pouces, ces verres pourront grossir les objets tant de fois	3,81850 *h*	3,89150 *h*	3,96450 *h*
VIII. Pour cet effet il faudra se servir d'un oculaire dont la distance de foyer est - - -	0,288 pouc.	0,283 pouc.	0,277 pouc.

Or en général, quand on employe un verre oculaire dont la distance de foyer est $= r$, les objets seront grossis tant de fois $\frac{11h}{10r}$. Donc, établissant la regle, qu'un grossissement de 100 fois dans le diametre demande une ouverture de 3 pouces dans le premier verre objectif, on ne doit pas employer un oculaire dont la distance de foyer soit plus petite que celle je viens de marquer.

17. Dé-

17. Développons de la même maniere le second cas où $e = \frac{1}{12} h$, & nous aurons:

I. La distance entre les deux verres AB & CD est $\frac{1}{12} h$.

II. Le foyer commun tombe à la distance $= h$, après le second verre CD.

Hypotheses de refraction	1,53:1	1,54:1	1,55:1
III. Le premier verre étant également convexe des deux côtés, le rayon de chaque face est	0,441667 *h*	0,450000 *h*	0,458333 *h*
IV. Le second verre étant concave des deux côtés, le rayon de sa face de devant est - -	0,284069 *h*	0,289195 *h*	0,294320 *h*
& de sa face de derriere -	3,947712 *h*	4,068504 *h*	4,189296 *h*
V. Diametre de l'ouverture du premier verre AB - - -	0,118361 *h*	0,120496 *h*	0,122634 *h*
VI. du second verre CD - -	0,094689 *h*	0,096398 *h*	0,098107 *h*
VII. Exprimant la distance *h* en pouces, ces objectifs pourront grossir les objets tant de fois	3,9454 *h*	4,0165 *h*	4,0878 *h*
VIII. Pour cet effet il faudra se servir d'un oculaire dont la distance de foyer est - - -	0,316 pouc.	0,311 pouc.	0,305 pouc.

Or en général, quand on employe un verre oculaire dont la distance de foyer $= r$, les objets seront grossis $\frac{5h}{4r}$ fois. Ici on voit qu'avec la même distance h on peut produire un plus grand grossissement que dans le cas précédent, & cela encore avec un plus grand oculaire, ce qui est un avantage assez considérable. Cette circonstance m'engage à développer encore quelques cas de l'hypothese $\mu = 3$, en supposant la distance des verres $bc = e$ encore plus grande.

IV.

IV. Cas.

18. Posons $\varepsilon = 6$ de sorte que la distance des verres $bc = \frac{5}{6}h$ & $a = b = (m-1)h$; ensuite $x : y = 3 : 2$, & un oculaire dont la distance de foyer $= r$ grossira $\frac{3h}{2r}$ de fois. Nous aurons pour les hypotheses $m = 1{,}51$; $m = 1{,}53$, & $m = 1{,}55$ les formules suivantes pour la valeur de ω.

I. $m = 1{,}51$; $\omega = -1{,}948804 \pm \sqrt{6{,}627120} = 0{,}625515$

II. $m = 1{,}53$; $\omega = -1{,}989448 \pm \sqrt{6{,}987686} = 0{,}653975$

III. $m = 2{,}55$; $\omega = -2{,}030292 \pm \sqrt{7{,}360813} = 0{,}682790$

$m =$	1,510000	1,530000	1,550000
$\omega =$	0,625515	0,653975	0,682790
$m - \omega =$	0,884485	0,876025	0,867210
$m - \omega - 3 =$	−2,115515	2,123975	2,132790
$1 - m + \omega =$	+0,115515	0,123975	0,132790
$l(m-1) =$	9,7075702	9,7242759	9,7403627
$l(m - \omega - 3) =$	−0,3254161	0,3271494	0,3289482
$l(1 - m + \omega) =$	+9,0626383	9,0933343	9,1231654
$l\,\frac{-c}{h} =$	9,3821541	9,3971265	9,4114145
$l\,\frac{+d}{h} =$	0,6449319	0,6309416	0,6171973
$a = b =$	0,510000h	0,530000h	0,550000h
$c =$	−0,241076h	0,249532h	0,257878h
$d =$	+4,415012h	4,275055h	4,141886h

Ici je remarque que, puisque $\frac{p}{m-1} = h\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{\varepsilon + \mu}{\varepsilon\mu}h$ & $\frac{q}{m-1} = \frac{h}{1-\mu}$, à cause de $\mu = 3$ & $\varepsilon = 6$, nous aurons

$\frac{p}{m-1}$

$\frac{p}{m-1} = \frac{1}{2}h$, & $\frac{q}{m-1} = -\frac{1}{2}h$. Or $\frac{p}{m-1}$ exprime la distance de foyer du premier verre convexe AB, & $\frac{q}{m-1}$ celle de l'autre verre CD est précisément égale à la distance de foyer du premier verre AB. Au reste, le verre CD devient dans ce cas ménisque, étant concave en avant & convexe de l'autre côté.

19. Ce cas nous fournit la description suivante de verres objectifs composés:

I. La distance entre les verres AB & CD est $\frac{1}{8}h$.

II. Le foyer commun tombe à la distance $= h$ après le second verre CD.

Hypothèses de refraction	1,53:1	1,54:1	1,55:1
III. Le premier verre étant également convexe des deux côtés, le rayon en est	0,530000 h	0,540000 h	0,550000 h
IV. Le second verre a sa face de devant concave, dont le rayon est	0,249532 h	0,253731 h	0,257878 h
& sa face de derriere convexe, dont le rayon est	4,275955 h	4,207610 h	4,141886 h
V. Diametre de l'ouverture du premier verre AB	0,124765 h	0,126865 h	0,128938 h
VI. du second verre CD	0,083177 h	0,084577 h	0,085959 h
VII. Exprimant la distance h en pouces, ces objectifs pourront grossir les objets tant de fois	4,1588 h	4,2288 h	4,2978 h
VIII. Pour cet effet il faut se servir d'un oculaire dont la distance de foyer	0,367 pouc.	0,358 pouc.	0,349 pouc.

Or

Or, en général, quand on se sert d'un oculaire dont la distance de foyer est $= r$, les objets seront grossis tant $\frac{3h}{2r}$ de fois. Il est donc clair que l'avantage de ces objectifs est encore plus grand que celui des précédens, puisque la même distance h produit un plus grand grossissement, & cela moyennant un plus grand oculaire.

V. Cas.

20. Posons maintenant $\varepsilon = 3$, en laissant $\mu = 3$, & nous aurons $a = b = \frac{4}{3}(m-1)h$; & $x : y = 2 : 1$, de sorte qu'un oculaire dont la distance de foyer est r, grossira $\frac{2h}{r}$ fois. Donc, pour les mêmes hypotheses principales, nous aurons:

$m = 1,51$; $\omega = -1,948804 \pm \sqrt{9,098943} = 1,067642$
$m = 1,53$; $\omega = -1,989448 \pm \sqrt{9,584762} = 1,106479$
$m = 1,55$; $\omega = -2,030292 \pm \sqrt{10,087186} = 1,145741$

$m =$	1,510000	1,530000	1,550000
$\omega =$	1,067642	1,106479	1,145741
$m - \omega =$	0,442358	0,423521	0,404259
$m - \omega - 3 =$	$-2,557642$	2,576479	2,595741
$1 - m + \omega =$	$+0,557642$	0,576479	0,595741
$l(m-1) =$	9,7075702	9,7242759	9,7403627
$l(m-\omega-3) =$	$-0,4078397$	0,4110266	0,4142614
$l(1-m+\omega) =$	$+9,7463554$	9,7607834	9,7750575
$l - \frac{c}{h} =$	9,2997305	9,3132493	9,3261013
$l + \frac{d}{h} =$	9,9612148	9,9634925	9,9653052
$a = b =$	0,680000 h	0,706667 h	0,733333 h
$c =$	$-0,199402\,h$	0,205707 h	0,211885 h
$d =$	$+0,914565\,h$	0,919375 h	0,923220 h

Les

Les diſtances de foyer de ces deux verres ſeront:

celle du premier $\frac{p}{m-1} = \frac{2}{3}h$; & de l'autre $\frac{q}{m-1} = -\frac{1}{2}h$.

L'ouverture du ſecond verre étant priſe $= \frac{1}{3}c$, celle du premier verre ſera en diametre $= \frac{2}{3}c$, d'où l'on pourra obtenir un groſſiſſement de $\frac{200}{9}c$ ſelon les diametres, lorſqu'on exprime la diſtance c en pouces. Donc, ſi nous poſons ce nombre $\frac{200}{9}c = M$, la diſtance de foyer du verre oculaire ſera $r = \frac{2h}{M}$. Or la diſtance de foyer du verre objectif compoſé depuis le premier verre eſt $= e + h = \frac{4}{3}h$; d'où il eſt évident que ces lunettes ſeront encore plus courtes pour le même groſſiſſement.

21. Ce cas fournit donc une nouvelle eſpece de verres objectifs, dont voici la deſcription.

I. La diſtance entre les verres AB & CD eſt $\frac{1}{3}h$.

II. Le foyer commun tombe à la diſtance $= h$ depuis le ſecond verre CD.

Hypotheſes de refraction:	1,53:1	1,54:1	1,55:1
III. Le premier verre étant également convexe des deux côtés, le rayon de ſes faces eſt	0,706667 h	0,720000 h	0,733333 h
IV. Du ſecond verre la face de devant eſt concave & le rayon en eſt	0,205707 h	0,208780 h	0,211885 h
or la face de derriere eſt convexe, le rayon étant	0,919375 h	0,921176 h	0,923220 h
V. Diametre de l'ouverture du premier verre eſt	0,137138 h	0,139186 h	0,141256 h
VI. & du ſecond verre	0,068569 h	0,069593 h	0,070628 h
VII. Exprimant h en pouces, ces verres pourront groſſir tant de fois	4,5713 h	4,6395 h	4,7085 h
VIII. Pour cet effet il faut ſe ſervir d'un oculaire dont la diſtance de foyer	0,437 pouc.	0,431 pouc.	0,425 pouc.

Donc,

Donc, pour produire un grossissement de 100 fois, il suffit de prendre $h = 22$ pouces environ; & puisque $e = \frac{1}{3}h = 7\frac{1}{3}$ pouces, la distance depuis le premier verre jusqu'au foyer sera $29\frac{1}{3}$ pouces; & partant toute la lunette sera à peine de 30 pouces, & produira le même effet qu'une lunette ordinaire de 30 pieds. Et une telle lunette de 60 pouces ou de 5 pieds fera le même effet qu'une lunette ordinaire de plus de 100 pieds.

22. Toutes ces constructions que je viens de développer, m'ont été fournies par la seule hypothese $\mu = 3$, qui paroit très propre pour les objectifs: or on voit que les deux nombres ε & μ qu'on peut prendre à volonté, fournissent une infinité d'especes d'objectifs qui sont également délivrés de toute confusion causée par l'ouverture des verres. Mais, puisqu'on peut aussi prendre le nombre μ négatif, nous en tirerons un tout autre genre d'objectifs, où le premier verre AB sera concave & l'autre ED convexe. Pour en développer quelque espece, posons $\mu = -2$, & qu'il reste $\alpha = \frac{1}{2}$, afin que le premier verre AB devienne également concave des deux côtés; de là résulte $M = \frac{-8(\varepsilon - 2)}{3\varepsilon}$, & il faut que cette quantité

$$-2F - 9E + \frac{8(\varepsilon - 2)}{3\varepsilon}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}B + D\right) \text{ soit positive,}$$

qui dans le cas $m = 1{,}54$ se réduit à

$$-2{,}307558 + \tfrac{8}{3} \cdot 0{,}394255 \cdot \frac{\varepsilon - 2}{\varepsilon} \text{ toujours négative.}$$

Il faut donc donner à μ une plus grande valeur, & partant mettons $\mu = -3$, d'où $M = \frac{-27(\varepsilon - \mu)}{4\varepsilon}$, & ce nombre $-3F - 16E + \frac{27(\varepsilon - \mu)}{4\varepsilon}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}B + D\right)$ doit être positif, ce qui n'est pas encore possible. On sera donc obligé de mettre au moins $\mu = -7$. Mais lorf-

lorsqu'on donne à μ une si grande valeur, les distances de foyer des deux verres deviennent trop petites par rapport à celle de l'objectif entier, pour qu'on en puisse retirer quelque fruit dans la pratique.

23. Examinons donc plutôt encore un cas où la valeur de μ est positive, mais très petite; & puisqu'il faut qu'elle surpasse l'unité, supposons $\mu = \frac{3}{2}$, & comme auparavant $\alpha = \frac{1}{2}$; de là nous aurons

$$M = -\frac{27}{8} \cdot \frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} = -\frac{27}{4} \cdot \frac{2\varepsilon + 3}{2\varepsilon}, \text{ \&}$$

$$a = b = \frac{2(m-1)(2\varepsilon+3)}{3\varepsilon} h;\ c = \frac{(m-1)h}{m-\omega-\frac{3}{2}};\ d = \frac{m-1}{1-m+\omega} h;$$

ensuite les distances de foyer $\frac{p}{m-1} = \frac{2\varepsilon+3}{3\varepsilon} h$; & $\frac{q}{m-1} = -2h$,

& pour les ouvertures $x : y = \varepsilon + \frac{3}{2} : \varepsilon$. De plus, joignant un oculaire dont la distance de foyer $= r$, les objets seront grossis tant de fois $\frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon} \cdot \frac{h}{r}$. Or la valeur de ω sera déterminée par cette équation:

$$\omega = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{3}{4}B \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}F - \tfrac{1}{4}E + \tfrac{27}{4} \cdot \frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}B + D\right)\right)},$$

& partant pour nos trois hypotheses nous aurons:

$$m = 1{,}53;\ \omega = -0{,}669661 \pm \sqrt{\left(0{,}019039 + 2{,}597076 \cdot \frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon}\right)}$$

$$m = 1{,}54;\ \omega = -0{,}678648 \pm \sqrt{\left(0{,}021744 + 2{,}661221 \cdot \frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon}\right)}$$

$$m = 1{,}55;\ \omega = -0{,}687676 \pm \sqrt{\left(0{,}024545 + 2{,}726372 \cdot \frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon}\right)}$$

VI. Cas.

24. Commençons par une grande valeur de ε, & soit $\varepsilon = 15$; donc $a = b = \frac{22}{15}(m-1)h$; $x : y = 11 : 10$ & $\frac{p}{m-1} = \frac{11}{15}h$.

$m = 1,53$; $\omega = -0,669661 \pm \sqrt{2,875822} = 1,026164$

$m = 1,54$; $\omega = -0,678648 \pm \sqrt{2,949087} = 1,038642$

$m = 1,55$; $\omega = -0,687676 \pm \sqrt{3,023554} = 1,051161$

$m =$	1,530000	1,540000	1,550000
$\omega =$	1,026164	1,038642	1,051161
$m - \omega =$	0,503836	0,501358	0,498839
$m - \omega - \frac{3}{2} =$	−0,996164	0,998642	1,001161
$1 - m + \omega =$	+0,496164	0,498642	0,501161
$l(m-1) =$	9,7242759	9,7323938	9,7403627
$l(m - \omega - \frac{3}{2}) =$	−9,9983309	9,9994098	0,0005039
$l(1 - m + \omega) =$	9,6956252	9,6977888	9,6999773
$l\frac{c}{h} =$	9,7259450	9,7329840	9,7398588
$l\frac{d}{h} =$	0,0286507	0,0346050	0,0403854
$a = b =$	0,777333 h	0,792000 h	0,806667 h
$c =$	−0,532041 h	0,540734 h	0,549362 h
$d =$	1,068195 h	1,082941 h	1,097451 h

Ici un oculaire dont la distance de foyer est $= r$, grossira les objets $\frac{11}{10} \cdot \frac{h}{r}$ fois, & partant si le grossissement est $= M$, on aura $r = \frac{11 h}{10 M}$.

25. Considérons cette espece d'objectifs plus particulierement.

I. La distance entre les verres est $= \frac{1}{15} h$.

II. Le foyer commun tombe à la distance h, derriere le second verre.

Hypotheses de refraction:	1,53:1	1,54:1	1,55:1
III. Le premier verre étant également convexe des deux côtés, le rayon en est - -	0,777333 h	0,792000 h	0,806667 h
IV. Du second verre la face de devant est concave & le rayon en est - - -	0,532041 h	0,540734 h	0,549362 h
or la face de derriere est convexe, dont le rayon - -	1,068195 h	1,082941 h	1,097451 h
V. Diametre de l'ouverture du premier verre - -	0,195081 h	0,198269 h	0,201433 h
VI. celui du second verre	0,177347 h	0,180245 h	0,183121 h
VII. Exprimant la distance h en pouces, ces objectifs grossiront tant de fois - -	6,5027 h	6,6089 h	6,7144 h
VIII. Pour cet effet il faut se servir d'un oculaire dont la distance de foyer - -	0,169 pouc.	0,166 pouc.	0,163 pouc.

Donc, pour produire un grossissement de 100 fois, il suffit de prendre $h = 15$ environ: & la longueur de la lunette ne deviendroit que de 16 pouces, ce qui est encore beaucoup plus avantageux que les objectifs précédens. Une telle lunette de 3 pieds surpasseroit donc très considérablement une ordinaire de 100 pieds. Mais, comme l'oculaire est si petit, il conviendra peut-être mieux d'en employer un plus grand & de se contenter d'un moindre grossissement.

VII. Cas.

26. Soit maintenant $\varepsilon = 3$; ou bien $e = \frac{3}{5} h$; & nous aurons $a = b = 2(m-1)h$, & $x : y = 3 : 2$; ensuite les distances de foyer

foyer $\frac{p}{m-1} = h$; & $\frac{q}{m-1} = -2h$; de plus un verre oculaire dont la distance de foyer est $= r$, grossira tant de fois $\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{r}$. Le reste du calcul suit:

$m = 1,53$; $\omega = -0,669661 \pm \sqrt{3,914553} = 1,308887$

$m = 1,54$; $\omega = -0,678648 \pm \sqrt{4,013575} = 1,324743$

$m = 1,55$; $\omega = -0,687676 \pm \sqrt{4,114103} = 1,340649$

$m =$	1,530000	1,540000	1,550000
$\omega =$	1,308887	1,324743	1,340649
$m - \omega =$	0,221113	0,215257	0,209351
$m - \omega - \frac{3}{2} =$	$-$1,278887	1,284743	1,290649
$1 - m + \omega =$	0,778887	0,784743	0,790649
$l(m-1) =$	9,7242759	9,7323938	9,7403627
$l(m - \omega - \frac{3}{2}) =$	$-$0,1068322	0,1088162	0,1108081
$l(1 - m + \omega) =$	9,8914744	9,8947274	9,8979838
$l\,\frac{c}{h} =$	9,6174437	9,6235776	9,6295546
$l\,\frac{d}{h} =$	$+$9,8328015	9,8376664	9,8423789
$a = b =$	1,060000h	1,080000h	1,100000h
$c =$	$-$0,414423h	0,420318h	0,426142h
$d =$	$+$0,680458h	0,688123h	0,695631h

Si nous comparons ce cas avec le Vme, où est pareillement $\epsilon = 3$, mais $\mu = 3$, nous voyons que le rayon c qui est le plus petit, est ici 2 fois plus grand que là, & partant ces objectifs admettront une plus grande ouverture, ce qui nous peut procurer de très grands avantages.

27. Considérons ces objectifs plus particuliérement, & dévéloppons-en toutes les déterminations.

I. La

I. La distance des verres est $\frac{1}{3}h$.

II. Le foyer de l'objectif tombe à la distance h depuis le second verre CD.

Hypotheses de refraction:	1,53:1	1,54:1	1,55:1
III. Le premier verre étant également convexe des deux côtés, le rayon en est - -	1,060000 h	1,080000 h	1,100000 h
IV. du second verre la face de devant est concave & le rayon en est - - - -	0,414423 h	0,420318 h	0,426142 h
or la face de derriere est convexe, dont le rayon - -	0,680458 h	0,688123 h	0,695631 h
V. Le diametre de l'ouverture du premier verre est -	0,310816 h	0,315238 h	0,319606 h
VI. celui du second verre -	0,207211 h	0,210159 h	0,213071 h
VII. Exprimant la distance h en pouces, ces objectifs pourront grossir tant de fois - -	10,3605 h	10,5079 h	10,6535 h
VIII. Pour produire cet effet il faut employer un oculaire dont la distance de foyer -	0,149 pouc.	0,145 pouc.	0,141 pouc.

Cet effet seroit bien surprenant, si l'exécution n'opposoit des obstacles peut-être insurmontables qu'on ne sauroit prévoir. Pour produire un grossissement de 100 fois en diametre, il suffira de mettre $h = 9\frac{1}{2}$, & puisque $e = 3\frac{1}{6}$ pouces, toute la lunette ne seroit que de $13\frac{2}{3}$, & une lunette d'environ 2 pieds égaleroit presque les ordinaires de 100 pieds. Cependant, quand on voudroit se contenter d'un moindre grossissement, ces objectifs procureroient toujours des avantages très considérables.

28. L'hypothese $\mu = \frac{1}{4}$ a cet avantage, qu'elle donne la valeur de M à peu près la plus petite; & puisque les objectifs qu'elle fournit paroissent l'emporter sur les autres, nous pourrons donc encore augmenter cet avantage, en donnant à α aussi une valeur telle, que

$\alpha\alpha - \alpha B + D$ devienne le plus petit, ce qui arrive en posant $\alpha = \frac{B}{2}$, d'où l'on aura :

$$a = \tfrac{9}{8}(m-1) . \frac{2e+3}{3e} h; \ \& \ b = 9(m-1) . \frac{2e+3}{3e} h,$$

& pour les trois hypotheses

$$m = 1,53; \ \omega = -0,669661 \pm \sqrt{\left(0,019039 + 1,623632 . \frac{2e+3}{2e}\right)}$$

$$m = 1,54; \ \omega = -0,678648 \pm \sqrt{\left(0,021744 + 1,647991 . \frac{2e+3}{2e}\right)}$$

$$m = 1,55; \ \omega = -0,687676 \pm \sqrt{\left(0,024545 + 1,673096 . \frac{2e+3}{2e}\right)}$$

VIII. Cas.

29. Soit $e = 15$, & nous aurons $a = \frac{33}{40}(m-1)h$ & $b = \frac{33}{5}(m-1)h$

$$m = 1,53; \ \omega = -0,669661 \pm \sqrt{1,805034} = 0,673854$$

$$m = 1,54; \ \omega = -0,678648 \pm \sqrt{1,832018} = 0,674872$$

$$m = 1,55; \ \omega = -0,687676 \pm \sqrt{1,864950} = 0,677955$$

$m =$	1,530000	1,540000	1,550000
$\omega =$	0,673854	0,674872	0,677955
$m - \omega =$	0,856146	0,865128	0,872045
$m - \omega - \frac{3}{2} =$	−0,643854	0,634872	0,627955
$1 - m + \omega =$	0,143854	0,134872	0,127955
$l(m-1) =$	9,7242759	9,7323938	9,7403627
$l(m - \omega - \frac{3}{2}) =$	−9,8087874	9,8026862	9,7979286
$l(1 - m + \omega) =$	9,1579220	9,1299219	9,1070573
$l\frac{-c}{h} =$	9,9154885	9,9297076	9,9424341
$l\frac{d}{h} =$	0,5663539	0,6024719	0,6333054
$a =$	0,437250 h	0,445500 h	0,453750 h
$b =$	3,498000 h	3,564000 h	3,630000 h
$c =$	−0,823168 h	0,850565 h	0,875859 h
$d =$	3,684290 h	4,003795 h	4,298386 h

Or

Or ici il faut régler l'ouverture sur la premiere face, & partant elle deviendra plus petite que dans l'hypothese précédente, qui est par conséquent préférable à celle-ci.

IX. Cas.

30. Mais posons $e = 3$, pour avoir $a = \frac{9}{8}(m-1)h$ & $b = 9(m-1)h$.

$m =$	1,530000	1,540000	1,550000
$\omega =$	0,897019	0,900468	0,904238
$m - \omega =$	0,632981	0,639532	0,645762
$m - \omega - \frac{3}{2} =$	−0,867091	0,860468	0,854238
$1 - m + \omega =$	0,367081	0,360468	0,354238
$l(m-1) =$	9,7242759	9,7323938	9,7403627
$l(m - \omega - \frac{3}{2}) =$	−9,9380285	9,9347347	9,9315789
$l(1 - m + \omega) =$	9,5647619	9,5568667	9,5492952
$l\frac{-c}{h} =$	9,7862474	9,7976591	9,8087838
$l\frac{d}{h} =$	0,1595140	0,1755271	0,1910675
$a =$	0,596250 h	0,607500 h	0,618750 h
$b =$	4,770000 h	4,860000 h	4,950000 h
$c =$	−0,611290 h	0,627565 h	0,643848 h
$d =$	+1,443823 h	1,498053 h	1,552628 h

Ces objectifs n'admettent point une si grande ouverture que ceux du VII. Cas. Il y auroit bien quelque chose à gagner en posant $a = \frac{3}{4}$, ou environ; mais alors il faudroit employer un trop petit oculaire; ce qui est la raison pourquoi je ne pousserai pas plus loin ces recherches.

31. Je remarque donc, en général, qu'on peut toujours déterminer la figure des deux verres, lorsque les distances de foyer de ces deux verres avec leur distance $= e$ est donnée, pourvu que le premier soit convexe, & l'autre concave, afin que toute confusion relative à l'ouverture évanouisse. Pour cet effet, supposons la distance de foyer

du

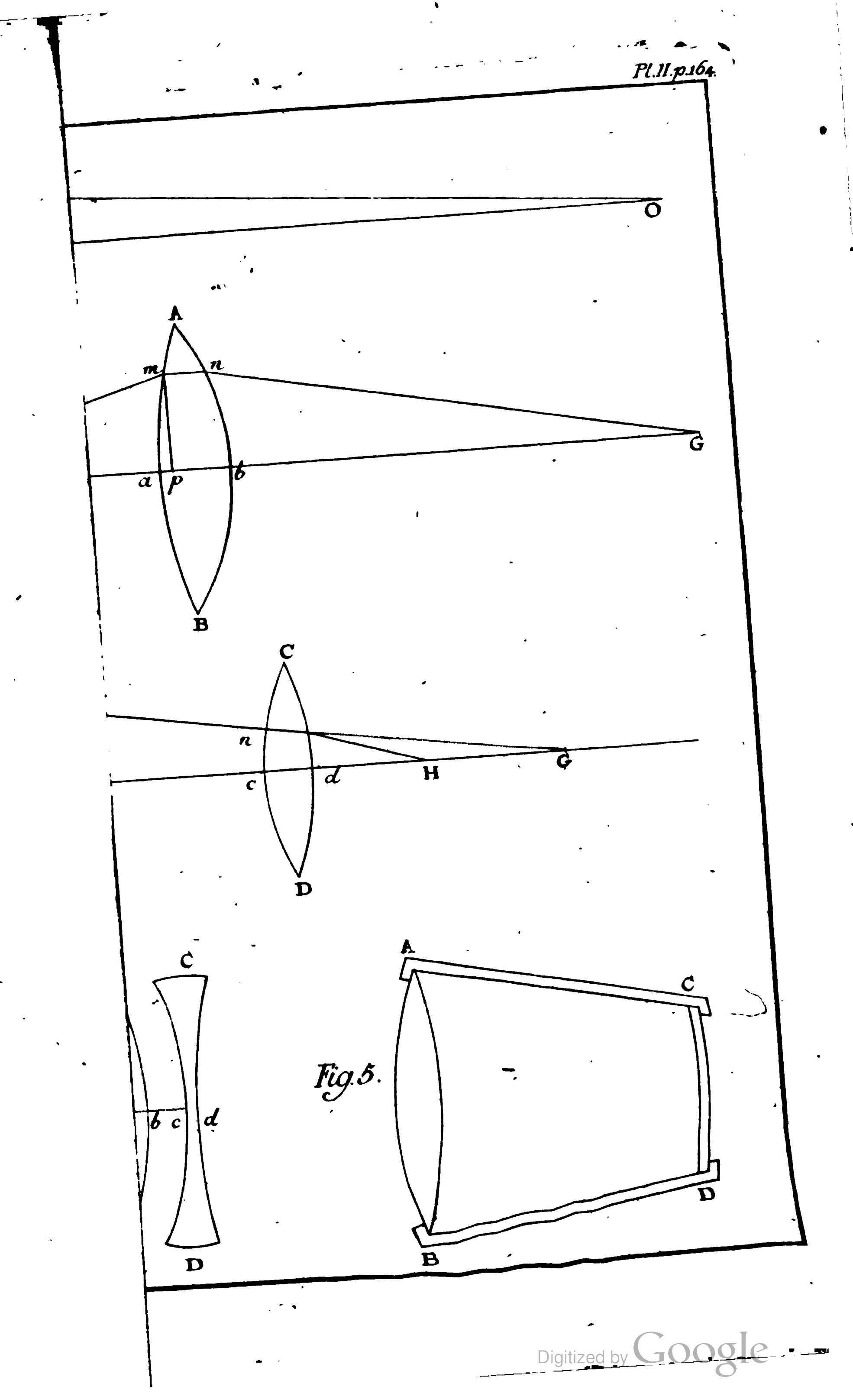
du premier verre AB $= \zeta e$, & celle de l'autre CD $= - \eta e$: & les équations

$$\zeta e = \frac{\zeta h}{\varepsilon} = \frac{h(\varepsilon + \mu)}{\varepsilon\mu} \quad \& \quad \eta e = \frac{\eta h}{\varepsilon} = \frac{h}{\mu - 1}$$

donnent $\varepsilon + \mu = \zeta\mu$ & $\eta(\mu - 1) = \varepsilon$; donc $\eta\mu + \mu - \eta = \zeta\mu$, & partant $\mu = \frac{\eta}{1 + \eta - \zeta}$ & $\varepsilon = \frac{(\zeta - 1)\eta}{1 + \eta - \zeta}$. Or il faut que $\mu > 1$; donc $1 + \eta > \zeta$ & $\zeta > 1$; ou bien ζ doit être contenu entre les limites 1 & $1 + \eta$.

32. Outre cela je remarque que ces objectifs composés représentent les images des objets dans la même grandeur que feroit un verre simple dont la distance de foyer $= \frac{\varepsilon + \mu}{\varepsilon} h$; de sorte que, si l'on y joint un oculaire dont la distance de foyer $= r$, on obtient un grossissement de $\frac{\varepsilon + \mu}{\varepsilon} \cdot \frac{h}{r}$ fois, comme j'ai déjà observé ci-dessus. Mais on pourroit aussi construire les verres oculaires suivant ces regles en prenant la quantité h fort petite, de sorte que $\frac{\varepsilon + \mu}{\varepsilon} h$ devînt égal à la distance de foyer que le verre oculaire doit avoir, & les derniers cas seront les plus propres pour ce dessein, puisque les rayons des faces ne deviennent pas trop petits. Or un tel oculaire devroit être placé de façon que le verre convexe regardât l'œil, & alors on jouiroit de ce grand avantage, que l'oculaire ne causeroit pas une nouvelle confusion, comme il arrive ordinairement. Mais, en employant de cette sorte plusieurs verres, il se présente une nouvelle recherche qui regarde leur disposition nécessaire afin que les couleurs d'iris évanouissent, ou que les rayons des diverses couleurs qui émanent de chaque point de l'objet, se réunissent dans la même direction en entrant dans l'œil. Cet article étant de la derniere importance, sera le sujet d'un Mémoire particulier.

SUR


O
A
m
n
G
a
p
b
B
C
n
c
d
H
G
D
C
b
c
d
D
A
C
Fig. 5.
D
B

SUR

LA SOLUTION DES PROBLEMES INDÉTERMINÉS DU SECOND DEGRÉ.

PAR M. DE LA GRANGE. (*)

Lorsque l'équation finale à laquelle conduit la solution d'une question, renferme plus d'une inconnue, le problème est indéterminé; & envisagé généralement, il est susceptible d'une infinité de solutions. Mais si la nature de la question exige que les quantités cherchées soient rationelles, ou même qu'elles soient exprimées par des nombres entiers, alors le nombre des solutions peut être très-limité; & la difficulté se réduit à trouver parmi toutes les solutions possibles, celles qui peuvent satisfaire à la condition prescrite. Quand l'équation finale n'est que du premier degré, toutes les solutions sont rationelles par la nature même de cette équation; &, si l'on veut de plus que les inconnues soient des nombres entiers, on peut les déterminer facilement par la méthode des fractions continues (voyez plus bas l'art. 8). Il n'en est pas de même des équations qui passent le premier degré, & qui conduisent naturellement à des expressions irrationelles. On n'a point de méthode directe & générale pour trouver les nombres commensurables qui peuvent satisfaire à ces équations lors même qu'elles ne sont qu'au second degré; & il faut avouer que cette branche de l'Analyse, quoique peut-être une des plus importantes, est néanmoins une de celles que les Géometres paroissent avoir le plus négligées, ou du moins dans lesquelles ils ont fait jusqu'à présent le moins de progrès.

(*) Lû à l'Académie le 24 Novembre 1768.

Diophante & ses Commentateurs ont à la vérité résolu un grand nombre de problemes indéterminés du second, du troisieme, & même du quatrieme degré; mais, la plûpart de leurs solutions n'étant que particulieres, il n'est pas étonnant qu'il se trouve encore des cas d'ailleurs fort simples, & en même tems fort étendus, pour lesquels les méthodes de Diophante soient absolument insuffisantes.

S'il s'agissoit, par exemple, de résoudre l'équation $A + Bt^2 = u^2$, en supposant A & B des nombres entiers non carrés, c'est à dire de trouver une valeur rationelle de t telle que $A + Bt^2$ devînt un carré, on verroit aisément que tous les artifices connus de l'Analyse de Diophante seroient en défaut pour ce cas; or c'est précisément à ce cas que se réduit la solution générale des problemes indéterminés du second degré à deux inconnues, comme on le verra ci-après. Personne que je sache ne s'est occupé de ce probleme, si on en excepte M. Euler qui en a fait l'objet de deux excellens Mémoires qui se trouvent parmi ceux de l'Académie de Petersbourg (Tome VI des anciens *Commentaires* & Tome IX des nouveaux); mais il s'en faut encore beaucoup que la matiere soit épuisée. Car 1°. M. Euler n'a considéré dans l'équation $A + Bt^2 = u^2$, que le cas où B est un nombre positif, & où t & u doivent être des nombres entiers. 2°. Dans ce cas même, M. Euler suppose qu'on connoisse déjà une solution de l'équation, & il donne le moyen d'en déduire une infinité d'autres. Ce n'est pas que ce grand Géometre n'ait tâché de donner aussi quelques regles pour connoître *a priori* si l'équation proposée est résoluble ou non; mais, outre que ces regles ne sont fondées que sur des principes précaires & tirés seulement de l'induction, elles ne sont d'ailleurs d'aucune utilité pour la recherche de la premiere solution qui doit être supposée connue (voyez le premier Mémoire du Tome IX des nouveaux Commentaires de Petersbourg, & surtout la conclusion de ce Mémoire page 38). 3°. Les formules que M. Euler donne pour trouver une infinité de solutions dès qu'on en connoit une seule, ne renferment pas toujours & ne sauroient renfermer toutes les solutions possibles à moins que A ne soit un nombre premier (voyez plus bas l'art. 45).

Les

Les recherches que j'ai faites depuis quelque tems sur cette matiere m'ont conduit à des méthodes directes, générales, & nouvelles, pour résoudre les équations de la forme $A + Bt^2 = u^2$, & en général toutes les équations du second degré, à deux inconnues, soit que les inconnues puissent être des nombres quelconques entiers, ou fractionaires, soit qu'elles doivent être des nombres entiers. Ce sont ces méthodes qui font l'objet de ce Mémoire; je les crois d'autant plus dignes de l'attention des Mathématiciens qu'elles laissent encore un vaste champ à leurs recherches.

§. I.

De la maniere de ramener toute équation du second degré à deux inconnues à cette forme $A = u^2 - Bt^2$

& des cas dans lesquels les équations de cette forme peuvent se résoudre par les méthodes connues.

1. Soit

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = o$$

l'équation générale proposée dans laquelle α, β, γ, δ, ϵ, & ζ soient des nombres donnés entiers, positifs ou négatifs (il est évident que si les coëfficiens α, β, &c. n'étoient pas des nombres entiers, on pourroit toujours les rendre tels en faisant évanouir tous les dénominateurs par la multiplication); & où x, & y soient les deux inconnues qu'il s'agit de déterminer en sorte qu'elles soient exprimées par des nombres rationels. Qu'on tire de cette équation la valeur de l'une des deux inconnues, comme x, & l'on aura

$$2\alpha x + \beta y + \delta = \sqrt{((\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \epsilon y + \zeta))},$$

d'où l'on voit que la question se réduit à déterminer y en sorte que la quantité $(\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \epsilon y + \zeta)$ soit un carré. Soit pour abréger

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = B$$
$$\beta\delta - 2\alpha\epsilon = f$$
$$\delta^2 - 4\alpha\zeta = g$$

&

& il faudra que $By^2 + 2fy + g$ soit un carré; soit donc

$$By^2 + 2fy + g = t^2$$

on aura par la résolution de cette équation

$$By + f = \sqrt{(Bt^2 + f^2 - Bg)}$$

de sorte qu'il ne s'agira plus que de rendre $Bt^2 + f^2 - Bg$ carré. Soit encore $f^2 - Bg = A$

& toute la difficulté se réduira à satisfaire à cette équation

$$A + Bt^2 = u^2$$

A, B étant des nombres entiers donnés & t, & u devant être des nombres rationels.

2. Puisque nous avons supposé $(\beta y - \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \varepsilon y + \delta) = By^2 + 2fy + g = t^2$, & $Bt^2 + f^2 - Bg = Bt^2 + A = u^2$, on aura

$$2\alpha x + \beta y + \delta = \pm t$$

$$By + f = \pm u$$

d'où

$$y = \frac{\pm u - f}{B}$$

$$x = \frac{\pm t - \delta}{2\alpha} - \frac{\beta(\pm u - f)}{2\alpha B}$$

(les signes ambigus de u, & de t pouvant être pris à volonté) par où l'on déterminera x, & y, dès que l'on connoitra t & u.

On voit aussi par là que, si x, & y doivent être des nombres entiers, il faut que t, & u soient entiers aussi; mais il faudra de plus que $\pm u - f$ soit divisible par B, & que $\pm t - \delta - \frac{\beta(\pm u - f)}{B}$ soit divisible par 2α. Si on vouloit seulement que x, & y fussent des nombres rationels, il suffiroit que t, & u fussent aussi rationels.

3. Si l'un des nombres A, ou B, étoit carré, l'équation $A + Bt^2 = u^2$ seroit susceptible des méthodes de Diophante.

Car

Car 1°. soit $B = b^2$, on supposera $u = bt + z$ & l'équation deviendra, en ôtant ce qui se détruit, $A = 2btz + z^2$; d'où l'on tire $t = \frac{A - z^2}{2bz}$; de sorte qu'on pourra prendre pour z un nombre quelconque. Cependant, si on vouloit que t & u fussent des nombres entiers, il ne faudroit prendre pour z que des nombres entiers tels que $A - z^2$ fût divisible par $2bz$; mais, comme la recherche des nombres qui auroient cette propriété pourroit être longue & pénible, on considérera que l'équation $A + b^2t^2 = u^2$ donne $A = u^2 - b^2t^2 = (u + bt)(u - bt)$; d'où l'on voit d'abord que $u + bt$, & $u - bt$ doivent être des facteurs du nombre donné A; de sorte qu'il n'y aura qu'à résoudre ce nombre en deux facteurs de toutes les manieres possibles, & prendre ensuite l'un des facteurs pour $u + bt$ & l'autre pour $u - bt$; on aura par ce moyen deux équations à l'aide desquelles on déterminera t, & u; & on choisira entre toutes les valeurs de t, & u, que chaque couple de facteurs aura fournies, celles qui seront des nombres entiers. De cette maniere on sera assuré d'avoir toutes les solutions possibles en entiers de l'équation proposée.

Supposons 2°. que l'on ait $A = a^2$, on fera $u = a + tz$, & l'on aura en substituant & effaçant ce qui se détruit, $Bt^2 = 2atz + t^2z^2$, ou bien en divisant par t, & tirant ensuite la valeur de t, $t = \frac{2az}{B - z^2}$, où l'on pourra prendre pour z tout ce que l'on voudra. Si t & u devoient être entiers, il faudroit que z fût entier & tel que $2az$ fût divisible par $A - z^2$; ainsi on pourroit supposer d'abord $z = o$, ce qui donneroit $t = o$, & $u = a$; mais, pour avoir une solution générale, on considérera l'équation $a^2 + Bt^2 = u^2$, laquelle donne $Bt^2 = u^2 - a^2 = (u + a)(u - a)$, & nous apprend que $t + a$, & $t - a$ doivent être des facteurs de Bt^2. Soit $B = b\beta$; b, & β étant deux facteurs quelconques de B, on pourra déterminer t, & u en supposant $u + a = bt$, & $u - a = \beta t$, d'où l'on tire

$2a = (b - \beta)t$, & $t = \frac{2a}{b-\beta}$; ainsi l'équation ne sera résoluble en nombres entiers, au moins par cette méthode, que lorsque $2a$ sera divisible par $b - \beta$; je dis par cette méthode, car il est évident que la supposition de $u + a = bt$, & $u - a = \beta t$ n'est que particuliere, & qu'on pourroit faire aussi, (en supposant $t = pq$) $u + a = bp^2$, $u - a = \beta q^2$; ce qui donneroit $2a = bp^2 - \beta q^2$, équation qui rentre, comme l'on voit, dans le cas général de l'art. 1.

3. Ce sont là les seules méthodes qu'on ait eues jusqu'à présent pour résoudre les équations de la forme de $A + Bt^2 = u^2$, méthodes qui ne sont absolument applicables qu'aux cas ou A, & B sont des nombres carrés; dans tous les autres cas on en étoit réduit au simple tâtonnement, moyen non seulement long & pénible, mais presque impraticable, à moins que les quantités cherchées ne soient renfermées dans de certaines limites: or c'est ce qui n'a lieu que dans le cas où A étant positif, B est négatif; car, puisque u^2 doit être entier & positif, il est clair que Bt^2 devra être moindre que A, & que par conséquent t devra nécessairement être moindre que $\sqrt{\frac{A}{B}}$; de sorte qu'il n'y aura dans ce cas qu'à substituer successivement, au lieu de t, tous les nombres positifs moindres que $\sqrt{\frac{A}{B}}$, (il seroit inutile de substituer des nombres négatifs, le carré t^2 étant le même soit que t soit positif, ou négatif,) & choisir ceux qui rendront $A - Bt^2$ égal à un carré; il n'en est pas de même lorsque B est positif, parce qu'alors t peut augmenter à l'infini: & en général, soit que B soit positif ou négatif, le nombre des substitutions à essayer sera toujours nécessairement indéfini, dès qu'on voudra admettre des nombres rompus; ce qui prouve d'autant plus la nécessité d'avoir pour cet objet des méthodes directes & analitiques telles que celles que nous allons donner.

§. II.

§. II.

Résolution de l'équation $A = u^2 - Bt^2$ *lorsque* u, *&* t, *peuvent être des nombres quelconques entiers ou fractionaires.*

14. Supposons en général que u, & t soient des fractions quelconques, lesquelles étant réduites au même dénominateur, & aux moindres termes possibles, soient représentées par $\frac{p}{r}$, & $\frac{q}{r}$, en sorte que l'on ait $u = \frac{p}{r}$, $t = \frac{q}{r}$, & l'équation $A + Bt^2 = u^2$, savoir $A = u^2 - Bt^2$, deviendra

$$Ar^2 = p^2 - Bq^2,$$

de sorte que la question sera réduite à trouver des nombres entiers qui, étant substitués pour p, q & r, satisfassent à cette équation.

Nous pouvons supposer de plus que l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ soit telle que ni A ni B ne contiennent aucun facteur carré. Car, si on avoit $A = a\varrho^2$, $B = b\pi^2$, l'équation deviendroit $a\varrho^2 r^2 = p^2 - b\pi^2 q^2$; ou bien, en faisant $\varrho r = m$, $\pi q = n$ $am^2 = p^2 - bn^2$, laquelle est de la même forme que la précédente.

En général, au lieu de faire simplement $u = \frac{p}{r}$ & $t = \frac{q}{r}$, on fera dans ce cas $u = \frac{\varrho p}{r}$ & $t = \frac{\varrho q}{\pi r}$, & les facteurs carrés ϱ^2 & π^2 disparoitront par la division. Ainsi il suffira de résoudre l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ dans l'hypothese que ni A ni B ne contiennent aucun facteur carré.

Nous supposerons encore que B ne soit pas $= 1$, ni que l'on ait à la fois $B = -1$ & $A = 1$; car, outre que ces cas n'ont point de difficulté, nous nous réservons d'en donner la solution plus bas (art. 19).

Enfin nous ſuppoſerons que A ſoit toujours plus grand que B. En effet il eſt clair

1°. que, ſi A étoit moindre que B, il n'y auroit qu'à tranſpoſer les termes Ar^2, & Bq^2, & échanger A en B, & q en r.

2°. Si A étoit $= \pm$ B, alors comme A eſt ſuppoſé ne contenir aucun facteur carré, il faudroit néceſſairement que p fût diviſible par A, de ſorte qu'en faiſant $p = As$, on auroit, après avoir diviſé par A, $r^2 = As^2 \pm q^2$, c'eſt à dire $As^2 = p^2 \pm q^2$, laquelle rentre dans l'équation générale $Ar^2 = p^2 - Bq^2$, en faiſant $B = \mp 1$, $r = s$; or, ſi le ſigne inférieur a lieu, on aura déjà le cas de l'art. 19; & ſi c'eſt le ſigne ſupérieur qui ait lieu, alors on aura auſſi le cas de l'art. 19 ſi $A = 1$; de ſorte que nous ſuppoſerons ici $A > 1$, & par conſéquent $A > B$.

De cette maniere la réſolution de l'équation propoſée ſe réduira toujours à celle d'une équation de la forme

$$Ar^2 = p^2 - Bq^2$$

où p, q, r, devront être des nombres entiers, & où A, & B ſeront des nombres entiers donnés non carrés, ni contenant des facteurs carrés, & dont l'un A ſera plus grand que l'autre B.

5. Je dis maintenant que les nombres p, & q doivent être premiers entr'eux; car, s'ils avoient un commun diviſeur ϱ, il faudroit que Ar^2 fût auſſi diviſible par ϱ^2; mais, comme les fractions $\frac{p}{r}$, & $\frac{q}{r}$, ſont ſuppoſées réduites à leurs moindres termes, il eſt clair que p, q, & r n'auront aucun diviſeur commun; & qu'ainſi r ne ſera point diviſible par ϱ; d'ailleurs il eſt clair que ſi p, q & r avoient un diviſeur commun, on en pourroit toujours faire abſtraction, parce que ce diviſeur s'en iroit de lui-même par la diviſion; donc il faudra que A ſoit diviſible par ϱ^2, ce qui ne ſe peut à cauſe que A eſt ſuppoſé ne contenir aucun facteur carré.

6. Cela

6. Cela posé, je remarque d'abord que, pour que l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ puisse subsister, il faut que A soit un diviseur d'un nombre de cette forme $\alpha^2 - B$, α étant un nombre entier, c'est à dire que B soit le résidu de la division d'un carré quelconque par A. Car, si on multiplie l'équation dont il s'agit par $p'^2 - Bq'^2$, on aura $Ar^2(p'^2 - Bq'^2) = (p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2)$; or $(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2)$ se réduit à cette forme $(pp' \pm Bqq')^2 - B(pq' \pm qp')^2$, comme il est facile de s'en assurer par le développement de ces deux expressions; donc, si on prend pour p' & q' des nombres entiers tels que $pq' - qp'$ soit $= 1$ ou $= -1$, ce qui est toujours possible à cause que p, & q sont premiers entr'eux (art. préc.), & qu'on fasse $pp' - Bqq' = \alpha$, on aura $Ar^2(p'^2 - Bq'^2) = \alpha^2 - B$; par conséquent A sera un diviseur de $\alpha^2 - B$.

7. Pour trouver les nombres p', & q' qui peuvent satisfaire à la condition $pq' - qp' = \pm 1$, on réduira la fraction $\frac{p}{q}$ en une fraction continue, d'où l'on déduira, comme l'on sait, une suite de fractions convergentes vers $\frac{p}{q}$, & alternativement plus grandes ou plus petites que cette même fraction (voyez plus bas l'art. 29.), & l'on prendra pour p' le numérateur de la fraction qui précédera immédiatement la fraction $\frac{p}{q}$ & pour q' le dénominateur de la même fraction; si la fraction $\frac{p'}{q'}$ est plus petite que la fraction $\frac{p}{q}$, on aura $pq' - qp' = 1$, & si $\frac{p'}{q'} > \frac{p}{q}$, on aura $pq' - qp' = -1$.

8. Cette méthode est utile pour résoudre en général toutes les équations du premier degré à deux inconnues, lorsque ces inconnues doivent être des nombres entiers. Car soit l'équation

$$py - qx = r$$

 dans

dans laquelle p, & q soient des nombres entiers premiers entr'eux; je dis premiers entr'eux, car il est évident que si p, & q avoient un diviseur commun ϱ, il faudroit que r fût aussi divisible par ϱ, pour que les nombres x, & y pussent être des nombres entiers; donc divisant toute l'équation par ϱ, on auroit une nouvelle équation de la forme $py - qx = r$, dans laquelle p, & q seroient nécessairement premiers entr'eux.

Qu'on cherche, comme ci-dessus, la fraction $\frac{p'}{q'}$, telle que $pq' - qp' = \pm 1$, & l'on aura, en multipliant par r, $pq'r - qp'r = \pm r$; donc retranchant cette équation de la proposée, ou l'y ajoutant, on aura celle-ci

$$p(y \mp rq') - q(x \mp rp') = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{x \mp rp'}{y \mp rq'} = \frac{p}{q}.$$

Or, p & q étant premiers entr'eux, la fraction $\frac{p}{q}$ sera déjà réduite à ses moindres termes, de sorte que comme x, & y doivent être des nombres entiers, il faudra que l'on ait

$$x \mp rp' = mp, \quad y \mp rq' = mq,$$

m étant un nombre quelconque entier; d'où l'on tirera

$$x = mp \pm rp', \quad y = mq \pm rq'.$$

Ce sont les expressions générales de tous les nombres entiers x, & y qui peuvent satisfaire à l'équation $py - qx = r$.

Ainsi, pour satisfaire en général à l'équation $py - qx = \pm 1$, qui est celle de l'art. préc., on prendra $r = \pm 1$, & l'on aura

$$x = mp \pm p', \quad y = mq \pm q',$$

les signes ambigus étant à volonté aussi bien que le nombre m.

9. La réduction que nous avons faite (art. 6) de la quantité $(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2)$ à $(pp' \pm Bqq')^2 - B(pq' \pm qp')$, doit être

être bien remarquée, parce que nous en ferons un fréquent usage dans la suite de ce Mémoire; il résulte de là que le produit de deux nombres quelconques de la forme $p^2 - Bq^2$ est encore de la même forme, & que par conséquent le produit d'autant de nombres qu'on voudra de la forme $p^2 - Bq^2$ sera aussi de la même forme. En effet on a

$$(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2) = P^2 - BQ^2$$
$$(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2)(p''^2 - Bq''^2) = P'^2 - BQ'^2$$
&c.

$$P = pp' \pm Bqq', \quad Q = pq' \pm qp'$$
$$P' = Pp'' \pm BQq'', \quad Q' = Pq'' \pm Qp''$$
&c.

où l'on observera à l'égard des signes ambigus de les prendre les mêmes dans les deux quantités P & Q, P' & Q' &c.

On aura de même

$$(p^2 - Bq^2)^2 = P^2 - BQ^2$$
$$(p^2 - Bq^2)^3 = P'^2 - BQ'^2$$
&c.

en faisant

$$P = p^2 + Bq^2, \quad Q = 2pq$$
$$P' = p^3 + 3Bpq^2, \quad Q' = 3p^2q + Bq^3$$
&c.

& en général si on fait

$$(p^2 - Bq^2)^m = P^2 - BQ^2,$$

on aura

$$P = p^m + \frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}q^2B + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}p^{m-4}q^4B^2 + \&c.$$

Q =

$$Q = mp^{m-1}q + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}p^{m-3}q^3B$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}p^{m-5}q^5B^2 + \&c.$$

ou bien

$$P = \frac{(p + q\sqrt{B})^m + (p - q\sqrt{B})^m}{2}$$

$$Q = \frac{(p + q\sqrt{B})^m - (p - q\sqrt{B})^m}{2\sqrt{B}}.$$

10. Nous avons démontré plus haut (art. 6.) que l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ ne peut avoir lieu à moins que A ne ſoit un diviſeur d'un nombre de cette forme $\alpha^2 - B$; or je dis que l'on peut toujours ſuppoſer que le nombre α ſoit moindre que la moitié du nombre A. En effet, ſoit a un nombre tel que $a^2 - B$ ſoit diviſible par A, il eſt clair qu'en faiſant $\alpha = \mu A \pm a$, μ étant un nombre quelconque entier, $\alpha^2 - B$ ſera auſſi diviſible par A; d'autre part il eſt facile de voir qu'on peut toujours déterminer le nombre μ & le ſigne ambigu de a en ſorte que α ſoit $< \frac{A}{2}$; donc s'il exiſte un nombre quelconque a tel que $a^2 - B$ ſoit diviſible par A, il doit exiſter auſſi un nombre $\alpha < \frac{A}{2}$, qui ait la même propriété.

On doit conclure de là que pour que l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ ſoit réſoluble, il faut néceſſairement que A ſoit un diviſeur d'un nombre tel que $\alpha^2 - B$, α étant un nombre moindre que $\frac{A}{2}$.

On eſſayera donc ſucceſſivement pour α tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à $\frac{A}{2}$, & ſi l'on n'en trouve aucun qui ſatisfaſſe à la condition dont il s'agit, ce ſera une marque ſûre que l'équation propoſée n'admet aucune ſolution rationelle.

Nous

Nous donnerons plus bas (voyez le §. IV) des moyens directs pour pouvoir reconnoitre si un nombre donné peut être un diviseur d'un nombre de la forme $\alpha^2 - B$, B étant aussi donné; il nous suffit ici qu'on puisse toujours s'en assurer par un tâtonnement fort simple.

Au reste il faut remarquer, pour éviter toute équivoque, que quand nous disons que α doit être $< \frac{A}{2}$, nous entendons que α, & A soient pris positivement, quoiqu'ils puissent être d'ailleurs positifs, ou négatifs; de sorte qu'on ne doit avoir égard dans cette comparaison des nombres α, & A, qu'à leur valeur absolue.

11. Reprenons maintenant l'équation

$$Ar^2 = p^2 - Bq^2 \quad \text{- - - - - - -} \quad (A)$$

& supposons qu'on ait trouvé un nombre entier $\alpha < \frac{A}{2}$ (abstraction faite des signes de α & A) tel que $\alpha^2 - B$ soit divisible par A; dénotant par A' le quotient de la division de $\alpha^2 - B$ par A, on aura l'équation $AA' = \alpha^2 - B$.

Qu'on fasse $\alpha' = \mu' A' \pm \alpha$, μ' étant un nombre quelconque entier, & qu'on prenne le nombre μ' & le signe de α en sorte que l'on ait $\alpha' < \frac{A'}{2}$ (abstraction faite des signes de α' & A'), ce qui est évidemment toujours possible, comme nous l'avons déjà observé plus haut; il est clair que puisque $\alpha^2 - B$ est déjà divisible par A', $\alpha'^2 - B$ le sera aussi, de sorte qu'en dénotant le quotient de cette division par A'', on aura cette équation analogue à la précédente, $A'A'' = \alpha'^2 - B$.

Faisant de même $\alpha'' = \mu'' A'' \pm \alpha'$, & prenant μ'' & le signe de α', en sorte que l'on ait $\alpha'' < \frac{A''}{2}$, (les nombres α'' & A'' étant considérés comme positifs,) on aura $\alpha''^2 - B$ divisible par A''; de sorte qu'en dénotant le quotient de cette division par A''', on aura cette troisieme équation $A''A''' = \alpha''^2 - B$, & ainsi de suite.

12. De cette maniere on pourra trouver une suite d'équations telles que

$$\left.\begin{array}{l} AA' = \alpha^2 - B \\ A'A'' = \alpha'^2 - B \\ A''A''' = \alpha''^2 - B \\ \&c. \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (a)$$

dans lesquelles on ait (en considérant les nombres α, α', α'' &c. A, A', A'' &c. comme positifs) $\alpha < \frac{A}{2}$, $\alpha' < \frac{A'}{2}$, $\alpha'' < \frac{A''}{2}$ &c.

Or je dis que les nombres A, A', A'', A''' &c. formeront nécessairement une suite décroissante, jusqu'à ce que l'on arrive à un terme comme A^n (l'exposant n dénotant non pas une puissance de A, mais le quantieme du terme A^n) lequel soit $=$ B ou $<$ B, abstraction faite des signes de A^n & de B. Pour prouver cette proposition, il est à propos de distinguer les deux cas de B positif, & de B négatif.

13. Supposons d'abord que B soit un nombre positif; dans ce cas il est clair que A pourra être positif ou négatif.

Soit 1°. A positif, & soit $\alpha^2 > B$, il est clair que A' sera aussi positif; or, puisque $\alpha < \frac{A}{2}$, on aura aussi $\alpha^2 < \frac{A^2}{4}$, & à plus forte raison $\alpha^2 - B < \frac{A^2}{4}$; donc $AA' < \frac{A^2}{4}$ & par conséquent (A, & A' étant positifs) $A' < \frac{A}{4}$.

De même, puisque A' est positif, si $\alpha'^2 > B$, on aura aussi A'' positif, & on prouvera pareillement que $A'' < \frac{A'}{4}$, & ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à une équation telle que $A^n A^{n+1} = (\alpha^n)^2 - B$, dans laquelle $(\alpha^n)^2$ ne soit plus $>$ B; or, puisque $\alpha < \frac{A}{2}$, $A' <$

A

$\frac{A}{4}$, $\alpha' < \frac{A'}{2}$, $A'' < \frac{A'}{4}$ &c. il est clair que les nombres A, A', A'' &c. iront nécessairement en diminuant, ainsi que les nombres α, α', α'' &c.; de sorte qu'on parviendra nécessairement à l'équation $A^n A^{n+1} = (\alpha^n)^2 - B$, où $(\alpha^n)^2 = B$ ou $< B$; mais, à cause que B est supposé non carré, & différent de l'unité (art. 4.), on ne sauroit avoir $(\alpha^n)^2 = B$; de sorte qu'il faudra que l'on ait $(\alpha^n)^2 < B$. Ainsi $B - (\alpha^n)^2$ sera nécessairement un nombre moindre que B, ou tout au plus égal à B si $\alpha^n = o$; donc, puisque A^n doit être un diviseur de $B - (\alpha^n)^2$, il est clair que A^n sera aussi nécessairement moindre que B, ou tout au plus égal à B.

Soit 2°. A négatif & $= -a$, a étant un nombre positif, & soit aussi $\alpha^2 > B$, il est clair que A' devra être négatif; or, en prenant α positif, on aura $\alpha < \frac{a}{2}$ (hyp.); donc $\alpha^2 - B < \frac{a^2}{4}$, & faisant $A' = -a'$ (a' étant positif), on aura aussi $aa' < \frac{a^2}{4}$, & par conséquent $a' < \frac{a}{4}$.

De même, en supposant $\alpha'^2 > B$, on aura A'' négatif, & faisant $A'' = -a''$ (a'' étant positif), on aura $\alpha' < \frac{a'}{2}$, & $a'' < \frac{a'}{4}$, & ainsi de suite. Ainsi on prouvera, comme ci-dessus, que les nombres a, a', a'' &c. iront en diminuant ainsi que les nombres α, α', α'' &c. jusqu'à ce que l'on arrive à un nombre comme a^n, qui soit moindre que B, ou tout au plus égal à B.

14. Soit, en second lieu, B égal à un nombre négatif comme $-b$, b étant positif, il est clair d'abord que dans ce cas tous les nombres A, A', A'' &c. seront positifs, parce que l'on aura par les équations (A) & (a) $Ar^2 = p^2 + bq^2$, $AA' = \alpha^2 + b$, $A'A'' = \alpha'^2 + b$ &c.; or si $A > b$, l'équation $AA' = \alpha^2 + b$ donnera $AA' < \frac{A^2}{4} + A$,

 à cau-

à cause de $b < A$, & de $\alpha < \frac{A}{2}$, donc $A' < \frac{A}{4} + 1$.

De même, si $A' > b$, l'équation $A'A'' = \alpha'^2 + b$ donnera, à cause de $\alpha' < \frac{A'}{2}$, $A'A'' < \frac{A'^2}{4} + A'$, & par conséquent $A'' < \frac{A'}{4} + 1$, & ainsi de suite; d'où l'on voit que les nombres A, A', A'' &c. décroîtront continuellement jusqu'à ce que l'on arrive à un terme A^n égal à b ou moindre que b.

Si b est $= 1$, il est clair qu'on parviendra nécessairement à un terme $A^n = 1$; car, puisque les nombres A, A', A'' &c. ne peuvent jamais devenir nuls, à cause des équations $AA' = \alpha^2 + b$, $A'A'' = \alpha'^2 + b$ &c., A^n ne pourra pas être < 1, par conséquent il sera nécessairement $= 1$.

15. Au reste, quoiqu'on puisse toujours pousser la suite A, A', A'' &c. jusqu'à un terme égal ou moindre que B, cependant si l'on en trouve un qui étant encore plus grand que B, soit en même tems carré, ou multiple d'un carré, mais tel qu'étant divisé par le plus grand carré qui le mesure, il laisse un quotient égal ou moindre que B, alors on pourra s'arrêter à ce terme.

En général, nous supposerons que la suite A, A', A'' &c. soit poussée jusqu'à un terme A^n de cette forme n^2C, n étant un nombre quelconque, & C un nombre qui ne soit ni carré ni multiple d'un carré, & qui soit en même tems égal ou moindre que B, abstraction faite des signes de B & de C.

Ainsi, si $B = -1$, il faudra nécessairement que l'on ait $C = 1$.

16. Cela posé, si on multiplie ensemble toutes les équations (a) de l'art. 12, jusqu'à l'équation $A^{n-1}A^n = (\alpha^{n-1})^2 - B$, on aura (art. 9) une équation dont le premier membre sera $AA'^2A''^2 \ldots (A^{n-1})^2A^n$, & dont le second membre sera de cette forme $P^2 - BQ^2$; de sorte qu'à cause de $A^n = n^2C$, on aura l'équation

CA

$$CA(A'A'' \cdots A^{n-1}a)^2 = P^2 - BQ^2,$$

laquelle étant encore multipliée par l'équation (A) deviendra de cette forme $C(AA'A'' \cdots A^{n-1}ar)^2 = p'^2 - Br'^2$, ou bien, en faisant $AA'A'' \cdots A^{n-1}ar = q'$, de la forme $Cq'^2 = p'^2 - Br'^2$; c'est à dire

$$Br'^2 = p'^2 - Cq'^2 \quad \cdots \cdots \quad (B).$$

D'où l'on voit que, si l'équation (A) est résoluble, il faut aussi que celle-ci le soit.

Réciproquement, si l'équation (B) est résoluble, on pourra résoudre aussi l'équation (A). En effet, en mettant l'équation (B) sous cette forme $Cq'^2 = p'^2 - Br'^2$, & la multipliant successivement par chacune des équations (a), à commencer par l'équation $A^{n-1}A^n = (a^{n-1})^2 - B$ qui est la derniere, on aura, à cause de $A^n = a^2 C$, une équation de cette forme $A(A'A'' \cdots A^{n-1}Ca)^2 q'^2 = p^2 - Bq^2$, c'est à dire, en faisant $A'A'' \cdots A^{n-1}Caq' = r$, de la forme $Ar^2 = p^2 - Bq^2$, qui est l'équation (A) même.

Donc la résolution de l'équation (A) se réduira à celle de l'équation (B), dans laquelle B est $<$ A, & C $=$ ou $<$ B, de sorte que cette derniere est plus simple que la premiere.

Or, si $C = 1$, l'équation (B) sera déjà dans le cas que nous résoudrons plus bas (art. 19); ainsi nous supposerons que, si C est positif, il soit encore plus grand que l'unité.

Nous appellerons dans la suite les équations (A), (B), & les autres équations analogues à celles-ci, équations *principales*, & les les équations (a), ainsi que les autres équations semblables qu'on pourra trouver, équations *secondaires*; ainsi nous nommerons l'équation (A) la 1ere des équations *principales*, l'équation (B) la 2de des équations *principales*, & ainsi des autres; nous nommerons de même les équations (a) la premiere suite d'équations *secondaires*, & ainsi du reste.

17. Or, l'équation $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$ étant semblable à l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$, on pourra la traiter de la même maniere;

niere; en effet, si $B = \pm C$, il faudra que p' soit aussi divisible par B, de sorte qu'en faisant $p' = Bs'$, on aura l'équation $r'^2 = Bs'^2 \mp q'^2$, c'est à dire $Bs'^2 = r'^2 \pm q'^2$; ainsi cette équation sera déjà dans le cas de l'art. 19, si le signe inférieur a lieu; & quand le signe supérieur aura lieu, alors, à cause de $B > 1$ par l'hyp., elle rentrera dans la forme générale $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$, B étant $> C$. Donc, puisque C est ou égal à B ou moindre que B, on aura toujours à résoudre une équation de cette forme $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$, dans laquelle ni B, ni C ne contiendront aucun facteur carré, & où C sera $< B$.

On commencera donc par chercher de nouveau un nombre $\beta < \frac{B}{2}$ (en regardant β & B comme positifs), & tel que $\beta^2 - C$ soit divisible par B; & si l'on n'en trouve aucun qui satisfasse à cette condition, ce sera une marque certaine que l'équation $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$ ne sera point résoluble rationellement, & par conséquent que la proposée ne le sera pas non plus; je supposeral donc qu'on ait trouvé un tel nombre β, en sorte qu'en nommant B' le quotient de la division de $\beta^2 - C$ par B, on ait $\beta^2 - C = BB'$, on pourra former cette seconde suite d'équations *secondaires*

$$\left.\begin{aligned} BB' &= \beta^2 - C \\ B'B'' &= \beta'^2 - C \\ B''B''' &= \beta''^2 - C \\ &\&c. \end{aligned}\right\} \quad - \quad - \quad (b)$$

dans lesquelles les nombres B, B', B'' &c. formeront une suite décroissante qu'on continuera jusqu'à ce que l'on parvienne à un terme de cette forme $b^2 D$, D étant égal à C ou moindre que C, (abstraction faite des signes de C & D); ce qui arrivera nécessairement, comme nous l'avons prouvé plus haut; & par le moyen de ces équations on parviendra en opérant comme dans l'art. 16, à une nouvelle équation de la forme

$$Cr''^2 = p''^2 - Dq''^2 \quad . \quad - \quad - \quad - \quad - \quad (C)$$

dont la résolution dépendra de celle de l'équation $Br'^2 = p'^2 - Cq'^2$ & vice

vice versâ; de sorte que, cette équation étant résolue, on pourra en remontant résoudre la proposée.

18. En suivant toujours le même procédé, on trouvera cette suite d'équations *principales*

$$A r^2 = p^2 - B q^2$$
$$B r'^2 = p'^2 - C q'^2$$
$$C r''^2 = p''^2 - D q''^2$$
$$D r'''^2 = p'''^2 - E q'''^2$$
&c.

dans lesquelles les nombres A, B, C, &c. formeront une série décroissante jusqu'à ce que l'on parvienne à un terme égal à l'unité, prise positivement, ou négativement; car, comme ces nombres ne sont ni carrés ni multiples de carrés par l'hypothese, il est impossible qu'on parvienne à un terme égal à zéro, avant d'être parvenu à un terme égal à l'unité; en effet, si $E = o$, on aura $D r'''^2 = p'''^2$; donc $D = 1$; donc, puisque les termes A, B, C &c. deviennent toujours plus petits, il est évident qu'on arrivera nécessairement à un terme égal à 1, ou à -1.

Soit, par exemple, $E = 1$, alors la derniere équation sera $D r'''^2 = p'''^2 - q'''^2$; c'est à dire de la forme

$$V z^2 = x^2 - y^2.$$

Mais, si $E = -1$, alors on pourra continuer encore les mêmes opérations, & on parviendra nécessairement à une nouvelle équation *principale* telle que $E r^{IV2} = p^{IV2} - F q^{IV2}$, dans laquelle, à cause de $E = -1$, on aura nécessairement $F = 1$ (art. 15); de sorte que la derniere des équations *principales* sera, dans ce cas, de la forme $-z^2 = x^2 - y^2$, laquelle rentre dans la formule précédente en faisant $V = -1$.

Or nous avons démontré que, si l'équation $A r^2 = p^2 - B q^2$ est résoluble, les équations suivantes $B r'^2 = p'^2 - C q'^2$, $C r''^2 = p''^2 - D q''^2$ &c. doivent l'être aussi; & réciproquement que, si l'une de celles-

celles-ci peut se résoudre, toutes les précédentes pourront se résoudre aussi (art. 16); donc la résolution de l'équation $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ se réduira toujours par ce moyen à celle d'une équation de la forme $Vz^2 = x^2 - y^2$; V étant un nombre donné.

19. Or l'équation $Vz^2 = x^2 - y^2$ est facile à résoudre par la méthode même de l'art. 3; mais, pour avoir pour x, y, & z des expressions sans fractions, on fera $x + y = \xi$, $x - y = \psi$, & l'on aura $Vz^2 = \xi\psi$, donc $\psi = \frac{Vz^2}{\xi}$; de sorte qu'il faudra que Vz^2 soit divisible par ξ; soit M la plus grande mesure commune de V & ξ, en sorte que $V = MN$, & $\xi = M\varrho$, ϱ & N étant premiers entr'eux, & l'on aura $\psi = \frac{Nz^2}{\varrho}$; donc $z^2 = \varrho\sigma$, & par conséquent $\xi = M\varrho$, $\psi = N\sigma$, M & N étant deux facteurs quelconques de V; or soit l la plus grande commune mesure de ϱ & σ, & comme $\varrho\sigma$ doit être égal à un carré, il est clair que ϱ & σ ne pourront être que de cette forme $\varrho = lm^2$, & $\sigma = ln^2$, l, m, & n étant des nombres quelconques entiers; ainsi on aura $z^2 = l^2m^2n^2$, $\xi = x + y = Mlm^2$, $\psi = x - y = Nln^2$, donc $z = lmn$, $x = \frac{l(Mm^2 + Nn^2)}{2}$ & $y = \frac{l(Mm^2 - Nn^2)}{2}$; mais, comme il est inutile d'avoir dans les expressions de x, y, & z, un multiplicateur commun, parce qu'il est visible que, dans l'équation $Vz^2 = x^2 - y^2$, on peut toujours multiplier à volonté x, y, & z par un nombre quelconque, on fera pour plus de simplicité $l = 1$, ou bien $l = 2$ pour faire disparoitre le dénominateur 2 de x, & de y, & l'on aura en général

$$x = Mm^2 + Nn^2, \quad y = Mm^2 - Nn^2, \quad z = 2mn;$$

m, & n étant des nombres quelconques entiers, & M & N deux facteurs quelconques de V, en sorte que $V = MN$. Ainsi, si V a plusieurs facteurs, parmi lesquels il faudra toujours compter l'unité, on aura autant de différentes expressions de x, y, & z qu'il y aura de manieres de partager le nombre V en deux facteurs.

EXEM-

Exemples.

20. Appliquons maintenant notre méthode à quelques exemples.

Exemple 1. Soit proposé de résoudre l'équation

$$109 = u^2 - 7t^2.$$

En mettant $\frac{p}{r}$ au lieu de u, & $\frac{q}{r}$ au lieu de t, elle deviendra

$$109r^2 = p^2 - 7q^2 \quad \cdots\cdots \quad (A)$$

de sorte qu'on aura $A = 109$, & $B = 7$; car, comme ces deux nombres ne renferment aucun facteur carré, il n'y aura aucune réduction à y faire.

Il faudra donc chercher un nombre entier α moindre que $\frac{109}{2}$ & tel que $\alpha^2 - 7$ soit divisible par 109; mais pour cela, au lieu d'essayer successivement pour α tous les nombres naturels moindres que 54, il sera beaucoup plus commode de chercher un multiple de 109, qui soit de la forme $\alpha^2 - 7$, c'est à dire, qui étant augmenté de 7 devienne un carré.

En général on remarquera que, dans l'équation $AA' = \alpha^2 - B$ à laquelle il s'agit de satisfaire, A' doit être $< \frac{A}{4}$ lorsque B est positif, & $< \frac{A}{4} + 1$ lorsque B est négatif (art. 13 & 14), de sorte qu'il n'y aura qu'à essayer successivement pour A' tous les nombres naturels moindres que $\frac{A}{4} + 1$, pris positivement ou négativement suivant que A sera positif ou négatif (art. cités); & s'il ne s'en trouve aucun dont le produit par A étant augmenté de B devienne un carré, ce sera une marque certaine que le probleme n'admet point de solution rationelle.

On en usera de même à l'égard des autres équations de condition $BB' = \beta^2 - C$, $CC' = \gamma^2 - D$ &c. dans lesquelles il faudra aussi que $B' < \frac{C}{4} + 1$, $C' < \frac{D}{4} + 1$ &c.

 Dans

Dans l'exemple proposé on trouve d'abord $2 . 109 + 7 = 225$; de sorte qu'on aura $A' = 2$, $a = 15$; & comme A' est déjà $< B$, la premiere suite d'équations *secondaires* se réduira à cette seule équation (art. 12.)

$$109 . 2 = 15^2 - 7 \quad \text{- - - - - - -} \quad (a)$$

Ainsi on fera (art. 15) $C = 2$, de sorte que la seconde équation *principale* sera

$$7 r' = p'^2 - 2 q'^2 \quad \text{- - - - - - -} \quad (B)$$

Il faudra donc satisfaire à l'équation $BB' = \beta^2 - C$, savoir $7B' = \beta^2 - 2$, β étant $< \frac{7}{2}$, & on trouvera $\beta = 3$, $B' = 1$, de sorte que comme B' est déjà $< C$, la seconde suite d'équations secondaires que nous avons désignée par (b) à l'art. 17, se réduira à cette équation unique

$$7 . 1 = 3^2 - 2 \quad \text{- - - - - - - - -} \quad (b).$$

On fera donc $D = 1$, & la troisieme équation principale sera

$$2 r''^2 = p''^2 - q''^2 \quad \text{- - - - - - -} \quad (C)$$

laquelle est déjà comme l'on voit dans le cas de l'art. 19.

Comparant donc cette derniere équation à l'équation $Vz^2 = x^2 - y^2$, on aura $V = 2$, $x = p''$, $y'' = q''$, $z = r''$; donc $M = 1$, $N = 2$, & par conséquent $p'' = m^2 + 2n^2$, $q'' = m^2 - 2n^2$, $r'' = 2mn$; ainsi il n'y aura plus qu'à remonter de l'équation (C) à l'équation (B), & de celle-ci à l'équation proposée (A) par la méthode de l'art. 16.

Pour cela on changera d'abord l'équation (C) en celle-ci $q''^2 = p''^2 - 2r''^2$, & on la multipliera par l'équation (b) (s'il y avoit plus d'une de ces équations *secondaires* (b) il faudroit multiplier l'équation dont il s'agit successivement par chacune de ces équations,) on aura, par les formules de l'art. 9, l'équation $7 q''^2 = (3 p'' \pm 2 r'')^2 - 2 (3 r'' \pm p'')^2$, laquelle étant comparée à l'équation (B) donnera

$$p' = 3p'' \pm 2r'', \; q' = 3r'' \pm p'', \; r' = q'$$

les signes ambigus étant à volonté.

On

On changera de même l'équation (B) en $2q'^2 = p'^2 - 7r'^2$, & on la multipliera ensuite par l'équation (a), ce qui donnera $109.4q'^2 = (15p' \pm 7r')^2 - 7(15r' \pm p')^2$; & comparant cette équation avec l'équation (A), on aura enfin

$$p = 15p' \pm 7r', \quad q = 15r' \pm p', \quad r = 2q',$$

de sorte qu'il n'y aura plus qu'à substituer successivement les valeurs de p', q', r', & ensuite celles de p'', q'', r''.

Les valeurs de p, q, & r étant ainsi trouvées, on aura $u = \frac{p}{r}$, & $t = \frac{q}{r}$; & l'équation proposée $109 = u^2 - 7t^2$ sera résolue.

Exemple 2. Qu'on propose maintenant l'équation suivante

$$-207 = u^2 - 13t^2.$$

Puisque le nombre 207 est divisible par le carré 9, je supposerai (art. 4) $u = \frac{3p}{r}$, & $t = \frac{3q}{r}$, ce qui donnera l'équation

$$-23r^2 = p^2 - 13q^2 \quad \text{- - - - - -} \quad \text{(A)}.$$

Or, en suivant le même procédé que dans l'exemple précédent, & marquant les équations analogues par les mêmes lettres, on trouvera les équations suivantes

$$-23.-1 = 6^2 - 13 \quad \text{- - - - - - -} \quad (a)$$

$$13r'^2 = p'^2 + q'^2 \quad \text{- - - - - - -} \quad \text{(B)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 13.\ 2 = 5^2 + 1 \\ 2.\ 1 = 1 + 1 \end{array}\right\} \quad \text{- - - - - - -} \quad (b)$$

$$-r''^2 = p''^2 - q''^2 \quad \text{- - - - - - -} \quad \text{(C)}$$

dont la derniere est, comme on le voit, dans le cas de l'art. 19. On aura donc, $p'' = x$, $q'' = y$, $r'' = z$, & $V = -1$; donc $M = 1$ & $N = -1$; par conséquent $p'' = m^2 - n^2$, $q'' = m^2 + n^2$, $r = 2mn$.

 En-

Ensuite on mettra la même équation (C) sous la forme des équations (b), en transposant les termes r''^2 & q''^2, en sorte que l'on ait $q''^2 = p''^2 + r''^2$, & on multipliera successivement cette équation par les deux équations (b). Pour cela on fera d'abord le produit de ces deux-ci, qui sera exprimé par $13 . 4 = (5 \pm 1)^2 + (5 \mp 1)^2$, ou bien simplement $13 . 4 = 6^2 + 4^2$, c'est à dire, en divisant par 4, $13 = 3^2 + 2^2$; donc, multipliant l'équation précédente par celle-ci & comparant le produit à l'équation (B), on aura

$$p' = 3p'' \pm 2r'', \quad q' = 3r'' \mp 2p'', \quad r' = q''.$$

On transposera de même le premier & le dernier terme de l'équation (B), pour la réduire à la forme de l'équation (a), & on la multipliera ensuite par cette derniere équation, ce qui donnera une équation semblable à l'équation (A), de sorte qu'on aura enfin

$$p = 6p' \pm 13r', \quad q = 6r' \pm p', \quad r = q'.$$

Ainsi l'équation proposée sera résolue.

Exemple 3. Si l'équation proposée étoit

$$51 = u^2 - 7t^2$$

dans laquelle 51 & 7 ne renferment aucun facteur carré, l'on feroit $u = \frac{p}{r}$, $t = \frac{q}{r}$, pour avoir

$$51r^2 = p^2 - 7q^2$$

& il faudroit d'abord satisfaire à l'équation $51A' = \alpha^2 - 7$; mais, en essayant pour A' tous les nombres naturels jusqu'à $\frac{51}{4} + 1$, c'est à dire, jusqu'à 13, on n'en trouve aucun qui étant multiplié par 51 & augmenté de 7 devienne un carré; d'où il s'ensuit que l'équation proposée n'admet aucune solution rationelle.

Exemple 4. Soit encore proposée l'équation

$$1459 = u^2 - 30t^2$$

comme

comme 1459 eſt un nombre premier, on fera d'abord $u = \frac{p}{r}$, $t = \frac{q}{r}$, pour avoir l'équation

$$1459r^2 = p^2 - 30q^2 \quad \cdots\cdots \quad (A).$$

Ayant donc ici $1459 = A$, $30 = B$, il faudra d'abord trouver un nombre $\alpha < \frac{1459}{2}$, & tel que $\alpha^2 - 30$ ſoit diviſible par 1459, ou bien un nombre $A' < \frac{1459}{4}$, & tel que $1459A' + 30 =$ à un carré, comme nous l'avons dit dans l'exemple 1er.

Après quelques eſſais je trouve $A' = 241$, & $\alpha = 593$; & à l'aide de ces valeurs je forme cette premiere ſuite d'équations *ſecondaires* (art. 12)

$$\left.\begin{array}{r} 1459 \cdot 241 = 593^2 - 30 \\ 241 \cdot 51 = 111^2 - 30 \\ 51 \cdot 1 = 9^2 - 30 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (a).$$

Donc, puiſque 1 eſt < 30, on fera $C = 1$ (art. 15), & j'aurai cette ſeconde équation *principale*

$$30r'^2 = p'^2 - q'^2 \quad \cdots\cdots \quad (B)$$

laquelle eſt déjà, comme l'on voit, dans le cas de l'art. 19.

J'aurai donc $p' = x$, $q' = y$, $r' = z$, & $30 = V$; donc, puiſque $30 = 2.3.5$, on aura $M = 1$, $N = 30$, ou $M = 2$, $N = 15$, ou $M = 3$, $N = 10$, ou enfin $M = 5$, $N = 6$; de ſorte qu'on aura

$$\begin{array}{llll} p' = & m^2 + 30n^2, & q' = m^2 - 30n^2, & r' = 2mn \\ \text{ou} = & 2m^2 + 15n^2, & = 2m^2 - 15n^2 & \\ \text{ou} = & 3m^2 + 10n^2, & = 3m^2 - 10n^2 & \\ \text{ou} = & 5m^2 + 6n^2, & = 5m^2 - 6n^2 & \end{array}$$

Ayant ainſi p', q' & r', on mettra l'équation (B) ſous cette forme $q'^2 = p'^2 - 30r'^2$, & on la multipliera ſucceſſivement par chacune des équations (a). Pour faire cette multiplication plus aiſément, on multi-

 pliera

pliera d'abord la 2[de] & la 3[eme] de ces équations ensemble, & faisant pour abréger $\mu = 9.111 \pm 30$, $\nu = 111 \pm 9$, on aura $241.51^2 = \mu^2 - 3\nu^2$; ensuite on multipliera cette équation par la 1[ere] des équations (a), & faisant encore $\mu' = 593\mu \pm 30\nu$, $\nu' = 593\nu \pm \mu$, on aura $1459\,(241.51)^2 = \mu'^2 - 30\nu'^2$; équation qui étant multipliée maintenant par l'équation $q'^2 = p'^2 - 30r'^2$, donnera celle-ci: $1459\,(241.51\,q')^2 = (\mu'p' \pm 30\nu'r')^2 - (\mu'r' \pm \nu'p')^2$, laquelle étant comparée à l'équation (A), donnera enfin

$$p = \mu'p' \pm 30\nu'r'$$
$$q = \mu'r' \pm \nu'p'$$
$$r = 241.51q.$$

Exemple 5. Si on avoit l'équation

$$23 = u^2 + 5t^2,$$

on feroit toujours $u = \frac{p}{q}$, & $t = \frac{p}{r}$, ce qui donneroit celle-ci

$$23r^2 = p^2 + 5q^2 \quad \text{- - - - - -} \quad (A)$$

& en opérant comme ci-dessus, on trouveroit d'abord les équations

$$23 \cdot 3 = 8^2 + 5 \quad \text{- - - - - - - -} \quad (a)$$
$$-5r'^2 = p'^2 - 3q'^2 \quad \text{- - - - - -} \quad (B)$$

mais, comme il faudroit ensuite satisfaire à l'équation $-5B' = \beta^2 - 3$, en prenant pour $-B'$ un nombre $< \frac{5}{4} + 1$, c'est à dire, en faisant $B' = -1$, ou -2, & que ni l'une ni l'autre de ces deux valeurs étant multipliée par 5 & augmentée de 3, ne donne un carré, on en conclura que l'équation proposée n'est susceptible d'aucune solution rationelle; ainsi, quoique le nombre 23 puisse être un diviseur d'une infinité de nombres de la forme $p^2 + 5q^2$, cependant il est impossible que le quotient de cette division soit jamais un carré.

21. Ces exemples peuvent suffire pour faire connoitre l'esprit & l'usage de notre méthode. Nous allons voir maintenant comment il fau-

il faudra s'y prendre lorſqu'il s'agira d'avoir des ſolutions en nombres entiers; car, quoique les ſolutions que fournit la méthode précédente ſoient générales, & renferment par conſéquent tous les nombres ſoit entiers, ſoit fractionaires, qui peuvent ſatisfaire à l'équation $A = u^2 - Bt^2$; cependant, comme les valeurs générales de u, & de t ſe préſentent toujours ſous une forme fractionaire, il ſeroit ſouvent difficile & preſque impoſſible de les réduire à des nombres entiers. De ſorte que, pour ne rien laiſſer à déſirer ſur cette matiere, il eſt néceſſaire de donner auſſi une méthode particuliere pour réſoudre l'équation $A = u^2 - Bt^2$, lorſque u, & t doivent être des nombres entiers.

§. III.

Réſolution de l'équation $A = u^2 - Bt^2$ *lorſque* u, *&* t *doivent être des nombres entiers.*

22. Je remarque d'abord que, ſi le nombre A n'a aucun facteur carré, les nombres u, & t doivent être néceſſairement premiers entr'eux; car, ſi ces nombres avoient un commun diviſeur ϱ, il eſt clair que, puiſque u^2 & t^2 ſeroient diviſibles par ϱ^2, il faudroit auſſi que A le fût. On voit par là que les nombres t, & u ne ſauroient avoir d'autres diviſeurs communs que ceux dont les carrés ſont auſſi des diviſeurs de A.

Ainſi, ſi A ne contient qu'un ſeul facteur carré, comme ſi $A = al^2$, l étant un nombre premier, & a un nombre qui ne contient aucun facteur carré, les nombres u & t pourront être premiers entr'eux, ou bien pourront avoir le nombre l pour commun diviſeur; & dans ce dernier cas, faiſant $u = lp$, $t = lq$, l'équation $A = u^2 - Bt^2$ deviendra $a = p^2 - Bq^2$, p, & q étant premiers entr'eux. Si $A = al^2m^2$, l & m étant des nombres premiers, alors u, & t pourront être premiers entr'eux, ou bien pourront être diviſibles tous les deux par l, ou par m, ou par lm, de ſorte qu'en faiſant ſucceſſivement $u = lp$, $t = lq$, $u = mp$, $t = mq$, & $u = lmp$, $t = lmq$, on aura $am^2 = p^2 - Bq^2$, ou $al^2 = p^2 - Bq^2$, ou $a = p^2 - Bq^2$; p, & q étant

étant toujours premiers entr'eux. En général, ſi le nombre donné A eſt diviſible par un ou pluſieurs nombres carrés, & qu'on déſigne chacun de ces nombres par ϱ^2, on fera $u = \varrho p$, $t = \varrho q$, $\frac{A}{\varrho^2} = a$, & l'équation $A = u^2 - Bt^2$ ſe réduira à des équations de la forme, $a = p^2 - Bq^2$, où p, & q ſeront néceſſairement premiers entr'eux; ainſi, donnant ſucceſſivement à ϱ toutes les valeurs poſſibles, dont la premiere ſera toujours l'unité, on aura toutes les transformées de l'équation propoſée; & par ce moyen on n'aura plus à réſoudre que des équations de la forme $A = p^2 - Bq^2$, p, & q étant premiers entr'eux.

23. Soit donc propoſée l'équation

$$A = p^2 - Bq^2$$

dans laquelle p, & q doivent être des nombres entiers & premiers entr'eux. Si B eſt un nombre poſitif, nous ſuppoſerons

1°. que B ne ſoit pas carré, le cas de $B = b^2$ pouvant toujours ſe réſoudre par la méthode de l'art. 3.

2°. nous ſuppoſerons d'abord que A pris poſitivement ſoit $> \sqrt{B}$, & nous donnerons enſuite la méthode pour réſoudre l'équation propoſée lorſque $A < \sqrt{B}$, (art. 29 & ſuiv.)

Si B eſt un nombre négatif $- b$, alors nous ſuppoſerons toujours que A ſoit $> b$; autrement l'équation $A = p^2 + bq^2$ ne ſauroit ſubſiſter qu'en faiſant $p = o$, ou $q = o$; de ſorte que ce cas n'auroit aucune difficulté: voyez plus bas l'art. 27.

Enfin nous ſuppoſerons que A & B n'aient aucun diviſeur commun carré; car ſi A & B étoient diviſibles à la fois par ϱ^2, il eſt clair que p devroit être auſſi diviſible par ϱ, de ſorte que le facteur commun ϱ^2 s'évanouiroit de lui-même par la diviſion.

Cela poſé, ſi on multiplie l'équation $A = p^2 - Bq^2$, par $p'^2 - Bq'^2$, & qu'on prenne pour p' & q' des nombres entiers tels que l'on ait

$$pq' - qp' = \pm 1$$

on

on aura comme dans l'art. 6.

$$A(p'^2 - Bq'^2) = (pp' - Bqq')^2 - B,$$

ou bien en faisant

$$A' = p'^2 - Bq'^2, \quad \alpha = pp' - Bqq',$$

on aura l'équation $\quad AA' = \alpha^2 - B.$

Or soit $\frac{m}{n}$ la fraction que nous avons désignée, dans l'art. 7, par $\frac{p'}{q'}$, & l'on aura (art. 8), pour les valeurs générales de p', & q' dans l'équation $pq' - qp' = \pm 1$,

$$p' = \mu p \pm m, \qquad q' = \mu q \pm n$$

μ étant un nombre quelconque entier.

Donc, substituant ces valeurs dans l'expression de α, on aura $\alpha = \mu(p^2 - Bq^2) \pm (pm - Bqn)$, ou bien, en faisant $a = mp - Bnq$

$$\alpha = \mu A \pm a.$$

De sorte qu'on pourra toujours prendre $\alpha < \frac{A}{2}$ (art. 10); ce qui rendra $A' < \frac{A}{4}$, si B est positif, & $< \frac{A}{4} + 1$, si B est négatif (art. 13 & 14), & par conséquent toujours $A' < A$, en regardant A & A' comme positifs.

De là il s'ensuit que, pour que l'équation proposée puisse avoir lieu, c'est à dire, que le nombre A soit de la forme $p^2 - Bq^2$, il faut que ce nombre soit un diviseur d'un nombre tel que $\alpha^2 - B$, α étant $< \frac{A}{2}$ (abstraction faite des signes de α & de A), & que de plus le quotient A' de la division de $\alpha^2 - B$ par A soit aussi de la forme $p'^2 - Bq'^2$.

Donc, si parmi les nombres naturels moindres que $\frac{A}{2}$, on n'en trouve aucun dont le carré diminué de B soit divisible par A, on en conclura que l'équation est impossible.

Si

Si l'on en trouve un, on prendra ce nombre pour α, & l'on aura à résoudre une nouvelle équation de cette forme $A' = p'^2 - Bq'^2$, dans laquelle A' sera $< A$.

Si cette derniere équation est résoluble, alors connoissant les valeurs de p' & q', on trouvera celles de p, & q par les deux équations $\alpha = pp' - Bqq'$ & $pq' - qp' = \pm 1$, lesquelles donnent à cause de $p'^2 - Bq'^2 = A'$,

$$p = \frac{\alpha p' \mp Bq'}{A'}, \quad q = \frac{\alpha q' \mp p'}{A'}.$$

Et si ces expressions donnent des nombres entiers, on aura la résolution de l'équation proposée; sinon elle ne sera pas résoluble.

Si on trouvoit plusieurs nombres qu'on pût prendre pour α, alors chacun d'eux donneroit une équation de la forme $A' = p'^2 - Bq'^2$, & chacune de ces équations pourroit donner ensuite une ou plusieurs solutions de la proposée; d'où l'on voit que, pour avoir toutes les solutions possibles, il est nécessaire de connoitre tous les nombres α, qui étant $< \frac{A}{2}$ sont tels que $\alpha^2 - B$ soit divisible par A; & d'examiner en particulier chacune des équations $A' = p'^2 - Bq'^2$ qui en résulteront.

Au reste, lorsqu'on aura trouvé un seul nombre α qui ait les conditions requises, on pourra par son moyen trouver tous les autres.

24. Supposons en effet qu'on ait trouvé un nombre $\alpha < \frac{A}{2}$ & tel que $\alpha^2 - B$ soit divisible par A, & soit β une autre valeur de α, en sorte que l'on ait $\beta < \frac{A}{2}$, & $\beta^2 - B$ divisible par A, (A, α, & β étant supposés positifs,) il est clair que puisque $\alpha^2 - B$ & $\beta^2 - B$ sont divisibles en même tems par A, il faudra que $\beta^2 - \alpha^2$ le soit aussi, c'est à dire que $(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)$ soit divisible par A.

Donc

Donc 1°. si A est un nombre premier, il faudra que l'un ou l'autre des facteurs $\beta + \alpha$, $\beta - \alpha$ soit divisible par A, ce qui ne se peut tant que $\alpha < \frac{A}{2}$ & $\beta < \frac{A}{2}$; donc, dans ce cas, il ne pourra absolument y avoir qu'un seul nombre α qui ait les conditions requises.

2°. Si A est composé, en sorte que l'on ait $A = ab$, a, & b étant deux facteurs quelconques de A, alors il suffit que l'un des facteurs $\beta + \alpha$, $\beta - \alpha$ soit divisible par a, & l'autre par b.

Je remarque d'abord qu'on ne peut prendre pour a, & b que des nombres premiers entr'eux, ou au moins dont le plus grand commun diviseur soit 2.

Car, si a, & b avoient un commun diviseur ϱ autre que 2, il faudroit que α, & β fussent aussi divisibles par ϱ; donc A étant divisible par ϱ^2 & α par ϱ, il est clair que B devroit être aussi divisible par ϱ^2; de sorte que A & B seroient divisibles à la fois par ϱ^2, ce qui est contre l'hypothese (art. 23).

Supposons donc en premier lieu que a, & b soient premiers entr'eux, on fera $\beta + \alpha = \mu a$, $\beta - \alpha = \nu b$; & l'on aura $2\alpha = \mu a - \nu b$. Soit $\frac{a'}{b'}$ la fraction la plus proche de $\frac{a}{b}$ (art. 8), & les nombres μ, & ν seront exprimés en général de cette maniere

$$\mu = mb \pm 2\alpha b', \quad \nu = ma \pm 2\alpha a',$$

m étant un nombre quelconque entier, & le signe supérieur, ou l'inférieur ayant lieu suivant que $\frac{a'}{b'} <$ ou $> \frac{a}{b}$. Donc, puisque $\beta = \mu a - \alpha$, & $ab = A$, on aura $\beta = mA \pm 2\alpha a b' - \alpha$.

Ainsi faisant pour plus de simplicité

$$\omega = (1 \mp 2ab')\,\alpha$$

le signe supérieur étant pour le cas où $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$, & l'inférieur pour celui où $\frac{a'}{b'} > \frac{a}{b}$, on aura $\beta = mA - \omega$.

Si

Si au lieu de supposer $\beta + \alpha = \mu a$, $\beta - \alpha = \nu b$, on suppose $\beta + \alpha = \mu b$, $\beta - \alpha = \nu a$, on trouvera de la même maniere $\beta = m\mathrm{A} + \omega$.

De sorte que la considération des deux facteurs premiers a, & b, donnera en général

$$\beta = m\mathrm{A} \pm \omega,$$

& il n'y aura plus qu'à déterminer m, & le signe de ω, en sorte que β soit $< \frac{\mathrm{A}}{2}$, ce qui peut toujours se faire, mais d'une seule maniere, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut.

On voit par là que chaque couple de facteurs de A premiers entr'eux, donnera un nouveau nombre β, & n'en donnera absolument qu'un seul; de sorte que, si A est un nombre premier, ou une puissance d'un nombre premier, il ne pourra y avoir qu'une seule valeur de α; si A a deux facteurs premiers, ou qui soient des puissances quelconques de deux nombres premiers, il pourra y avoir seulement deux valeurs de α; si A contient trois facteurs premiers, ou qui soient des puissances quelconques de trois nombres premiers, il ne pourra y avoir que quatre valeurs de α, & ainsi de suite; d'où il s'ensuit en général que, si le nombre des facteurs premiers de A est n, soit que ces facteurs soient des nombres premiers, ou des puissances quelconques de nombres premiers, le nombre des valeurs de α sera ou nul, ou égal à 2^{n-1}.

Supposons en second lieu que a, & b aient pour plus grand commun diviseur, le nombre 2; & faisons $a = 2f$, $b = 2g$, f & g étant premiers entr'eux; en sorte que l'on ait $\mathrm{A} = 4fg$.

Dans ce cas, on pourra faire $\beta + \alpha = 2\mu f$ & $\beta - \alpha = 2\nu g$, sans que α, & β soient divisibles par 2, puisqu'il n'y a qu'à supposer α, & β impairs; on aura donc $\alpha = \mu f - \nu g$, d'où, en supposant que $\frac{f'}{g'}$ soit la fraction la plus proche de $\frac{f}{g}$, & faisant pour abréger

$$\theta = \pm(1 \mp 2fg'),$$

le ſigne ſupérieur étant pour le cas ou $\frac{f'}{g'} < \frac{f}{g}$, & le ſigne inférieur pour le cas ou $\frac{f'}{g'} > \frac{f}{g}$, on trouvera

$$\beta = \frac{mA}{2} \pm \theta.$$

Ici il eſt viſible qu'on peut déterminer le nombre m, & le ſigne de θ de deux manieres différentes, en ſorte que l'on ait $\beta < \frac{A}{2}$; ce qui donnera par conſéquent deux valeurs de β; mais il peut arriver que ces valeurs ſe trouvent déjà compriſes dans celles qui réſultent de la conſidération des facteurs premiers de A; on pourroit même déterminer en général le cas où les valeurs de β réſultantes de cette derniere formule ſeront toutes, ou en partie ſeulement, identiques avec celles qu'on pourra déduire de la formule précédente; mais ce détail nous meneroit trop loin, & d'ailleurs il ſeroit plus curieux qu'utile.

Nous nous contenterons de remarquer que, lorſque le nombre A eſt diviſible par 4, alors ſi β eſt une des valeurs de α, $\frac{A}{2} - \beta$ en ſera toujours une auſſi; car ſoit $A = 4E$, & $\beta^2 - B$ diviſible par $4E$, prenant au lieu de β le nombre $2E - \beta$, on aura

$$(2E - \beta)^2 - B = 4E^2 - 4E\beta + \beta^2 - B,$$

qui eſt évidemment diviſible par $4E$.

25. Conſidérons maintenant l'équation de l'art. 23,

$$A' = p'^2 - Bq'^2,$$

& comme les nombres p', & q' de cette équation ſont déterminés par la condition que $pq' - qp' = \pm 1$ (art. 23), il eſt facile de voir que ces nombres ſeront néceſſairement premiers entr'eux; de ſorte que l'équation dont il s'agit ſera parfaitement analogue à l'équation précé-

 dente

dente $A = p^2 - Bq^2$, & par conséquent sera susceptible d'opérations semblables ; donc

1°. si B est positif, & que A', considéré comme positif, soit $< \sqrt{B}$, cette équation sera déjà dans le cas que nous traiterons plus bas, (art. 29).

2°. Si B est négatif & $= -b$, & que A' soit $= b$, ou $< b$, on aura le cas de l'art. 27.

Ainsi nous supposerons encore ici que A' regardé comme positif soit $> \sqrt{B}$, dans le cas de B positif, & $> b$ dans le cas de $B = -b$; & on pourra traiter l'équation $A' = p'^2 - Bq'^2$, comme on a fait ci-dessus l'équation $A = p^2 - Bq^2$.

On multipliera donc cette équation par $p''^2 - Bq''^2$, & on déterminera p'' & q'', en sorte que l'on ait

$$p'q'' - q'p'' = \pm 1$$

ce qui, en faisant pour abréger

$$A'' = p''^2 - Bq''^2, \quad \alpha' = p'p'' - Bq'q'',$$

donnera l'équation

$$A'A'' = \alpha'^2 - B.$$

Or, puisqu'on a déjà $pq' - qp' = \pm 1$ (art. 23), on aura, en ajoutant cette équation à celle-ci $p'q'' - q'p'' = \pm 1$, ou en l'en retranchant, $(q'' \mp q)\, p' - (p'' \mp p)\, q' = o$; d'où $\frac{p'' \mp p}{q'' \mp q} = \frac{p'}{q'}$, & par conséquent

$$p'' = \mu' p' \pm p, \quad q'' = \mu' q' \pm q.$$

μ' étant un nombre entier quelconque.

Si on substitue ces valeurs de p'' & q'' dans l'expression de α', on aura $\alpha' = \mu' (p'^2 - Bq'^2) \pm (pp' - Bqq')$,

ou bien $\alpha' = \mu' A' \pm \alpha$.

Ainsi

Ainſi on pourra déterminer α', en ſorte que $\alpha' < \frac{A'}{2}$, ce qui rendra $A'' < A'$ (art. 13 & 14), en regardant α', A' & A'' comme poſitifs pour éviter toute équivoque; & il eſt facile de voir qu'on ne ſauroit ſatisfaire à cette condition que d'une ſeule maniere, de ſorte que la valeur de μ' & le ſigne de α ſe trouveront par là entierement déterminés; & comme les ſignes ambigus de p, & q dans les expreſſions de p'' & q'' doivent être les mêmes que celui de α dans l'expreſſion de α', il ne reſtera plus rien d'arbitraire dans ces expreſſions.

Par ce moyen la réſolution de l'équation $A' = p'^2 - Bq'^2$ ſera réduite à celle de l'équation $A'' = p''^2 - Bq''^2$, dans laquelle $A'' < A'$, (abſtraction faite des ſignes de A' & de A''.)

En effet, dès qu'on aura trouvé les valeurs de p'' & de q'', il n'y aura qu'à chercher celles de p' & q' à l'aide des équations

$$\alpha' = p'p'' - Bq'q'' \quad \& \quad p'q'' - q'p'' = \pm 1$$

leſquelles donnent

$$p' = \frac{\alpha' p'' \mp Bq''}{A''}, \quad q' = \frac{\alpha' q'' \mp p''}{A''};$$

ſi ces expreſſions donnent, (en prenant à volonté les ſignes ſupérieurs, ou inférieurs,) des nombres entiers, alors on aura par les expreſſions de p'' & q'' trouvées ci-deſſus

$$\pm p = p'' - \mu' p', \quad \pm q = q'' - \mu' q',$$

& le probleme ſera réſolu.

Mais, ſi les expreſſions de p', & q' ne donnent que des nombres rompus, ce ſera une marque que l'équation propoſée n'eſt point réſoluble en entiers.

Maintenant, puiſque l'on a $p'q'' - q'p'' = \pm 1$, il eſt viſible que p'' & q'' ſeront premiers entr'eux; d'où il s'enſuit que l'équation $A'' = p''^2 - Bq''^2$, ſera parfaitement ſemblable à l'équation $A' = p'^2 - Bq'^2$, & que par conſéquent on y pourra appliquer les

les mêmes raisonnemens, & les mêmes opérations que nous venons de faire sur celle-ci, & ainsi de suite.

26. Donc, si on fait comme dans l'art. 12

$$\left.\begin{array}{lll} AA' = \alpha^2 - B, & \alpha < \frac{A}{2} & \\ A'A'' = \alpha'^2 - B, & \alpha' = \mu' A' \pm \alpha < \frac{A'}{2} & \\ A''A''' = \alpha''^2 - B, & \alpha'' = \mu'' A'' \pm \alpha' < \frac{A''}{2} & \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} & \end{array}\right\} \cdots (\alpha)$$

(c'est à dire $\alpha < \frac{A}{2}$, $\alpha' < \frac{A'}{2}$, $\alpha'' < \frac{A''}{2}$ &c. en regardant α, α', α'' &c. & A, A', A'' &c. comme tous positifs,)

on aura cette suite d'équations

$$\left.\begin{array}{l} A = p^2 - Bq^2 \\ A' = p'^2 - Bq'^2 \\ A'' = p''^2 - Bq''^2 \\ A''' = p'''^2 - Bq'''^2 \\ \text{\&c.} \end{array}\right\} \cdots\cdots (\beta)$$

dans lesquelles

$$\left.\begin{array}{ll} \pm p = p'' - \mu' p', & \pm q = q'' - \mu' q' \\ \pm p' = p''' - \mu'' p'', & \pm q' = q''' - \mu'' q'' \\ \pm p'' = p^{IV} - \mu''' p''', & \pm q'' = q^{IV} - \mu''' q''' \\ \text{\&c} & \text{\&c.} \end{array}\right\} \cdots (\gamma)$$

où il faudra toujours se souvenir que les signes ambigus de p, q, & α doivent être les mêmes, ainsi que ceux de p', q', α' &c.

De plus, on aura aussi en général les équations (n, & $n-1$ dénotant des quantiemes, & non des exposans.)

p^{n-1}

$$\left.\begin{array}{l} p^{n-1} = \dfrac{a^{n-1}p^{n} \pm Bq^{n}}{A^{n}} \\ q^{n-1} = \dfrac{a^{n-1}q^{n} \pm p^{n}}{A^{n}} \end{array}\right\} \quad - \ - \ - \ - \ (\delta)$$

les signes ambigus étant à volonté, pourvu qu'on les prenne de même dans les deux équations.

Donc, si on peut résoudre une quelconque des équations (β) comme $A^{n} = (p^{n})^{2} - B(q^{n})^{2}$, c'est à dire trouver les valeurs de p^{n}, & q^{n}, on pourra trouver aussi par les équations (δ) les valeurs des quantités précédentes p^{n-1}, & q^{n-1}, & ces quatre valeurs étant connues, on pourra par le moyen des formules (γ) remonter aux valeurs de p, & q qui résolvent l'équation $A = p^{2} - Bq^{2}$; & qui seront nécessairement des nombres entiers, si p^{n}, q^{n}, p^{n-1} & q^{n-1} le sont.

Réciproquement, si l'équation $A^{n} = (p^{n})^{2} - B(q^{n})^{2}$ n'admet point de solution en nombres entiers, ou que les expressions de p^{n-1}, q^{n-1} ne donnent point de nombres entiers, on en devra conclure que l'équation $A = p^{2} - Bq^{2}$ n'est point résoluble en nombres entiers.

Au reste il faut remarquer que, comme on peut prendre également a positif, ou négatif, chaque valeur de a donnera deux suites différentes de formules telles que (α) & (γ), qu'il faudra considérer chacune en particulier pour avoir toutes les solutions possibles de l'équation $A = p^{2} - Bq^{2}$; mais, sans être obligé de faire un nouveau calcul, il suffira d'observer qu'en prenant a négatif, les formules (α) resteront les mêmes en changeant simplement les signes de a', a'' &c. & de μ', μ'' &c., d'où il s'ensuit qu'il n'y aura d'autre changement à faire aux formules (γ) que de prendre μ', μ'', μ''' &c. avec des signes contraires.

Analise du cas où B est négatif.

27. Considérons d'abord le cas de B négatif, parce qu'il est plus facile à résoudre que celui de B positif, & on prouvera, comme

 on

on a fait dans l'art. 14, que la férie des quantités A, A', A'', A''' &c. pourra être continuée jusqu'à ce que l'on arrive à un terme comme A^n, (n dénotant un quantieme & non pas une puissance,) lequel soit égal ou moindre que B considéré comme positif, c'est à dire qu'en supposant $B = -b$, on aura $A^n = b$ ou $< b$.

Soit 1°. $A^n = b$, & l'équation $A^n = (p^n)^2 + b(q^n)^2$ ne pourra subsister, à moins que $(p^n)^2$ ne soit divisible par b; donc, si $b = c^2 d$, on aura nécessairement $p^n = cdr$; & l'équation $b = (p^n)^2 + b(q^n)^2$ deviendra en divisant par b, $1 = dr^2 + (q^n)^2$; laquelle donne ou $r = o$ & par conséquent $p^n = o$, & $q^n = 1$; ou $q^n = o$, & $dr^2 = 1$, c'est à dire $r = 1$, & $d = 1$; donc $p^n = c$; de sorte que ce second cas ne peut avoir lieu à moins que b ne soit carré; or, si on cherche dans ce même cas les valeurs de p^{n-1} & q^{n-1} par les formules de l'art. préc., on trouvera $q^{n-1} = \pm \frac{c}{c^2} = \pm \frac{1}{c}$; d'où l'on voit que q^{n-1} ne sauroit être un nombre entier, à moins que c ne soit $= 1$, & qu'ainsi le probleme ne peut être résolu dans le cas dont il s'agit que lorsque $c = 1$, ce qui donne $b = 1$, & $p^n = 1$, $q^n = o$. Or, lorsque $b = 1$, il est clair que dans l'équation $A^n = (p^n)^2 + (q^n)^2$, les quantités p^n & q^n peuvent s'échanger entr'elles, & que la même chose a lieu aussi à l'égard des autres équations analogues; de sorte que la supposition de $p^n = 1$, & $q^n = o$, rentre dans celle de $p^n = o$ & $q^n = 1$, que nous allons examiner.

On aura donc en général, lorsque $A^n = b$, $p^n = o$ & $q^n = 1$, d'où l'on trouvera (art. préc.) $p^{n-1} = \pm 1$, $q^{n-1} = \frac{a^{n-1}}{b}$; de sorte qu'il faudra dans ce cas, pour que le probleme soit résoluble, que a^{n-1} soit divisible par b; si cette condition a lieu, alors on aura

$$p^n = o, \quad q^n = 1$$

$$p^{n-1} = 1, \quad q^{n-1} = \frac{a^{n-1}}{b}$$

& on pourra en remontant trouver les valeurs de p, & q; sur quoi il est bon de remarquer que, quoique l'on ait trouvé $p^{n-1} = \pm 1$, il seroit cependant inutile de faire $p^{n-1} = -1$, parce qu'il est facile de voir qu'à cause de $p^n = 0$, les valeurs de p^{n-2}, p^{n-3} &c. p ne différeroient que par les signes, de celles qu'on a en faisant $p^{n-1} = 1$.

Soit 2°. $A^n < b$; dans ce cas, il est visible que l'équation $A^n = (p^n)^2 + b(q^n)^2$ ne sauroit avoir lieu, à moins que l'on n'ait $q^n = 0$, & $A^n = (p^n)^2$; ce qui donnera $p^{n-1} = \frac{\alpha^{n-1}}{p^n}$, $q^{n-1} = \pm \frac{1}{p^n}$; d'où l'on voit qu'à moins que l'on n'ait $p^n = 1$, & par conséquent aussi $A^n = 1$, les valeurs de p^{n-1} & de q^{n-1} ne pourront être des nombres entiers.

Donc, si on pousse la série des nombres A, A′, A″ &c. jusqu'à ce que l'on parvienne à un terme A^n moindre que b, & que ce terme soit différent de l'unité, on en devra conclure que l'équation proposée $A = p^2 + bq^2$ n'est point résoluble en nombres entiers.

Si au contraire on a $A^n = 1$, alors on aura, en ne donnant à q^{n-1} que le signe $+$, par une raison semblable à celle que nous avons dite ci-dessus à l'égard de p^{n-1},

$$p^n = 1, \quad q^n = 0$$
$$p^{n-1} = \alpha^{n-1}, \quad q^{n-1} = 1$$

& on pourra en remontant trouver les valeurs cherchées de p & q.

De là on voit que chaque valeur de α (art. 23) ne pourra donner qu'une seule solution de l'équation $A = p^2 - Bq^2$, lorsque B est négatif, de sorte que, comme le nombre des valeurs que peut avoir la quantité α est nécessairement limité, celui des solutions de l'équation $A = p^2 + bq^2$ le sera aussi.

Ainsi, si A est un nombre premier, ou une puissance quelconque d'un nombre premier autre que 2, l'équation $A = p^2 + bq^2$ ne pourra avoir qu'une seule solution en nombres entiers (voyez plus haut l'art. 24).

 Quant

Quant aux valeurs négatives de α, il est facile de voir par les formules (γ), qu'en changeant les signes de μ', μ'', μ''' &c. & de α^{n-1}, les valeurs de p, & q demeureront les mêmes, ou changeront simplement de signe, à cause que l'on a $p^n = 0$, $p^{n-1} = 1$, $q^n = 1$, $q^{n-1} = -\frac{\alpha^{n-1}}{b}$, ou $p^n = 1$, $p^{n-1} = -\alpha^{n-1}$, $q^n = 0$, $q^{n-1} = 1$. Ainsi la considération de α négatif sera tout à fait inutile, lorsque B est un nombre négatif.

Analise du cas où B *est positif.*

28. Supposons présentement que B soit un nombre positif; on prouvera d'abord par un raisonnement semblable à celui de l'art. 13, que les nombres α, α', α'' &c. iront en diminuant jusqu'à ce que l'on arrive à un nombre comme α^n qui soit $= \sqrt{B}$, ou $< \sqrt{B}$; mais, comme B est supposé non carré (art. 23), il est impossible que $\alpha^n = \sqrt{B}$, de sorte qu'on aura nécessairement $\alpha^n < \sqrt{B}$.

On aura donc (art 26) une équation de cette forme $A^n A^{n+1} = (\alpha^n)^2 - B$, ou bien $-A^n A^{n+1} = B - (\alpha^n)^2$, dans laquelle, à cause de $(\alpha^n)^2 < B$, il est clair que les nombres A^n & A^{n+1} devront être de signes différens; & que de plus l'un de ces nombres, abstraction faite de son signe, devra être $< \sqrt{B}$.

Faisons pour plus de simplicité $\alpha^n = e$, & nommons $\pm$ E l'un des nombres A^n, A^{n+1}, & $\mp$ D l'autre, D & E étant des nombres positifs & E étant $< \sqrt{B}$; en sorte que l'on ait l'équation

$$DE = B - e^2,$$

& comme l'on a par les formules (β) $A^n = (p^n)^2 - B(q^n)^2$, & $A^{n+1} = (p^{n+1})^2 - B(q^{n+1})^2$, il est clair que les nombres D & E seront de ces formes

$$\mp D = \varrho^2 - B\sigma^2, \quad \pm E = r^2 - Bs^2.$$

Ainsi la question se réduit à résoudre ces deux équations dans lesquelles DE < B; en effet les valeurs de ϱ, σ, r & s étant connues, on aura celles

celles de p^n, q^n, p^{n+1}, q^{n+1}, & on pourra à l'aide des formules (γ) remonter aux valeurs de p, & q.

Il suffit même de résoudre l'une de ces deux équations; car il est facile de voir par les art. 23 & 25 que les quantités ϱ, σ, r & s doivent être telles que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} r\sigma - s\varrho = \pm 1 \\ r\varrho - Bs\sigma = e \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\epsilon)$$

par où l'on pourra déterminer ϱ, & σ, dès qu'on aura r, & s, ou *vice versa.*

Il faut remarquer ici que l'ambiguité des signes dans l'équation $r\sigma - s\varrho = \pm 1$ n'est point arbitraire, mais qu'elle doit répondre à celle de l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$; en effet cette équation étant combinée avec l'équation $\mp D = \varrho^2 - B\sigma^2$, donne $\pm (E\sigma^2 + Ds^2) = r^2\sigma^2 - s^2\varrho^2 = (r\sigma + s\varrho)(r\sigma - s\varrho)$, d'où l'on voit que la quantité $r\sigma - s\varrho$ doit être nécessairement positive ou négative suivant que l'on a le signe supérieur, ou l'inférieur, dans l'équation dont il s'agit.

A l'égard de e, c'est à dire de α^n, elle peut être positive ou négative, & il faudra même la faire successivement positive & négative pour avoir toutes les solutions possibles de l'équation proposée (art. 26), en ayant attention, comme nous l'avons fait observer dans cet article, de changer les signes de μ', μ'', μ''' &c. dans les formules (γ) lorsqu'on prendra e négative, tout le reste demeurant d'ailleurs le même.

29. Considérons donc l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, dans laquelle $E < \sqrt{B}$, & supposons pour un moment que l'on connoisse déjà les nombres entiers r, & s qui y satisfont; il est d'abord clair que ces nombres seront premiers entr'eux en vertu de la premiere des équations (ϵ) de l'art. préc.; ensuite il est facile de prouver que l'on pourra toujours former deux suites décroissantes de nombres entiers, comme r, r', r'', r''' &c. & s, s', s'', s''' &c. dont la premiere

commence par r, & se termine par 1, & dont la seconde commence par s & se termine par o, & qui soient de plus telles que l'on ait

$$rs' - sr' = \pm 1, \quad r's'' - s'r'' = \mp 1,$$
$$r''s''' - s''r''' = \pm 1 \text{ \&c.}$$

Car, si on divise le nombre r par le nombre s, (il est clair que r doit être $> s$, à cause que l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ donne $\frac{r}{s} = \sqrt{\left(B \pm \frac{E}{s^2}\right)}$, & que $E < \sqrt{B}$), qu'ensuite on divise s par le reste de la premiere division, & qu'on continue toujours de diviser le reste précédent par le dernier reste, jusqu'à ce que l'on arrive à une division exacte, & qu'on nomme α, β, γ, δ &c. ω les quotiens qui en résultent, on aura, comme l'on sait

$$\frac{r}{s} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta \text{ \&c.} + \cfrac{1}{\omega}}}}$$

où l'on remarquera qu'à cause que les nombres r & s sont premiers entr'eux, le dernier reste sera nécessairement l'unité, & par conséquent le dernier quotient sera plus grand que l'unité, de sorte qu'on aura $\omega = 2$ ou > 2.

Cette fraction continue étant coupée successivement au premier, au second, au troisieme &c. de ses termes, donnera autant de fractions particulieres, lesquelles, en y ajoutant au commencement la fraction $\frac{1}{0}$ formeront cette suite de fractions;

$$\frac{1}{o}, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \text{ \&c. } \frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{s},$$

où

où l'on aura

$$a = \alpha \qquad b = 1$$
$$c = \beta a + 1 \qquad d = \beta b$$
$$e = \gamma c + a \qquad f = \gamma d + b$$
$$\&c \qquad \&c.$$
$$r = \omega p + m \qquad s = \omega q + n$$

de forte qu'on aura auffi

$$1b - oa = 1$$
$$ad - bc = -1$$
$$cf - de = 1$$
$$\&c.$$
$$mq - np = \pm 1$$
$$ps - qr = \mp 1$$

De plus, ces fractions feront convergentes vers la fraction $\frac{r}{s}$, avec cette différence que les fractions $\frac{1}{o}$, $\frac{c}{d}$, &c. qui occupent les places impaires feront toujours plus grandes que $\frac{r}{s}$, & qu'au contraire les fractions qui occupent les places paires comme $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ &c. feront toutes plus petites que $\frac{r}{s}$; comme il eft facile de le démontrer par la nature même de ces fractions. Au refte, nous n'aurons pas befoin de trouver ces fractions; il nous fuffira de confidérer qu'il eft toujours poffible de les trouver, quelle que foit la fraction donnée $\frac{r}{s}$.

M. Huygens eft, je crois, le premier qui ait imaginé de réduire une fraction quelconque en une fraction continue, & d'en déduire une fuite de fractions particulieres convergentes vers la fraction donnée

née (voyez son traité de *Automate planetario*). D'autres Géometres ont ensuite étendu & perfectionné cette théorie, surtout M. Euler dans son *Introductio in Analisin*, & dans plusieurs excellens Mémoires imprimés parmi ceux de l'Académie de Petersbourg; cette matiere se trouve aussi très bien développée dans l'Algebre de M. Saunderson qui emploie une méthode indépendante des fractions continues.

Maintenant, si dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, c'est le signe supérieur qui a lieu, en sorte que l'on doive avoir $rs' - sr' = 1$, $r's'' - s'r'' = -1$, $r''s''' - s''r''' = 1$ &c. & que le nombre des termes dans la série $\frac{1}{0}$, $\frac{a}{b}$, &c. $\frac{r}{s}$ soit impair, il est clair qu'il n'y aura qu'à faire $r' = p$, $r'' = m$ &c. $s' = q$, $s'' = n$ &c. mais, si le nombre des termes est pair, alors on fera $r' = r - p$, $r'' = p$, $r''' = m$ &c. $s' = s - q$, $s'' = q$, $s''' = n$ &c.; en effet on aura dans ce cas $mq - np = -1$, $ps - qr = 1$; donc $rs' - sr' = -rq + sp = 1$, $r's'' - s'r'' = rq - sp = -1$, $r''s''' - s''r''' = pn - qm = 1$ &c.; or, comme $r = \omega p + m$, & $s = \omega q + n$, & que ω est $=$ ou > 2, on aura, en faisant $\omega - 1 = \psi$, $r' = \psi p + m$, $s' = \psi q + n$, & $r = r' + r''$, & $s = s' + s''$, ψ étant un nombre positif.

On résoudra de même le cas où ce seroit le signe inférieur qui devroit avoir lieu, & l'on en conclura qu'il est toujours possible de trouver des nombres r', r'', r''' &c. & s', s'', s''' &c. qui aient les propriétés requises; & que ces nombres peuvent être supposés tels que l'on ait

$$\left.\begin{array}{ll} r = \lambda' r' + r'', & s = \lambda' s' + s'' \\ r' = \lambda'' r'' + r''', & s' = \lambda'' s'' + s''' \\ r'' = \lambda''' r''' + r^{IV}, & s'' = \lambda''' s''' + s^{IV} \\ r''' = \lambda^{IV} r^{IV} + r^{V}, & s''' = \lambda^{IV} s^{IV} + s^{V} \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}\right\} \quad (\zeta)$$

λ', λ'', λ''' &c. étant des nombres entiers & positifs.

On

On voit de plus que les deux derniers termes de la série r, r', r'', r''' etc. seront $\alpha, 1$, (α étant le nombre entier qui approchera le plus de la fraction $\frac{r}{s}$) & que les deux derniers termes de la série s, s', s'', s''' etc. seront $1, 0$; de sorte que, si on connoissoit les nombres $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. avec le nombre α, on pourroit en remontant par les formules précédentes trouver les nombres cherchés r & s.

Les conditions par lesquelles on doit déterminer les nombres $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. sont, que ces nombres soient tous entiers positifs, & tels que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} rs' - sr' &= \pm 1 \\ r's'' - s'r'' &= \mp 1 \\ r''s''' - s''r''' &= \pm 1 \\ r'''s^{IV} - s'''r^{IV} &= \mp 1 \\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (\eta)$$

en prenant les signes supérieurs, ou inférieurs, suivant que l'on aura le signe supérieur ou l'inférieur dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$. Or il est facile de voir que, si la premiere équation $rs' - sr' = \pm 1$ a lieu, les suivantes auront lieu d'elles-mêmes, en vertu des formules (ζ); en effet, on aura par ces formules $r'' = r - \lambda' r'$, $s'' = s - \lambda' s'$, donc $r's'' - s'r'' = r's - s'r = \mp 1$, & ainsi des autres.

30. Cela posé, reprenons l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, & soit d'abord le signe supérieur, en sorte que l'on ait $E = r^2 - Bs^2$; donc, divisant par s^2, on aura $\frac{r^2}{s^2} - B = \frac{E}{s^2}$, & divisant encore par $\frac{r}{s} + \sqrt{B}$, $\frac{r}{s} - \sqrt{B} = \frac{E}{s^2\left(\frac{r}{s} + \sqrt{B}\right)}$; donc, puisque

que $E < \sqrt{B}$ (hyp.), on aura à plus forte raison $E < \sqrt{B} + \frac{r}{s}$; donc $\frac{r}{s} - \sqrt{B} > 0$, & $< \frac{1}{s^2}$.

Or l'équation $rs' - sr' = 1$, donne $\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'} = \frac{1}{ss'}$, donc ayant $\frac{r}{s} - \sqrt{B} < \frac{1}{s^2}$, on aura aussi $\frac{r'}{s'} - \sqrt{B} < \frac{1}{s^2} - \frac{1}{ss'}$; mais à cause de $s' < s$, il est clair que $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{ss'} < 0$; donc aussi $\frac{r'}{s'} - \sqrt{B} < 0$, & multipliant par $\frac{r'}{s'} + \sqrt{B}$, $\frac{r'^2}{s'^2} - B < 0$, & par conséquent $r'^2 - Bs'^2 < 0$; ainsi l'on aura $r'^2 - Bs'^2 = -E'$, E' étant un nombre positif.

De même l'équation $r's'' - s'r'' = -1$, donnera celle-ci $\frac{r'}{s'} - \frac{r''}{s''} = -\frac{1}{s's''}$, laquelle étant ajoutée à l'équation ci-dessus $\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'} = \frac{1}{ss'}$, on aura $\frac{r}{s} - \frac{r''}{s''} = \frac{1}{ss'} - \frac{1}{s's''}$; mais ayant $s' < s$, & $s'' < s'$, il est clair que $\frac{1}{ss'} < \frac{1}{s's''}$; donc $\frac{r}{s} - \frac{r''}{s''} < 0$, c'est à dire $\frac{r''}{s''} - \frac{r}{s} > 0$. Or l'on a aussi $\frac{r}{s} - \sqrt{B} > 0$; donc on aura encore $\frac{r''}{s''} - \sqrt{B} > 0$, & multipliant par $\frac{r''}{s''} + \sqrt{B}$, $\frac{r''^2}{s''^2} - B > 0$, & $r''^2 - Bs''^2 > 0$; donc $r''^2 - Bs''^2 = E''$, E'' étant un nombre positif.

L'équa-

L'équation $r''s''' - s''r''' = 1$, donnera pareillement $\frac{r''}{s''} - \frac{r'''}{s'''} = \frac{1}{s''s'''}$, & ajoutant l'équation $\frac{r}{s} - \frac{r''}{s''} = \frac{1}{ss'} - \frac{1}{s's''}$, on aura $\frac{r}{s} - \frac{r'''}{s'''} = \frac{1}{ss'} - \frac{1}{s's''} + \frac{1}{s''s'''}$; donc, puisque $\frac{r}{s} - \sqrt{B} < \frac{1}{s^2}$, on aura $\frac{r'''}{s'''} - \sqrt{B} < \frac{1}{s^2} - \frac{1}{ss'} + \frac{1}{s's''} - \frac{1}{s''s'''}$; or, à cause de $s' < s$, $s'' < s'$ & $s''' < s''$, on aura $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{ss'} < 0$ & $\frac{1}{s's''} - \frac{1}{s''s'''} < 0$; donc aussi $\frac{r'''}{s'''} - \sqrt{B} < 0$; donc $r'''^2 - Bs'''^2 < 0$, donc on aura $r'''^2 - Bs'''^2 = -E'''$, E''' étant un nombre positif; & ainsi de suite.

Supposons en second lieu que l'on ait $-E = r^2 - Bs^2$; donc $\frac{r^2}{s^2} - B = -\frac{E}{s^2}$ & $\frac{r}{s} - \sqrt{B} = -\frac{E}{s^2\left(\frac{r}{s}+\sqrt{B}\right)}$; donc, à cause de $E < \sqrt{B}$, on aura $\frac{r}{s} - \sqrt{B} < 0$ & $> -\frac{1}{s^2}$. Or on a dans ce cas $rs' - sr' = -1$; donc $\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'} = -\frac{1}{ss'}$; donc, à cause de $\frac{r}{s} - \sqrt{B} > -\frac{1}{s^2}$, on aura aussi $\frac{r'}{s'} - \sqrt{B} > \frac{1}{ss'} - \frac{1}{s^2}$; mais, puisque $s' < s$, on a $\frac{1}{ss'} - \frac{1}{s^2} > 0$, donc $\frac{r'}{s'} - \sqrt{B} > 0$, donc aussi $r'^2 - Bs'^2 > 0$, donc on aura $r'^2 - Bs'^2 = E'$, E' étant un nombre positif.

On aura ensuite $r's'' - s'r'' = 1$, donc $\frac{r'}{s'} - \frac{r''}{s''} = \frac{1}{s's''}$, donc, puisque $\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'} = -\frac{1}{ss'}$, on aura aussi $\frac{r}{s} - \frac{r''}{s''} = -\frac{1}{ss'} + \frac{1}{s's''} > 0$, à cause de $s' < s$ & $s'' < s'$; donc $\frac{r}{s} - \frac{r''}{s''} > 0$, & par conséquent $\frac{r''}{s''} - \frac{r}{s} < 0$; mais $\frac{r}{s} - \sqrt{B} < 0$; donc on aura aussi $\frac{r''}{s''} - \sqrt{B} < 0$; donc $r''^2 - Bs''^2 < 0$; donc $r''^2 - Bs''^2 = -E''$, E'' étant un nombre positif.

On prouvera de même que l'on aura $r'''^2 - Bs'''^2 = E'''$, E''' étant positif, & ainsi de suite.

Donc, en combinant les deux cas, on aura en général les formules suivantes

$$\left.\begin{array}{l} \pm E = r^2 - Bs^2 \\ \mp E' = r'^2 - Bs'^2 \\ \pm E'' = r''^2 - Bs''^2 \\ \mp E''' = r'''^2 - Bs'''^2 \\ \&c. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\theta)$$

dans lesquelles E est positif, & moindre que $\sqrt{B}$ par l'hypothese, & E', E'', E''' &c. sont aussi nécessairement positifs.

31. Qu'on multiplie présentement les équations (θ) deux à deux, on aura (art. 9)

1°. $-EE' = (rr' - Bss')^2 - B(rs' - sr')^2$; mais on a par les formules (η) $rs' - sr' = \pm 1$; donc, si on fait

$$rr' - Bss' = \mp \varepsilon$$

on aura l'équation $-EE' = \varepsilon^2 - B$, ou bien

$$EE' = B - \varepsilon^2.$$

2°.

2°. $-E'E'' = (r'r'' - Bs's'')^2 - B(r's'' - s'r'')^2$; mais $r's'' - s'r'' = \mp 1$; donc faisant

$$r'r'' - Bs's'' = \pm \varepsilon'$$

on aura $- E'E'' = \varepsilon'^2 - B$, ou bien

$$E'E'' = B - \varepsilon'^2.$$

3°. Faisant de même

$$r''r''' - Bs''s''' = \mp \varepsilon''$$

on trouvera $- E''E''' = \varepsilon''^2 - B$, ou bien

$$E''E''' = B - \varepsilon''^2$$

& ainsi de suite.

Maintenant on a par les formules (ς) $r'' = r - \lambda' r'$, $s'' = s - \lambda' s'$, donc $r'r'' - Bs's'' = rr' - Bss' - \lambda(r'^2 - Bs'^2)$; donc $\pm \varepsilon' = \mp \varepsilon \pm \lambda' E'$, savoir $\varepsilon' = \lambda' E' - \varepsilon$.

On a de même $r''' = r' - \lambda'' r''$, $s''' = s' - \lambda'' s''$, donc $r''r''' - Bs''s''' = r'r'' - Bs's'' - \lambda''(r''^2 - Bs''^2)$, savoir $\mp \varepsilon'' = \pm \varepsilon' \mp \lambda'' E''$, ou bien $\varepsilon'' = \lambda'' E'' - \varepsilon'$; & ainsi des autres.

De sorte qu'on aura les équations

$$\left.\begin{aligned} E\,E' &= B - \varepsilon^2 \\ E'E'' &= B - \varepsilon'^2 \\ E''E''' &= B - \varepsilon''^2 \\ E'''E^{IV} &= B - \varepsilon'''^2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (\kappa)$$

dans lesquelles

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon' &= \lambda' E' - \varepsilon \\ \varepsilon'' &= \lambda'' E'' - \varepsilon' \\ \varepsilon''' &= \lambda''' E''' - \varepsilon'' \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (\lambda)$$

32. Nous avons vu (art. 30) que les nombres E, E′, E″ etc. ſont néceſſairement tous poſitifs; donc, pour que les équations (κ) puiſſent ſubſiſter, il faudra que les carrés ε^2, ε'^2, ε''^2 etc. ſoient tous moindres que B.

Or je vais prouver d'abord que, pour que ces conditions puiſſent avoir lieu, il faut que les nombres ε, ε', ε'' etc. dans les équations (λ) ſoient tous poſitifs.

Car 1°. ſuppoſons, s'il eſt poſſible, que ε ſoit $= -\eta$, η étant un nombre poſitif, on aura donc $\varepsilon' = \lambda' E' + \eta$, & par conſéquent ε' poſitif, à cauſe de λ' & E′ poſitif; mais il faut que $\varepsilon'^2 < B$, donc $\lambda' E' + \eta < \sqrt{B}$; & par conſéquent $\lambda' < \frac{\sqrt{B} - \eta}{E'}$; mais λ' doit être entier poſitif; donc il faut que $E' < \sqrt{B} - \eta$; or l'on a $EE' = B - \eta^2 = (\sqrt{B} + \eta)(\sqrt{B} - \eta)$; donc E′ ne peut être $< \sqrt{B} - \eta$ que E ne ſoit en même tems $> \sqrt{B} + \eta$; mais $E < \sqrt{B}$ (hyp.), donc il eſt impoſſible que ε ſoit négatif.

2°. Suppoſons $\varepsilon' = -\eta'$, η' étant poſitif, on aura $\varepsilon'' = \lambda'' E'' + \eta'$, & par conſéquent ε'' poſitif; mais on doit avoir $\varepsilon''^2 < B$, donc il faudra que $\lambda'' E'' + \eta' < \sqrt{B}$, & par conſéquent $\lambda'' < \frac{\sqrt{B} - \eta'}{E''}$; donc, pour que λ'' puiſſe être entier poſitif, comme il le doit, il faut que $E'' < \sqrt{B} - \eta'$; or $E'E'' = B - \eta'^2 = (\sqrt{B} + \eta')(\sqrt{B} - \eta')$, donc E″ ne ſauroit être $< \sqrt{B} - \eta'$ que E′ ne ſoit $> \sqrt{B} + \eta'$, & à plus forte raiſon $E' > \sqrt{B}$; mais l'équation $\varepsilon' = \lambda' E' - \varepsilon$ donne, à cauſe de $\varepsilon' = -\eta$, $\lambda' E' = \varepsilon - \eta'$; & par conſéquent, puiſque $\varepsilon < \sqrt{B}$, $\lambda' E' < \sqrt{B}$; ce qui répugne tant que λ' eſt entier poſitif.

Donc ε' ſera néceſſairement poſitif, & on démontrera de même que les nombres ε'', ε''' etc. dans les équations (λ) devront être auſſi tous poſitifs.

33. Maintenant, puiſqu'on doit avoir ε^2, ε'^2, ε''^2 etc. moindres que B, il eſt clair qu'il faudra que ε, ε', ε'', ε''' etc. ſoient tous $< \sqrt{B}$.

Sup-

Supposons donc que ε soit en effet $< \sqrt{B}$, & voyons comment on doit déterminer les nombres λ', λ'', λ''' etc. dans les équations (λ) pour que les nombres ε', ε'', ε''' etc. soient tous moindres que $\sqrt{B}$.

Soit 1°. $\varepsilon' < \sqrt{B}$, donc $\lambda' E' - \varepsilon < \sqrt{B}$; donc

$$\lambda' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'}$$

Mais, comme λ' doit être un nombre entier positif, il faudra que $E' < \sqrt{B} + \varepsilon$; & par conséquent, à cause de $EE' = B - \varepsilon^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon)(\sqrt{B} - \varepsilon)$, que E soit $> \sqrt{B} - \varepsilon$; ainsi le nombre ε devra être $< \sqrt{B}$ & $> \sqrt{B} - E$.

Soit 2°. $\varepsilon'' < \sqrt{B}$, donc $\lambda'' E'' - \varepsilon' < \sqrt{B}$, & de là

$$\lambda'' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''}.$$

Mais, pour que λ'' puisse être entier positif, il faudra que $E'' < \sqrt{B} + \varepsilon'$, & par conséquent, à cause de $E'E'' = B - \varepsilon'^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon')(\sqrt{B} - \varepsilon')$, que E' soit $> \sqrt{B} - \varepsilon'$, ou bien $\varepsilon' > \sqrt{B} - E'$, donc $\lambda' E' - \varepsilon > \sqrt{B} - E'$, & par conséquent

$$\lambda' + 1 > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'}.$$

Soit 3°. $\varepsilon''' < \sqrt{B}$, donc $\lambda''' E''' - \varepsilon'' < \sqrt{B}$, & par conséquent

$$\lambda''' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E'''}.$$

Or, puisque λ''' doit être entier & positif, il faudra que $E''' < \sqrt{B} + \varepsilon''$, par conséquent, à cause de $E''E''' = B - \varepsilon''^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon'')(\sqrt{B} - \varepsilon'')$, il faudra que $E'' > \sqrt{B} - \varepsilon''$, c'est à dire $\varepsilon'' > \sqrt{B} - E''$, donc $\lambda'' E'' - \varepsilon' > \sqrt{B} - E''$, & par conséquent

$$\lambda'' + 1 > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''}.$$ Et ainsi de suite.

Si la quantité E^{IV} étoit la derniere de la férie E, E', E'' etc. en forte que l'équation $E'''E^{IV} = B - \varepsilon'''^2$ fût la derniere des équations ($\varkappa$), alors on auroit feulement pour la détermination de λ''' la condition $\lambda''' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E'''}$; mais, fi on veut de plus que le dernier terme de la férie E, E', E'' etc. foit $< \sqrt{B}$, alors en fuppofant que ce foit E^{IV}, on aura $E^{IV} < \sqrt{B}$, & à plus forte raifon $E^{IV} < \sqrt{B} + \varepsilon'''$, donc, à caufe de $E'''E^{IV} = (\sqrt{B} + \varepsilon''')(\sqrt{B} - \varepsilon''')$, $E''' > \sqrt{B} - \varepsilon'''$, c'eft à dire $\varepsilon''' > \sqrt{B} - E'''$, & par conféquent $\lambda'''E''' - \varepsilon'' > \sqrt{B} - E'''$, d'où

$$\lambda''' + 1 > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E'''}.$$

C'eft la même condition qu'on auroit par la confidération de l'équation fuivante $E^{IV}E^{V} = B - \varepsilon^{IV 2}$, fi le terme E^{IV} n'étoit pas le dernier.

Donc en général, fi la férie des nombres E, E', E'' etc. eft fuppofée continuée jufqu'à un terme $< \sqrt{B}$, il faudra, pour que les équations ($\varkappa$) & (λ) puiffent fubfifter en ne prenant pour E, E', E'' etc. & pour λ', λ'', λ''' etc. que des nombres entiers pofitifs, il faudra, dis-je, que l'on ait d'abord

$$\varepsilon < \sqrt{B} \quad \& \quad \varepsilon > \sqrt{B} - E$$

& enfuite

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'}, & \lambda' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'} - 1 \\ \lambda'' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''}, & \lambda'' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''} - 1 \\ \lambda''' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E'''}, & \lambda''' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E'''} - 1 \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (\mu)$$

On voit par là que les nombres λ', λ'', λ''' etc. feront abfolument déterminés, de forte que les nombres E & ε étant connus, tous les autres le feront auffi par le moyen des formules ($\varkappa$), (λ) & (μ).

En

En effet connoissant E & ε, on aura E′ par l'équation $EE' = B - \varepsilon^2$; ensuite, à cause de $\lambda' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'}$ & $> \frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'} - 1$, il est clair qu'on ne pourra prendre pour λ' que le nombre entier qui est immédiatement plus petit que $\frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'}$, & il est facile de voir que ce nombre sera nécessairement positif; car, à cause de $E > \sqrt{B} - \varepsilon$ (hyp.), on aura $E' < \sqrt{B} + \varepsilon$, en vertu de l'équation $EE' = B - \varepsilon^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon)(\sqrt{B} - \varepsilon)$; le nombre λ' étant ainsi connu, on aura $\varepsilon' = \lambda' E' - \varepsilon$; après quoi on tirera E″ de l'équation $E'E'' = B - \varepsilon'^2$, & comme $\lambda'' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''}$ & $> \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''} - 1$, il faudra prendre nécessairement pour λ'' le nombre entier qui sera immédiatement moindre que $\frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E''}$, & il est clair que ce nombre sera positif, à cause que, λ' étant $> \frac{\sqrt{B} + \varepsilon}{E'} - 1$, on a $\lambda' E' - \varepsilon = \varepsilon' > \sqrt{B} - E'$, & par conséquent $E' > \sqrt{B} - \varepsilon'$, & $E'' < \sqrt{B} + \varepsilon'$, en vertu de l'équation $E'E'' = B - \varepsilon'^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon')(\sqrt{B} - \varepsilon')$; & ainsi de suite.

34. Ainsi pour résoudre l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, où $E < \sqrt{B}$, on commencera par chercher un nombre entier $\varepsilon < \sqrt{B}$ & $> \sqrt{B} - E$, & tel que $B - \varepsilon^2$ soit divisible par E; si aucun des nombres qui tombent entre $\sqrt{B} - E$, & $\sqrt{B}$ ne satisfait à cette condition, ce sera une marque que l'équation proposée n'est point résoluble en entiers.

Ayant trouvé une ou plusieurs valeurs de ε, on formera d'après chacune de ces valeurs, & par le moyen des formules de l'art. préc. les séries E, E′, E″, E‴ etc. ε', ε'', ε''' etc. & λ', λ'', λ''' etc. & si l'équation proposée est résoluble en nombres entiers, on parviendra nécessairement à un terme de la série E′, E″, E‴ etc. qui sera égal à l'u-

à l'unité, & qui occupera une place paire ou impaire, suivant que, dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, ce sera le signe supérieur ou l'inférieur qui aura lieu. En effet nous avons vu (art. 29) qu'en continuant les séries des nombres r, r', r'' etc. & s, s', s'' etc. on arrivera nécessairement à des termes comme r^m & s^m, tels que $r^m = 1$ & $s^m = 0$; or on a, par les formules (θ), $(r^m)^2 - B(s^m)^2 = \pm E^m$, lorsque le quantieme m est pair, & $(r^m)^2 - B(s^m)^2 = \mp E^m$, lorsque le quantieme m est impair; donc on aura dans le premier cas $\pm E^m = 1$, & dans le second $\mp E^m = 1$; d'où l'on voit que le premier cas ne peut avoir lieu qu'en prenant le signe supérieur & faisant $E^m = 1$, & le second ne peut avoir lieu qu'en prenant le signe inférieur & faisant de même $E^m = 1$, à cause que E^m doit être positif (art. 30).

Donc, lorsque l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ peut se résoudre en nombres entiers, il doit y avoir dans la série E, E', E'' etc. un terme, comme $E^m = 1$, le quantieme m étant pair, ou impair suivant qu'on aura le signe supérieur ou l'inférieur dans l'équation dont il s'agit; & comme 1 est toujours $< \sqrt{B}$, il est clair qu'on doit parvenir à ce terme E^m par la méthode de l'art. préc., & alors on fera $r^m = 1$, & $s^m = 0$. De plus il est clair par les formules (η) que l'on doit avoir $r^{m-1}s^m - s^{m-1}r^m = \mp 1$ si m est pair, & $= \pm 1$ si m est impair; c'est à dire (à cause que le quantieme m doit être pair pour le signe supérieur, & impair pour l'inférieur) $r^{m-1}s^m - s^{m-1}r^m = -1$, d'où, en faisant $r^m = 1$ & $s^m = 0$, on aura $s^{m-1} = 1$; enfin il est facile de voir par les formules de l'art. 31 qu'on aura aussi $r^{m-1}r^m - Bs^{m-1}s^m = \pm \varepsilon^{m-1}$ lorsque m pair, & $= \mp \varepsilon^{m-1}$ lorsque m impair, c'est à dire, par la remarque précédente, $r^{m-1}r^m - Bs^{m-1}s^m = \varepsilon^{m-1}$; d'où, à cause de $r^m = 1$, & $s^m = 0$, on aura $r^{m-1} = \varepsilon^{m-1}$; de sorte qu'on aura ces quatre valeurs

$$r^m = 1, \qquad s^m = 0$$
$$r^{m-1} = \varepsilon^{m-1}, \qquad s^{m-1} = 1$$

à l'aide desquelles on pourra, en remontant par les formules (ζ) de l'art. 29, trouver les valeurs cherchées de r & s.

135. Comme tout se réduit à trouver un terme de la série E, E', E'' etc. qui soit égal à l'unité, considérons plus particulierement la loi de cette série. Et d'abord il est clair, par ce qu'on a enseigné dans l'art. 33, que cette série peut être poussée aussi loin que l'on veut, parce que les opérations par lesquelles les nombres E', E'', E''' etc. ε', ε'', ε''' etc. & λ', λ'', λ''' etc. doivent être déterminés, peuvent être continuées tant qu'on voudra.

D'autre part il est évident par les formules ($\varkappa$) que les nombres E, E', E'', E''' etc. doivent être nécessairement moindres que B; de sorte que, comme ces nombres doivent être en même tems entiers, ils ne pourront avoir qu'un nombre limité de valeurs différentes, & qu'ainsi, en supposant la série poussée à l'infini, il faudra absolument que le même terme revienne une infinité de fois; par conséquent il faudra aussi que la même combinaison de deux termes conséçutifs revienne une infinité de fois.

Supposons donc que dans la série E, E', E'', E''', E^{IV}, E^{V}, E^{VI}, E^{VII}, E^{VIII}, E^{IX}, E^{X} etc. les deux termes consécutifs E^{VII}, E^{VIII} soient les mêmes que les termes E''', E^{IV}, c'est à dire que l'on ait $E^{VII} = E'''$, & $E^{VIII} = E^{IV}$, il est facile de voir que l'on aura aussi nécessairement $E^{IX} = E^{V}$, $E^{X} = E^{VI}$ etc.

En effet, puisque $E^{VII} = E'''$ & $E^{VIII} = E^{IV}$, on aura, par les formules ($\varkappa$), $\varepsilon^{VII} = \varepsilon'''$; donc par les formules (μ), $\lambda^{VIII} = \lambda^{IV}$, & par les formules ($\lambda$), $\varepsilon^{VIII} = \varepsilon^{IV}$; donc par les formules ($\varkappa$), $E^{IX} = E^{V}$, & ainsi de suite. En général il est évident que deux termes consécutifs étant donnés, tous les suivans le seront aussi par les formules ($\varkappa$), (λ) & (μ); de sorte que, dès que la même combinaison de deux termes consécutifs reviendra après un certain nombre de termes, tous les termes suivans reviendront les mêmes aussi, & par conséquent la série ne sera plus qu'une suite de périodes identiques à la premiere.

Mais il y a plus; je vais démontrer qu'en supposant les termes consécutifs E^{VII}, E^{VIII} identiques avec les termes E''', E^{IV}, les termes précédens E^{VI}, E^{V} etc. seront les mêmes aussi que les termes E'', E' etc.

Pour démontrer cette propofition il eft clair qu'il fuffit de faire voir que, lorfque deux termes quelconques confécutifs comme E''', E^{IV} font donnés, tous les précédens le feront auffi. Or il eft vifible par les formules (x) que E''' & E^{IV} étant donnés, ε''' le fera auffi; mais on doit avoir $\varepsilon'' < \sqrt{B}$, donc, par les formules (λ), il faudra que $\lambda'''E''' - \varepsilon''' < \sqrt{B}$, & par conféquent

$$\lambda''' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'''}{E'''}.$$

De même on doit avoir $\varepsilon' < \sqrt{B}$, donc $\lambda''E'' - \varepsilon'' < \sqrt{B}$, & de là

$$\lambda'' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E''}$$

or λ'' devant être un nombre entier pofitif, il faudra que E'' foit $< \sqrt{B} + \varepsilon''$, donc, à caufe de $E''E''' = B - \varepsilon''^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon'')(\sqrt{B} - \varepsilon'')$, il faudra que $E''' > \sqrt{B} - \varepsilon''$, favoir $\varepsilon'' > \sqrt{B} - E'''$, & comme $\varepsilon'' = \lambda'''E''' - \varepsilon'''$, il faudra que $(\lambda''' + 1)E''' > \sqrt{B} + \varepsilon'''$, d'où

$$\lambda''' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'''}{E'''} - 1.$$

On trouvera de même, par la confidération de la condition $\varepsilon < \sqrt{B}$, ces deux conditions

$$\lambda' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E'},$$

$$\lambda'' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E''} - 1.$$

Enfuite, comme E eft $< \sqrt{B}$ (hyp.), on aura à plus forte raifon $E < \sqrt{B} + \varepsilon$, & par conféquent, en vertu de l'équation $EE' = B - \varepsilon^2 = (\sqrt{B} + \varepsilon)(\sqrt{B} - \varepsilon)$, $E' > \sqrt{B} - \varepsilon$, favoir, à caufe de $\varepsilon = \lambda'E' - \varepsilon'$, $(\lambda' + 1)E' > \sqrt{B} + \varepsilon'$, d'où

$$\lambda' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E'} - 1.$$

Ainsi on aura, en considérant les séries λ', λ'', λ''' etc. ε', ε'', ε''' etc. & E, E', E'', E''' etc., à rebours les conditions suivantes

$$\left.\begin{array}{ll} \text{etc.} & \text{etc.} \\ \lambda''' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'''}{E'''}, & \lambda''' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'''}{E'''} - 1 \\ \lambda'' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E''}, & \lambda'' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E''} - 1 \\ \lambda' < \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E'}, & \lambda' > \frac{\sqrt{B} + \varepsilon'}{E'} - 1 \end{array}\right\} \quad (\nu)$$

lesquelles étant combinées avec les formules (κ) & (λ) serviront à déterminer tous les termes de ces mêmes séries, en supposant deux termes consécutifs comme E''', E^{IV} donnés. Car E^{IV} & E''' étant donnés, ε''' le sera aussi, par conséquent λ''' sera aussi donné, à cause que λ''' devant être entier, on ne pourra prendre pour λ''' que le nombre entier qui sera immédiatement moindre que $\frac{\sqrt{B} + \varepsilon'''}{E'''}$; ayant ainsi λ''', on aura ε'' par la formule $\varepsilon''' = \lambda'''E''' - \varepsilon''$, savoir $\varepsilon'' = \lambda'''E''' - \varepsilon'''$; & ensuite E'' par l'équation $E''E''' = B - \varepsilon''^2$; or E'' & ε'' étant donnés, λ'' le sera aussi, parce que l'on ne pourra prendre pour λ'' que le nombre entier qui sera immédiatement moindre que $\frac{\sqrt{B} + \varepsilon''}{E''}$, & ainsi de suite.

Il résulte de là que, dans la suite E, E', E'', E''', E^{IV} etc., une combinaison quelconque de deux termes consécutifs comme E''', E^{IV} ne peut revenir, que toutes les combinaisons précédentes E'', E''', E', E'' etc. ne soient déjà revenues, de sorte que la premiere combinaison E, E' devra nécessairement être aussi la premiere à revenir. Donc, puisqu'il est absolument nécessaire qu'une combinaison quelconque

 revien-

revienne, à cauſe du nombre limité des valeurs que peuvent avoir les nombres E, E', E'' etc., comme nous l'avons obſervé dans l'art. préc.; il eſt évident que la premiere combinaiſon E, E' devra revenir néceſſairement, auſſitôt que toutes les autres combinaiſons poſſibles ſeront épuiſées; & alors toute la ſérie devra auſſi revenir la même par l'art. préc.; de ſorte qu'après la premiere période, le reſte de la ſérie, quelque loin qu'elle ſoit pouſſée, ne ſera plus compoſée que d'une ſuite de périodes identiques à la premiere.

Ainſi, par exemple, ſi on trouve $E^{V} = E$, & $E^{VI} = E'$, la ſérie ſera de cette forme E, E', E'', E''', E^{IV}, E, E', E'', E''', E^{IV}, E, E', E'', E''', E^{IV} etc. à l'infini; de ſorte que les termes qui ne ſe trouveront point dans la premiere période E, E', E'', E''', E^{IV}, ne ſe trouveront pas non plus dans tout le reſte de la ſérie continuée même à l'infini.

36. Donc, pour pouvoir réſoudre l'équation $\pm E = r^2 + Bs^2$, il ne s'agira que de continuer la ſérie E, E', E'', E''' etc. juſqu'à ce que les deux premiers termes reparoiſſent dans le même ordre, ce qui arrivera néceſſairement avant qu'aucune autre couple de deux termes conſécutifs puiſſe reparoitre; & ſi dans cette premiere période de la ſérie il ne ſe trouve aucun terme égal à l'unité, on en devra conclure que cette équation n'admet point de ſolution en nombres entiers.

Mais ſi l'on trouve dans la premiere période un terme comme $E^{m} = 1$, alors ce terme donnera d'abord une ſolution de l'équation propoſée (art. 34), pourvu que le quantieme m ſoit pair, ou impair ſuivant que dans cette équation on prendra le ſigne ſupérieur, ou l'inférieur. Si l'expoſant m du rang n'eſt pas tel, alors on continuera la ſérie, & comme le terme 1 doit reparoître dans les périodes ſuivantes, on verra s'il ſe trouve avec un expoſant qui ait les conditions requiſes; & alors ce nouveau terme donnera de même une ſolution de l'équation dont il s'agit; enſuite, en continuant toujours la ſérie, on pourra retrouver ce même terme autant de fois qu'on voudra, & par conſéquent en tirer encore d'autres ſolutions à l'infini.

D'où

D'où l'on voit que, si l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ admet une solution quelconque en nombres entiers, il faut aussi qu'elle en admette une infinité d'autres.

37. On a vu dans l'art. 33 que les séries E, E', E'' etc. $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ etc. & λ', λ'' etc. sont entierement déterminées par les deux termes E, & E', parce que E, & E' étant donnés, ε l'est aussi, & ainsi des autres; d'où il s'ensuit que lorsque la série E, E', E'' etc. recommence, les deux autres doivent recommencer aussi.

Supposons donc que dans la série E, E', E'' etc. le terme E^{μ} soit $= E$, & le terme suivant $E^{\mu+1} = E'$; alors on aura en général (art. 35) $E^{\mu+\nu} = E^{\nu}$, & par conséquent $E^{2\mu} = E^{\mu} = E$, $E^{2\mu+\nu} = E^{\nu}$ etc.; donc aussi $E^{n\mu+\nu} = E^{\nu}$, n étant un nombre quelconque positif & entier.

De même on aura $\varepsilon^{\mu+\nu} = \varepsilon^{\nu}$, & en général $\varepsilon^{n\mu+\nu} = \varepsilon^{\nu}$, & pareillement $\lambda^{\mu+\nu} = \lambda^{\nu}$, & en général $\lambda^{n\mu+\nu} = \lambda^{\nu}$; ainsi connoissant les termes E, E', E'' etc. $E^{\mu-1}$, $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ etc. $\varepsilon^{\mu-1}$, & $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. λ^{μ}, on connoitra tous les termes suivans à l'infini.

Soit maintenant $E^{m} = 1$, m étant $< \mu$; on aura donc aussi $E^{\mu+m} = 1$, $E^{2\mu+m} = 1$ etc. & en général $E^{n\mu+m} = 1$; donc, si le quantieme $n\mu + m$ est pair, ou impair suivant que dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ on aura le signe supérieur ou l'inférieur, on pourra faire, comme dans l'art. 34, (en mettant $n\mu + m$, à la place de m)

$$r^{n\mu+m} = 1, \qquad s^{n\mu+m} = 0$$

$$r^{n\mu+m-1} = \varepsilon^{n\mu+m-1}, \qquad s^{n\mu+m-1} = 1$$

d'où en retrogradant on trouvera r, & s par les formules (ζ), & il est clair que ces valeurs seront toujours d'autant plus grandes que n sera un plus grand nombre; de sorte que pour avoir les plus petites valeurs possibles de r, & s, il faudra prendre n le plus petit possible; ensuite, en augmentant successivement n, on aura par ordre toutes les autres valeurs

valeurs de r, & s qui peuvent satisfaire à l'équation dont il s'agit, à moins que dans la premiere période E, E', E'' etc. $E^{\rho+1}$, il ne se trouve plus d'un terme E^m égal à l'unité, auquel cas il faudra faire successivement m égal à l'exposant du quantieme de ces termes.

Donc, puisque $n\mu + m$ doit toujours être pair, ou impair suivant que dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ on veut prendre le signe supérieur ou l'inférieur, il s'ensuit

1°. Que si l'équation est

$$E = r^2 - Bs^2$$

elle ne sera pas soluble en nombres entiers à moins que l'on n'ait m pair, ou m & μ impairs à la fois; car il est évident que $n\mu + m$ ne peut être pair, que $n\mu$ & m ne soient tous deux pairs ou impairs. Si m est pair & que μ le soit aussi, alors n pourra être un nombre quelconque entier positif; mais si m étant pair μ est impair, alors il faudra que n soit pair, de sorte qu'on ne pourra prendre pour n que des nombres positifs pairs. Mais si m est impair, alors il faudra que $n\mu$ soit aussi impair, & par conséquent que μ & n soient tous deux impairs; ainsi m, & μ étant impairs en même tems, on ne pourra prendre pour n que des nombres quelconques positifs impairs.

2°. Que si l'équation est

$$-E = r^2 - Bs^2$$

alors elle ne sera pas résoluble à moins que m ne soit impair, ou que m ne soit pair, & μ impair. Car, puisque $n\mu + m$ doit être impair dans ce cas il faudra nécessairement que $n\mu$ & m soient l'un pair, & l'autre impair. Donc, si m est impair, il faudra que $n\mu$ soit pair, par conséquent si μ est pair on pourra prendre pour n des nombres quelconques entiers positifs; & si μ est impair, il ne faudra prendre pour n que des nombres positifs pairs. Mais si m est pair, alors il faudra que $n\mu$ soit impair, par conséquent il faudra que n & μ le soient aussi chacun en particulier; de sorte que m étant pair, & μ impair, le probleme sera

sera résoluble pourvu qu'on ne prenne pour n que des nombres quelconques pairs positifs.

38. Nous avons vu (art. 30 & 31) que $rr' - Bss' = \mp \varepsilon$, & $rs' - sr' = \pm 1$; donc on aura

$$\mp (\varepsilon + \sqrt{B}) = (r + s\sqrt{B})\ (r' - s'\sqrt{B});$$

de même, à cause de $r'r'' - Bs's'' = \pm \varepsilon'$ & $r's'' - s'r'' = \mp 1$, on aura

$$\pm (\varepsilon' + \sqrt{B}) = (r' + s'\sqrt{B})\ (r'' - s''\sqrt{B})$$

& pareillement

$$\mp (\varepsilon'' + \sqrt{B}) = (r'' + s''\sqrt{B})\ (r''' - s'''\sqrt{B})$$
$$\pm (\varepsilon''' + \sqrt{B}) = (r''' + s'''\sqrt{B})\ (r^{IV} - s^{IV}\sqrt{B})$$

& ainsi de suite.

Donc, multipliant ces équations successivement entr'elles, & faisant attention que $(r' - s'\sqrt{B})\ (r' + s'\sqrt{B}) = r'^2 - Bs'^2 = \mp E'$, $(r'' - s''\sqrt{B})\ (r'' + s''\sqrt{B}) = r''^2 - Bs''^2 = \pm E''$, & ainsi des autres, on aura

$$(\varepsilon + \sqrt{B})\ (\varepsilon' + \sqrt{B}) = \pm\ E'\ (r + s\sqrt{B})\ (r'' - s''\sqrt{B})$$
$$(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B}) = \mp E'E''\ (r + s\sqrt{B})\ (r''' - s'''\sqrt{B})$$
$$(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B})(\varepsilon''' \sqrt{B}) = \pm E'E''E'''(r + s\sqrt{B})(r^{IV} - s^{IV}\sqrt{B})$$

& en général

$$(\varepsilon + \sqrt{B})\ (\varepsilon' + \sqrt{B})\ (\varepsilon'' + \sqrt{B}) \dots\dots\dots (\varepsilon^{u-1} + \sqrt{B})$$
$$= \pm\ E'E''E''' \dots\dots E^{u-1}\ (r + s\sqrt{B})\ (r^u - s^u\sqrt{B}),$$

les signes ambigus devant être les mêmes que dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$, lorsque u est pair, & différens, lorsque u est impair.

Supposons maintenant $u = n\mu + m$, & l'on aura (art. préc.) $r^u = 1$, $s^u = 0$, pourvu que $n\mu + m$ soit pair, ou impair suivant que le signe supérieur, ou l'inférieur aura lieu dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$; donc la formule précédente deviendra, en conservant u à la place de $n\mu + m$ pour plus de simplicité,

$(\varepsilon +$

$$(\varepsilon + \sqrt{B})\ (\varepsilon' + \sqrt{B})\ (\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{n-1} + \sqrt{B})$$
$$= E'E''E''' \cdots\cdots E^{n-1}\ (r + s\sqrt{B}),$$

équation d'où, à cause de l'ambiguité naturelle du signe du radical $\sqrt{B}$, on pourra tirer r, & s.

Maintenant, puisque $n = n\mu + m$, & que nous avons vu que l'on a en général $E^{n\mu+\nu} = E^{\nu}$, & $\varepsilon^{n\mu+\nu} = \varepsilon^{\nu}$ (art. préc.), il est facile de voir que l'équation précédente peut se ramener à celle-ci:

$$((\varepsilon + \sqrt{B})\ (\varepsilon' + \sqrt{B})\ (\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{m-1} + \sqrt{B})) \times$$
$$((\varepsilon + \sqrt{B})\ (\varepsilon' + \sqrt{B})\ (\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{\mu-1} + \sqrt{B}))^{n}$$
$$= E'E''E'' \cdots E^{m-1}(EE'E'' \cdots E^{\mu-1})^{n}\ (r + s\sqrt{B}).$$

De sorte que, si on fait pour abréger

$$\frac{(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{m-1} + \sqrt{B})}{E' \cdot E'' \cdot E''' \cdots\cdots E^{m-1}} = R + S\sqrt{B},$$

$$\frac{(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{\mu-1} + \sqrt{B})}{E \cdot E' \cdot E'' \cdots\cdots E^{\mu-1}} = X + Y\sqrt{B},$$

(car il est évident qu'en développant les produits continuels de $\varepsilon + \sqrt{B}$, $\varepsilon' + \sqrt{B}$ etc. on doit avoir des quantités composées d'une partie toute rationelle, & d'une autre partie toute multipliée par $\sqrt{B}$,) on aura

$$(R + S\sqrt{B})\ (X + Y\sqrt{B})^{n} = r + s\sqrt{B}.$$

Et si on fait de plus

$$(X + Y\sqrt{B})^{n} = \xi + \psi\sqrt{B},$$

ce qui donne, en général, à cause de l'ambiguité de $\sqrt{B}$,

$$\xi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^{n} + (X - Y\sqrt{B})^{n}}{2}$$

$$\psi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^{n} - (X - Y\sqrt{B})^{n}}{2\sqrt{B}}$$

on aura

(R +

$$(R + S\sqrt{B})\,(\xi + \psi\sqrt{B}) = r + s\sqrt{B},$$

ſavoir $R\xi + BS\psi + (R\psi + S\xi)\sqrt{B} = r + s\sqrt{B}$, d'où, en comparant la partie rationelle avec la rationelle & l'irrationelle avec l'irrationelle, on aura enfin

$$r = R\xi + BS\psi, \qquad s = R\psi + S\xi.$$

C'eſt l'expreſſion générale des nombres r & s qui peuvent ſatisfaire à l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$.

Si on vouloit avoir auſſi les expreſſions de r' & s' dans l'équation ſuivante $\mp E' = r'^2 - Bs'^2$, il n'y auroit qu'à remarquer que, puiſqu'on a trouvé ci-deſſus $\mp(\varepsilon + \sqrt{B}) = (r + s\sqrt{B})\,(r' - s'\sqrt{B})$, on aura $\mp(\varepsilon + \sqrt{B})\,(r' + s'\sqrt{B}) = (r + s\sqrt{B})\,(r'^2 - Bs'^2) = \mp E'$ $(r + s\sqrt{B})$, d'où $r' + s'\sqrt{B} = \dfrac{E'}{\varepsilon + \sqrt{B}}(r + s\sqrt{B})$.

Donc, ſi on fait

$$\frac{(\varepsilon' + \sqrt{B})\,(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots\cdots (\varepsilon^{m-1} + \sqrt{B})}{E''\ \cdot\ E'''\ \cdots\cdots\ E^{m-1}} = R' + S'\sqrt{B}$$

on trouvera comme ci-deſſus

$$(R' + S'\sqrt{B})\,(\xi + \psi\sqrt{B}) = r' + s'\sqrt{B}$$

d'où

$$r' = R'\xi + BS'\psi, \qquad s' = R'\psi + S'\xi.$$

Ces valeurs ſerviront à trouver celles de ρ & σ dans l'équation $\mp D = \rho^2 - B\sigma^2$ (art. 29), comme nous le ferons voir ci-après (art. 43).

39. Quoiqu'il ſoit facile de trouver les valeurs de R, S, X & Y par le développement des produits de $(\varepsilon + \sqrt{B})$, $(\varepsilon' + \sqrt{B})$ etc., voici une maniere beaucoup plus ſimple & plus commode d'y parvenir.

On a par les formules (λ) de l'art. 31 $\varepsilon = \lambda' E' - \varepsilon'$, donc $\varepsilon + \sqrt{B} = \lambda' E' + \sqrt{B} - \varepsilon'$; donc $(\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B}) = \lambda' E'$ $(\varepsilon' + \sqrt{B}) + B - \varepsilon'^2 =$ (à cauſe de $B - \varepsilon'^2 = E'E''$) $\lambda' E' (\varepsilon' + \sqrt{B}) + E'E''$, ſavoir en diviſant par E'

$(\varepsilon +$

$$\frac{(\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B})}{E'} = E'' + \lambda'\,(\varepsilon' + \sqrt{B}).$$

De même, à cause de $\varepsilon' = \lambda'' E'' - \varepsilon''$, on aura $E'' + \lambda'(\varepsilon' + \sqrt{B}) = (\lambda''\lambda' + 1)E'' + \lambda'(\sqrt{B} - \varepsilon'')$; donc, multipliant par $\varepsilon'' + \sqrt{B}$, mettant $E''E'''$ à la place de $B - \varepsilon''^2$, & divisant ensuite par E'', on aura

$$\frac{(\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B})\,(\varepsilon'' + \sqrt{B})}{E' \cdot E''} = \lambda' E''' + (\lambda''\lambda' + 1)\,(\varepsilon'' + \sqrt{B}).$$

Substituant de nouveau $\lambda''' E''' - \varepsilon'''$ à la place de ε'', multipliant ensuite par $\varepsilon''' + \sqrt{B}$, & divisant par E''', après avoir mis $E'''E^{IV}$ pour $B - \varepsilon'''^2$, on aura

$$\frac{(\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B})\,(\varepsilon'' + \sqrt{B})\,(\varepsilon''' + \sqrt{B})}{E' \cdot E'' \cdot E'''} =$$

$$(\lambda''\lambda' + 1)\,E^{IV} + (\lambda'''(\lambda''\lambda' + 1) + \lambda')\,(\varepsilon''' + \sqrt{B})$$

& ainsi de suite.

D'où il est facile de conclure que, si on forme la série suivante

$$\left.\begin{aligned}
l &= 1\\
l' &= \lambda' l\\
l'' &= \lambda'' l' + l\\
l''' &= \lambda''' l'' + l'\\
l^{IV} &= \lambda^{IV} l''' + l''\\
l^{V} &= \lambda^{V} l^{IV} + l'''\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\pi)$$

on aura en général

$$\frac{(\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B})\,(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \ldots\ldots (\varepsilon^{\varrho} + \sqrt{B})}{E' \cdot E'' \cdot E''' \ldots\ldots E^{\varrho}}$$

$$= l^{\varrho - 1} E^{\varrho + 1} + l^{\varrho}(\varepsilon^{\varrho} + \sqrt{B}).$$

40. Donc, puisqu'on a par les formules de l'art. 38

$$R + S\sqrt{B} = \frac{(\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B}) \cdots (\varepsilon^{m-1} + \sqrt{B})}{E' \cdot E'' \cdots E^{m-1}}$$

si on fait dans la derniere formule de l'art. préc. $\varrho = m - 1$, on aura

$$R + S\sqrt{B} = l^{m-2}E^{m} + l^{m-1}(\varepsilon^{m-1} + \sqrt{B});$$

mais on a par l'hypothese (art. 37) $E^{m} = 1$; de plus on a vu (art. 35) que les quantités E', E'' etc. doivent être telles que l'on ait $E' > \sqrt{B} - \varepsilon$, $E'' > \sqrt{B} - \varepsilon'$ etc., de sorte qu'il faudra aussi que l'on ait $E^{m} = 1 > \sqrt{B} - \varepsilon^{m-1}$, & par conséquent $\varepsilon^{m-1} > \sqrt{B} - 1$; donc, puisque ε^{m-1} doit être en même tems un nombre entier positif $< \sqrt{B}$ (art. 32), il est clair qu'on ne peut prendre pour ε^{m-1} que le nombre entier qui est immédiatement moindre que $\sqrt{B}$.

Donc, si on dénote ce nombre par β, en sorte que β soit la racine carrée approchée de B, on aura $\varepsilon^{m-1} = \beta$, & par conséquent

$$R + S\sqrt{B} = l^{m-2} + l^{m-1}(\beta + \sqrt{B});$$

donc

$$R = \beta l^{m-1} + l^{m-2}, \qquad S = l^{m-1}.$$

Ainsi on connoitra aisément R & S par le moyen des formules (π). Il y a cependant deux cas qui paroissent devoir souffrir quelque exception; l'un est celui où $m = 0$, & l'autre celui où $m = 1$; en effet dans ces cas on auroit des exposans de l négatifs, ce qui n'a point lieu dans les formules (π) de l'art. préc.

Or 1°. si $m = 0$, ce qui arrive lorsque $E = 1$, on aura dans les formules de l'art. 38 $u = n\mu$, & l'on trouvera simplement l'équation

$$((\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B})\,(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots (\varepsilon^{\mu-1} + \sqrt{B}))^{n}$$
$$= (EE'E'' \cdots E^{\mu-1})^{n}\,(r + s\sqrt{B})$$

savoir

$$(X + Y\sqrt{B})^{n} = r + s\sqrt{B}$$

laquelle étant comparée à l'équation générale

(R +

$$(R + S\sqrt{B})(X + Y\sqrt{B})^{\mu} = r + s\sqrt{B}$$

donne $R + S\sqrt{B} = 1$, & par conséquent $R = 1$, $S = 0$. Ainsi on aura d'abord dans ce cas $r = \xi$, & $s = \psi$ (art. 38).

2°. Si $m = 1$, ce qui arrivera lorsque $E' = 1$, il est clair que la formule générale

$$\frac{(\epsilon + \sqrt{B})(\epsilon' + \sqrt{B}) \ldots (\epsilon^{m-1} + \sqrt{B})}{E' \cdot E'' \ldots E^{m-1}} = R + S\sqrt{B}$$

se reduira à celle-ci: $\epsilon + \sqrt{B} = R + S\sqrt{B}$, d'où l'on aura $R = \epsilon$, & $S = 1$; & comme $\epsilon = \epsilon^{m-1} = \beta$, on aura dans ce cas $R = \beta$ & $S = 1$.

41. Faisons maintenant $\varrho = \mu - 1$, & l'on aura par les formules des art. 38, & 39

$$X + Y\sqrt{B} = \frac{l^{\mu-2}E^{\mu} + l^{\mu-1}(\epsilon^{\mu-1} + \sqrt{B})}{E}.$$

Or l'on a, par les formules (λ), $\epsilon^{\mu-1} = \lambda^{\mu}E^{\mu} - \epsilon^{\mu}$, donc, à cause de $E^{\mu} = E$, $\epsilon^{\mu} = \epsilon$ (art. 37), & $l^{\mu} = \lambda^{\mu} l^{\mu-1} + l^{\mu-2}$ par les formules (π), on aura

$$X + Y\sqrt{B} = l^{\mu} + \frac{l^{\mu-1}(\sqrt{B} - \epsilon)}{E}, \qquad \text{d'où}$$

$$X = l^{\mu} - \frac{\epsilon l^{\mu-1}}{E}, \qquad Y = \frac{l^{\mu-1}}{E}.$$

Or, quoique ces expressions de X, & de Y soient sous une forme fractionaire, on peut néanmoins être assuré qu'elles donneront toujours des nombres entiers; autrement les nombres p, & q ne seroient pas toujours entiers, ce qui est contre la nature de nos formules.

Mais, pour ne laisser aucun doute là-dessus, je vais donner d'autres expressions de X, & de Y, où il n'y aura point de fractions.

Pour

Pour cela j'obſerve, qu'à cauſe de $E^{\mu} = E$, $E^{\mu+1} = E'$ etc. $\varepsilon^{\mu} = \varepsilon$, $\varepsilon^{\mu+1} = \varepsilon'$ etc. (art. 37), la quantité

$$\frac{(\varepsilon + \sqrt{B})\,(\varepsilon' + \sqrt{B})\,(\varepsilon'' + \sqrt{B})\,\ldots\ldots\,(\varepsilon^{\mu-1} + \sqrt{B})}{E\,.\,E'\,.\,E''\,\ldots\ldots\,E^{\mu-1}}$$

peut ſe mettre auſſi ſous cette forme

$$\frac{(\varepsilon^{m} + \sqrt{B})\,(\varepsilon^{m+1} + \sqrt{B})\,(\varepsilon^{m+2} + \sqrt{B})\,\ldots\ldots\,(\varepsilon^{m+\mu-1} + \sqrt{B})}{E^{m}\,.\,E^{m+1}\,.\,E^{m+2}\,\ldots\ldots\,E^{m+\mu-1}}$$

& on prouvera d'une maniere ſemblable à celle de l'art. 39, que l'on aura

$$\frac{(\varepsilon^{m} + \sqrt{B})\,(\varepsilon^{m+1} + \sqrt{B})}{E^{m+1}} = E^{m+2} + \lambda^{m+1}\,(\varepsilon^{m+1} + \sqrt{B})$$

$$\frac{(\varepsilon^{m} + \sqrt{B})\,(\varepsilon^{m+1} + \sqrt{B})\,(\varepsilon^{m+2} + \sqrt{B})}{E^{m+1}\,.\,E^{m+2}} = \lambda^{m+1}E^{m+3} + (\lambda^{m+2}\lambda^{m+1} + 1)(\varepsilon^{m+2} + \sqrt{B})$$

& ainſi de ſuite; de ſorte que ſi l'on conſidere la ſérie

$$\lambda^{m+1},\ \lambda^{m+2},\ \lambda^{m+3} \text{ etc. } \lambda^{m+\mu}$$

laquelle, à cauſe de $\lambda^{\mu+1} = \lambda'$, $\lambda^{\mu+2} = \lambda''$ etc., revient à celle-ci λ^{m+1}, λ^{m+2}, λ^{m+3} etc. λ^{μ}, λ', λ'', λ''' etc., λ^{m} & qu'on la repréſente, pour plus de ſimplicité, ainſi:

$$\Lambda',\ \Lambda'',\ \Lambda''',\ \&c.\ \Lambda^{\mu}.$$

qu'enſuite on forme par ſon moyen la ſérie ſuivante

$$\left.\begin{aligned} L &= 1 \\ L' &= \Lambda' L \\ L'' &= \Lambda'' L' + L \\ L''' &= \Lambda''' L'' + L' \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\varrho)$$

on aura

$$X + Y\sqrt{B} = \frac{L^{\mu-2}E^{m+\mu} + L^{\mu-1}(\varepsilon^{m+\mu-1} + \sqrt{B})}{E^m}.$$

Mais $E^m = 1$, $E^{m+\mu} = E^m = 1$, $\varepsilon^{m+\mu-1} = \varepsilon^{m-1} = \beta$, donc

$$X + Y\sqrt{B} = L^{\mu-2} + L^{\mu-1}(\beta + \sqrt{B})$$

d'où

$$X = \beta L^{\mu-1} + L^{\mu-2}, \qquad Y = L^{\mu-1}.$$

Il eſt bon de remarquer que les quantités X & Y ne dépendent que de la valeur de B, & nullement de celle de E; de ſorte que ces quantités étant une fois trouvées, elles ſerviront pour réſoudre toutes les équations de la forme $\pm E = r^2 - Bs^2$, où la valeur de B ſera la même.

En effet, ſi on conſidere l'équation $\pm E^{m-1}E^m = B - (\varepsilon^{m-1})^2$ qui eſt une des équations (κ) de l'art. 31, on aura (à cauſe de $E^m = 1$, & $\varepsilon^{m-1} = \beta$) $\pm E^{m-1} = B - \beta^2$, de ſorte que E^m, & E^{m-1} ſeront donnés indépendamment de la valeur de E; donc, ſi on forme par la méthode de l'art. 33 les ſuites E^m, E^{m+1}, E^{m+2} etc. & ε^m, ε^{m+1}, ε^{m+2} etc. ces ſuites ſeront auſſi toutes données (art. 35); donc la quantité

$$\frac{(\varepsilon^m + \sqrt{B})(\varepsilon^{m+1} + \sqrt{B})(\varepsilon^{m+2} + \sqrt{B}) \cdots (\varepsilon^{m+\mu-1} + \sqrt{B})}{E^m \cdot E^{m+1} \cdot E^{m+2} \cdots E^{m+\mu-1}}$$

ſera auſſi donnée; donc $X + Y\sqrt{B}$ ſera donné, par conſéquent X, & Y le ſeront auſſi.

Maintenant je dis que les quantités X, & Y ſont telles que $X^2 - BY^2 = \pm 1$. Car on a (art. 38)

$$X + Y\sqrt{B} = \frac{(\varepsilon + \sqrt{B})(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots (\varepsilon^{\mu-1} + \sqrt{B})}{E \cdot E' \cdot E'' \cdots E^{\mu-1}},$$

donc prenant le radical $\sqrt{B}$ en $-$ on aura auſſi

X —

$$X - Y\sqrt{B} = \frac{(\varepsilon - \sqrt{B})(\varepsilon' - \sqrt{B})(\varepsilon'' - \sqrt{B}) \cdots (\varepsilon^{\mu-1} - \sqrt{B})}{E \cdot E' \cdot E'' \cdots E^{\mu-1}}$$

donc, multipliant ces deux équations ensemble, il viendra

$$X^2 - BY^2 = \frac{(\varepsilon^2 - B)(\varepsilon'^2 - B)(\varepsilon''^2 - B) \cdots ((\varepsilon^{\mu-1})^2 - B)}{E^2 \cdot E'^2 \cdot E''^2 \cdots (E^{\mu-1})^2}.$$

Mais on a par les formules ($\varkappa$) $\varepsilon^2 - B = -EE'$, $\varepsilon'^2 - B = -E'E''$ etc., donc

$$X^2 - BX^2 = \pm \frac{EE'E'E''E''E''' \cdots E^{\mu-1}E^{\mu}}{E^2 \cdot E'^2 \cdot E''^2 \cdots (E^{\mu-1})^2}$$

savoir

$$X^2 - BY^2 = \pm \frac{E^{\mu}}{E} = \pm 1,$$

le signe supérieur étant pour le cas où μ est pair, & l'inférieur pour celui où μ est impair.

42. A l'égard des valeurs de R' & S' qui entrent dans les expressions de r' & s', on peut les trouver de la même maniere que celles de R & S, par le développement de la quantité

$$\frac{(\varepsilon' + \sqrt{B})(\varepsilon'' + \sqrt{B}) \cdots (\varepsilon^{m-1} + \sqrt{B})}{E'' \cdot E''' \cdots E^{m-1}}$$

& il est facile de voir qu'on aura les mêmes expressions que pour R & S, en augmentant seulement dans les formules (π) les exposans d'une unité, c'est à dire, en y mettant l', l'', l''' etc. à la place de l, l', l'' etc. & λ'', λ''' etc. à la place de λ', λ'' etc.; ainsi on aura nécessairement pour R' & S' des nombres entiers, ainsi que pour R & S; mais, pour ne pas avoir de nouvelles formules à calculer, il suffira de prendre l'équation de l'art. 38, savoir $r' + s'\sqrt{B} = \frac{E'(r + s\sqrt{B})}{\varepsilon + \sqrt{B}}$, laquelle, à cause de $B - \varepsilon^2 = EE'$, se change en celle-ci: $r' + s'\sqrt{B} = \frac{(\sqrt{B} - \varepsilon)(r + s\sqrt{B})}{E} = \frac{Bs - \varepsilon r + (r - \varepsilon s)\sqrt{B}}{E}$; d'où

$r' =$

$$r' = \frac{Bs - \varepsilon r}{E}, \qquad s' = \frac{r - \varepsilon s}{E}.$$

Ainſi, connoiſſant les valeurs de r & s, on connoitra ſur le champ celles de r' & s', & quoique ces expreſſions ſoient ſous une forme fractionaire, on peut être aſſuré qu'elles donneront toujours des nombres entiers, parce que ces expreſſions doivent être équivalentes à celles de l'art. 38, leſquelles donnent évidemment des nombres entiers, puiſque R', S' & X, & Y ſont toujours des nombres entiers, comme nous venons de le voir.

43. Nous avons donc donné une méthode directe & générale pour réſoudre en nombres entiers (lorſque cela eſt poſſible) toute équation de la forme $\pm E = r^2 - Bs^2$, E étant $< \sqrt{B}$, & r, & s premiers entr'eux, de ſorte qu'on eſt maintenant en état de réſoudre auſſi toute équation de la forme $A = p^2 - Bq^2$, A étant un nombre quelconque entier poſitif, ou négatif (art. 28).

Pour cela on remarquera que l'on a, par les formules (ε) & (η), $r\sigma - s\varrho = \pm 1$, & $rs' - sr' = \pm 1$, d'où l'on tire $r(\sigma - s') - s(\varrho - r') = 0$, & de là $\frac{r}{s} = \frac{\varrho - r'}{\sigma - s'}$, de ſorte que, comme r, & s ſont premiers entr'eux, on aura néceſſairement

$$\varrho - r' = \lambda r, \qquad \& \qquad \sigma - s' = \lambda s,$$

& de là

$$\varrho = \lambda r + r', \qquad \sigma = \lambda s + s'$$

λ étant un nombre quelconque entier.

De plus on a, par les mêmes formules (ε), $r\varrho - Bs\sigma = \epsilon$; donc, mettant à la place de ϱ, & σ les valeurs précédentes, on aura $\epsilon = \lambda(r^2 - Bs^2) + rr' - Bss'$, or $r^2 - Bs^2 = \pm E$, & $rr' - Bss' = \mp \varepsilon$ (art. 31), donc on aura $\pm \epsilon = \lambda E - \varepsilon$, d'où

$$\epsilon = \lambda E \mp \varepsilon.$$

Or

Or il faut de plus (art. 33) que l'on ait $\epsilon < \sqrt{B}$ & $> \sqrt{B} - E$, donc $\lambda E \mp e < \sqrt{B}$, & $\lambda E \mp e > \sqrt{B} - E$, ce qui donne ces deux conditions

$$\lambda < \frac{\sqrt{B} \pm e}{E}, \qquad \lambda > \frac{\sqrt{B} \pm e}{E} - 1$$

par lesquelles on pourra déterminer λ, parce que λ devant être un nombre entier, il est visible qu'il ne pourra être autre chose que le nombre entier qui sera immédiatement plus petit que $\frac{\sqrt{B} \pm e}{E}$.

Ainsi, puisque E, & e sont connus (art. 28), on connoitra λ & ϵ sans avoir besoin d'aucun tâtonnement.

Maintenant, puisqu'on a (art. préc.) $r' = \frac{Bs - \epsilon r}{E}$, $s' = \frac{r - \epsilon s}{E}$, & que $\rho = \lambda r + r'$, $\sigma = \lambda s + s'$, on aura

$$\rho = \frac{(\lambda E - \epsilon) r + Bs}{E}, \ \sigma = \frac{(\lambda E - \epsilon) s + r}{E}$$

savoir, à cause de $\lambda E - \epsilon = \pm e$

$$\rho = \frac{Bs \pm er}{E}, \quad \sigma = \frac{r \pm es}{E}$$

expressions qui donneront toujours des nombres entiers, puisque r, s, r' & s' étant entiers aussi bien que λ, il est nécessaire que ρ, & σ le soient aussi. Or, connoissant r, s, ρ & σ, on pourra en retrogradant trouver p, & q (art. 28).

Il faut remarquer que le signe ambigu de e dans les formules précédentes se rapporte à celui de E dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$; mais nous avons vu (art. 28) que, pour avoir toutes les solutions possibles de l'équation $A = p^2 - Bq^2$, il faut prendre successivement e positif & négatif, en changeant dans ce dernier cas les signes de μ', μ'', μ''' etc. dans les formules (γ), de sorte que chaque valeur de e

 don-

donnera toujours deux valeurs de e (à moins qu'elles ne reviennent au même) & par conféquent deux valeurs de R, S, de r, s & de ϱ & σ, d'où l'on tirera deux expreffions générales de p, & q.

44. Comme l'on a par l'art. 39

$$r = R\xi + BS\psi, \qquad s = R\psi + S\xi$$

& par l'art. préc., $\varrho = \frac{Bs \pm er}{E}$, $\sigma = \frac{r \pm es}{E}$, fi on fait pour abréger

$$T = \frac{BS \pm eR}{E}, \qquad V = \frac{R \pm eS}{E}$$

on aura

$$\varrho = T\xi + BV\psi, \qquad \sigma = T\psi + V\xi$$

& il eft facile de voir par la nature des formules (γ) que ces valeurs de r, s, ϱ, & σ, favoir de p^n, q^n, p^{n+1}, q^{n+1} (art. 28) donneront pour p, & q des expreffions de cette forme

$$p = (fR + gT)\xi + B(fS + gV)\psi$$
$$q = (fR + gT)\psi + (fS + gV)\xi$$

f, & g étant des nombres entiers dépendans des nombres μ', μ'', μ''' etc. Donc, puifqu'on a (art. 28)

$$\xi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^n + (X - Y\sqrt{B})^n}{2}$$

$$\psi = \frac{(X + Y\sqrt{B^2})^n + (X - Y\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}$$

ou bien, en développant les puiffances n^{emes},

$$\xi = X^n + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2}Y^2B + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4}X^{n-4}Y^4B^2 + \text{etc.}$$

$$\psi = nX^{n-1}Y + \frac{n(n-1)\ (n-2)}{2.\ 3}X^{n-3}Y^3B + \text{etc.}$$

&

& que n peut être un nombre quelconque entier positif tel que $n\mu + m$, soit pair ou impair, suivant que le signe supérieur, ou l'inférieur aura lieu dans l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ (art. 37), il est clair que toute équation de la forme $A = p^2 - Bq^2$ (B étant positif), lorsqu'elle est résoluble en nombres entiers, admet nécessairement une infinité de solutions; de sorte que le nombre des solutions de ces sortes d'équations sera toujours nul ou infini, au lieu que ce nombre est toujours nécessairement limité lorsque B est négatif (art. 27).

45. M. Euler a donné, dans le Tome IX des nouveaux Commentaires de Petersbourg, une très belle méthode pour trouver une infinité de solutions en nombres entiers des équations de la forme $A + Cq + Bq^2 = p^2$ lorsqu'on en connoit une seule. Suivant cette méthode, si on fait pour plus de simplicité $C = 0$, & qu'on nomme P & Q les valeurs connues de p, & q, en sorte que l'on ait $P^2 - BQ^2 = A$, & que X, & Y soient des nombres entiers tels que $X^2 - BY^2 = 1$, on aura en général, en conservant les expressions de ξ & ψ de l'art. préc.,

$$p = \pm P\xi + BQ\psi, \quad q = \pm P\psi + Q\xi$$

l'exposant n des quantités ψ & ξ pouvant être un nombre quelconque, positif ou négatif.

Il ne seroit pas difficile de faire voir *a priori* que toutes les solutions que peuvent fournir ces formules se trouveront nécessairement parmi celles que donnera notre méthode; cela suit évidemment de ce que cette méthode doit donner absolument toutes les solutions possibles. Mais on auroit tort de croire que les formules dont il s'agit puissent donner toujours toutes les solutions possibles lorsqu'on ne connoit qu'une seule valeur de P & Q.

Pour le faire voir d'une maniere générale, nous commencerons par remarquer qu'en faisant n négatif on n'a point de nouvelles valeurs de ξ & de ψ, mais que la quantité ξ demeure la même, & que celle de ψ devient simplement négative. En effet, en mettant $-n$ au lieu de n, on aura (art. préc.)

$$\xi = \frac{1}{2(X + Y\sqrt{B})^n} + \frac{1}{2(X - Y\sqrt{B})^n}$$

$$= \frac{(X - Y\sqrt{B})^n + (X + Y\sqrt{B})^n}{2(X^2 - BY^2)^n},$$

& de même

$$\psi = \frac{(X - Y\sqrt{B})^n - (X + Y\sqrt{B})^n}{2(X^2 - BY^2)^n\sqrt{B}}$$

mais on a (hyp.) $X^2 - BY^2 = 1$; donc

$$\xi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^n + (X - Y\sqrt{B})^n}{2}$$

$$\psi = -\frac{(X + Y\sqrt{B})^n - (X - Y\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}.$$

De sorte qu'au lieu de supposer n positif, & négatif, il suffira de faire n positif, & de prendre ψ en plus & en moins; cela posé,

Supposons que P', & Q' soient de nouvelles valeurs de p, & q dans l'équation $p^2 - Bq^2 = A$, en sorte que l'on ait aussi $P'^2 - BQ'^2 = A$, & voyons si ces valeurs seront nécessairement renfermées dans les expressions précédentes de p, & q. Soit donc

$$P' = \pm P\xi + BQ\psi, \quad Q' = \pm P\psi + Q\xi$$

& tirant les valeurs de ξ, & ψ, on aura, à cause de $P^2 - BQ^2 = A$,

$$\xi = \frac{\pm PP' - BQQ'}{A}, \quad \psi = \frac{\pm PQ' - QP'}{A}.$$

Donc, puisque les nombres ξ, & ψ sont toujours entiers, à cause que X & Y sont des nombres entiers par l'hypothese, & que n est aussi un nombre entier positif, il faudra que les deux quantités $\pm PP' - BQQ'$ & $\pm PQ' - QP'$ soient toujours divisibles par A, en prenant l'un ou l'autre des signes ambigus. Or j'observe d'abord que, si la seconde de ces quantités est divisible par A, la premiere le sera aussi; car, puisqu'on a $A = P^2 - BQ^2$, & $A = P'^2 - BQ'^2$, on aura

aura aussi (art. 9) $A^2 = (PP' \pm BQQ')^2 - B(PQ' \pm QP')^2$; d'où l'on voit que, si $PQ' \pm QP'$ est divisible par A, $PP' \pm BQQ'$ le sera aussi. Ainsi tout se réduit à savoir si la quantité $PQ' \pm QP'$ sera toujours divisible par A, supposé que l'on ait $P^2 - BQ^2 = A$, & $P'^2 - BQ'^2 = A$; or, comme ces deux équations de condition renferment le nombre B qui ne se trouve point dans la quantité $PQ' \pm QP'$, on aura, en chassant B, cette condition unique $A(Q'^2 - Q^2) = P^2Q'^2 - Q^2P'^2 = (PQ' + QP')(PQ' - QP')$; par laquelle on voit qu'il n'est pas absolument nécessaire que l'une ou l'autre des quantités $PQ' + QP'$, $PQ' - QP'$, soit divisible par A, à moins que A ne soit un nombre premier. Ainsi, toutes les fois que A ne sera pas un nombre premier, l'équation $A = p^2 - Bq^2$ pourra avoir des solutions qui ne sauroient être contenues dans les formules de M. Euler.

Pour s'en convaincre par un exemple, soit $A = ab$, & supposons $a = f^2 - Bg^2$, $b = h^2 - Bl^2$, on aura $A = (fh \pm Blg)^2 - B(fl \pm hg)^2$; de sorte qu'on pourra prendre

$$P = fh + Blg, \qquad Q = fl + hg$$
$$P' = fh - Blg, \qquad Q' = fl - hg$$

& alors on aura

$$PQ' + QP' = 2lh(f^2 - Bg^2), \ \& \ PQ' - QP' = -2fg(h^2 - Bl^2)$$

savoir

$$PQ' + QP' = 2lha, \qquad PQ' - QP' = -2fgb;$$

donc, pour que l'une ou l'autre de ces deux quantités soit divisible par $A = ab$, il faudra ou que $2lh$ soit divisible par b, ou que $2fg$ le soit par a; or c'est ce qui n'aura point lieu dans une infinité de cas, & surtout si a, & b sont des nombres premiers différens de 2, parce qu'alors il sera impossible, à cause des équations $a = f^2 - Bg^2$, & $b = h^2 - Bl^2$, que f, ou g soient divisibles par a, ou que h, ou l le soient par b.

On

On voit par là que, pour que les formules de M. Euler pûssent donner toutes les solutions possibles, il faudroit que les valeurs de ξ, & de ψ pûssent être rompues; en effet ce grand Géometre remarque lui-même, à l'art. 25 du premier Mémoire du Tome cité, qu'en prenant, lorsque cela est possible, pour X & Y des nombres rompus dont le dénominateur soit 2, on trouvera souvent beaucoup plus de solutions qu'en ne prenant pour X, & Y que des nombres entiers; & il paroit croire qu'on pourra avoir de cette maniere toutes les solutions possibles de l'équation dont il s'agit. Supposons donc en général que X, & Y soient des fractions dont le dénominateur soit 2, ou bien mettons $\frac{X}{2}$, & $\frac{Y}{2}$ à la place de X & Y dans les expressions de ξ, & ψ, & il est clair que ces quantités deviendront $\frac{\xi}{2^n}$, & $\frac{\psi}{2^n}$; de sorte qu'on aura dans ce cas

$$\frac{\xi}{2^n} = \frac{\pm PP' - BQQ'}{A}, \quad \frac{\psi}{2^n} = \frac{\pm PQ' - QP'}{A}$$

ou bien

$$\xi = \frac{2^n(\pm PP' - PQQ')}{A}, \quad \psi = \frac{2^n(\pm PQ' - QP')}{A};$$

d'où, à moins que A ne soit une puissance de 2, on pourra tirer les mêmes conclusions que ci-dessus. Ainsi cette généralisation ne suffit pas encore pour avoir toutes les solutions possibles dans tous les cas.

Exemples.

46. Donnons à présent quelques exemples pour montrer l'usage des méthodes précédentes; nous considérerons d'abord le cas où B est un nombre négatif, ensuite celui où B est positif.

Exemple 1. Soit proposé de résoudre l'équation

$$109 = u^2 + 7t^2$$

en ſuppoſant que u, & t ſoient des nombres entiers.

Je remarque d'abord que, comme le nombre 109 ne contient aucun facteur carré, les nombres u, & t ſeront néceſſairement premiers entr'eux (art. 22); ainſi on fera $u = p$, $t = q$, $A = 109$, & $B = -7$ pour avoir l'équation de l'art. 23; de ſorte qu'on n'aura à réſoudre que cette ſeule équation

$$109 = p^2 + 7q^2.$$

On commencera donc par chercher un nombre $\alpha < \frac{109}{2}$, & tel que $\alpha^2 + 7$ ſoit diviſible par 109; ou bien on cherchera un multiple de 109 qui ſoit de la forme $\alpha^2 + 7$ (art. 20, ex. 1), & l'on trouvera $109.23 = 50^2 + 7$; de ſorte que $\alpha = 50$. La valeur de α étant connue, on formera une ſuite d'équations analogues à celles de l'art. 26, jusqu'à ce que l'on parvienne à un terme $A^n =$ ou < 7; & l'on aura

$$109.23 = 50^2 + 7, \quad \alpha = 50 \qquad A' = 23$$
$$23.\ 1 = 4^2 + 7, \quad \alpha' = -2A' + \alpha = 4, \quad A'' = 1 = A^n$$

enſuite

$$p = p'' + 2p', \qquad q = q'' + 2q'$$

& comme l'on a trouvé $A^n = 1 = A''$, on aura (art. 27)

$$p'' = 1, \qquad q'' = 0$$
$$p' = \alpha' = 4, \qquad q' = 1.$$

Donc $\quad p = 9, \qquad q = 2.$

Or 109 étant un nombre premier, il n'exiſte point d'autre nombre α qui ait les conditions requiſes (art. 24); donc l'équation propoſée n'eſt ſuſceptible que d'une ſeule ſolution en nombres entiers, laquelle eſt $u = 9$, & $t = 2$.

Exemple 2. Soit propoſée l'équation

$$909 = u^2 + 17t^2$$

u, & t devant être des nombres entiers.

 Com-



Comme le nombre 909 n'est pas premier, on verra d'abord s'il renferme quelque facteur carré ; or $909 = 101.9$, 101 étant premier ; ainsi on pourra faire (art. 22) deux suppositions, savoir $u = p$, $t = q$, $A = 109$, ce qui donnera l'équation

$$909 = p^2 + 17q^2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (A)$$

ensuite $\varrho = 3$, & par conséquent $u = 3p$, $t = 3q$, $A = 101$; ce qui donnera cette autre équation

$$101 = p^2 + 17q^2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (B).$$

Commençons par l'équation (A) & il faudra chercher un nombre $\alpha < \frac{909}{2}$, tel que $\alpha^2 + 17$, qui soit divisible par 909, ou, ce qui revient au même, un nombre $A' < \frac{A}{4} + 1 < 229$, qui multipliant 909 donne un carré plus 17 (art. 20).

Après quelques essais je trouve $A' = 149$, & $\alpha = 368$; & à l'aide de ces valeurs je forme les équations suivantes analogues à celles de l'art. 26,

$$909.149 = 368^2 + 17, \quad \alpha = 368, \quad A' = 149$$
$$149.\ 33 = 70^2 + 17, \quad \alpha' = -2A' + \alpha = 70, \quad A'' = 33$$
$$33.\ \ 1 = 4^2 + 17, \quad \alpha'' = -2A'' + \alpha' = 4, \quad A''' = 1 = A^v.$$

& par conséquent

$$p = p'' + 2p', \qquad q = q'' + 2q'$$
$$p' = p''' + 2p'', \qquad q' = q''' + 2q''$$

& comme $A''' = 1$, on aura (art. 27)

$$p''' = 1 \qquad q''' = 0$$
$$p'' = \alpha'' = 4, \qquad q'' = 1.$$

Donc

$$p' = 9, \qquad q' = 2$$
$$p = 22, \qquad q = 5,$$

ce

ce qui donne cette premiere solution de l'équation proposée, $u = 22$, $t = 5$.

Maintenant, comme 909 n'est pas premier, on pourra (art. 24) trouver encore d'autres valeurs de α; or, résolvant 909 en ses facteurs premiers, on aura 101.3.3, de sorte qu'on ne pourra faire que $a = 101$ & $b = 9$; ce qui ne donnera qu'une seule valeur de α (art. cité). On cherchera donc la derniere des fractions convergentes vers $\frac{a}{b} = \frac{101}{9}$ (art. 29) & l'on trouvera $\frac{45}{4}$, de sorte qu'on aura $a' = 45$, $b' = 4$, & comme $\frac{45}{4} > \frac{101}{9}$, on aura $\omega = (1 + 2.101.4)\alpha$; c'est à dire, à cause de $\alpha = 368$, $\omega = 297712$; ainsi l'on aura, à cause de $A = 909$, $\beta = 909m \pm 297712 =$ (en prenant le signe inférieur & faisant $m = 328$, afin que la valeur de β devienne $< \frac{A}{2}$) 440; c'est la nouvelle valeur de α, & la seule qu'on puisse trouver de cette maniere; de sorte qu'il seroit inutile d'en chercher encore d'autres.

Mettant donc en œuvre cette valeur, on trouvera les équations

$$909.213 = 440^2 + 17, \quad \alpha = 440 \qquad A' = 213$$
$$213.\ \ 1 = 14^2 + 17, \quad \alpha' = -2A' + \alpha = 14, \quad A'' = 1,$$

& de là

$$p = p'' + 2p', \qquad q = q'' + 2q',$$

& comme $A'' = 1$, on aura (art. 27)

$$p'' = 1 \qquad q'' = 0$$
$$p' = \alpha' = 14, \qquad q' = 1.$$

Donc

$$p = 29, \qquad q = 2.$$

Ainsi l'on aura cette seconde solution $u = 29$, $t = 2$.

Or, comme on ne sauroit trouver d'autres valeurs de α, l'équation

(A) ne fournira pas non plus d'autres ſolutions; c'eſt pourquoi nous paſſerons à l'équation (B).

Ayant ici $A = 101$, on cherchera une valeur de α telle que $\alpha^2 + 17$ ſoit diviſible par 101, & qui ſoit en même tems $< \frac{A}{2} < 51$; or, ayant déjà trouvé ci-deſſus que $368^2 + 17$ eſt diviſible par 909, & par conſéquent auſſi par 101, il n'y aura qu'à faire $\alpha = 101m \pm 368$, & déterminer enſuite m & le ſigne ambigu en ſorte que $\alpha < \frac{101}{2}$; on fera donc $m = 4$, & on prendra le ſigne inférieur, ce qui donnera $\alpha = 36$.

Au moyen de cette valeur, on formera les équations

$$101.13 = 36^2 + 17, \quad \alpha = 36, \quad A' = 13 < 17,$$

d'où l'on voit d'abord, à cauſe que A' eſt moindre que 17 & en même tems différent de l'unité, que l'équation (B) n'eſt point réſoluble, au moins d'après la valeur de α que nous venons de trouver (art. 27), & comme le nombre 101 eſt premier, il s'enſuit que l'équation (B) n'admet abſolument aucune ſolution en nombres entiers. De ſorte que l'équation propoſée $909 = u^2 + 17t^2$ n'eſt ſuſceptible que des deux ſolutions que nous avons trouvées ci-deſſus.

Suppoſons maintenant que B ſoit un nombre poſitif, &

Exemple 3. Soit propoſé de réſoudre l'équation de l'exemple 1 de l'art. 20, ſavoir

$$109 = u^2 - 7t^2$$

avec cette condition que u, & t ſoient des nombres entiers.

Puiſque 109 eſt un nombre premier, on ne pourra faire que $u = p$, $t = q$; donc $A = 109$, $B = 7$, de ſorte qu'on n'aura à réſoudre que cette ſeule équation

$$109 = p^2 - 7q^2.$$

Or, ayant déjà trouvé dans l'exemple cité $\alpha = 15$, $A' = 2$, on aura

109.

$109 \cdot 2 = 15^2 - 7, \quad \alpha = 15 \qquad A' = 2$

$2 \times -3 = 1 - 7, \quad \alpha' = -7A' + \alpha = 1, \quad A'' = -3$

& de là

$$p = p'' + 7p', \qquad q = q'' + 7q'$$

Donc, puisque $\alpha' < \sqrt{B}$, & A' aussi $< \sqrt{B}$, on fera (art. 28) $\alpha' = e = 1$, $A' = \pm E = 2$, $A'' = \mp D = -3$, donc $E = 2$, $D = -3$, avec les signes supérieurs; & par conséquent $p' = r$, $q' = s$, $p'' = \varrho$, $q'' = \sigma$, de sorte qu'on aura à résoudre l'équation

$$2 = r^2 - 7s^2.$$

Or, ayant $E = 2$, $B = 7$, & $e = 1$, on aura (art. 43) $\lambda < \frac{\sqrt{7} + 1}{2}$, & $> \frac{\sqrt{7} + 1}{2} - 1$, donc (à cause que la racine approchée de 7 est 2) $\lambda = 1$, & de là $\varepsilon = E - e = 1$. Ayant trouvé ε on formera, à l'aide des formules (κ), (λ) & (μ) des art. 31 & 32, les séries suivantes, où le signe $<$ indique qu'il faut prendre le nombre entier qui est immédiatement moindre,

$E = 2 \qquad \varepsilon = 1$

$E' = \frac{7-1}{2} = 3, \quad \lambda' < \frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1, \quad \varepsilon' = 1.3 - 1 = 2$

$E'' = \frac{7-4}{3} = 1, \quad \lambda'' < \frac{\sqrt{7}+2}{1} = 4, \quad \varepsilon'' = 4.1 - 2 = 2$

$E''' = \frac{7-4}{1} = 3, \quad \lambda''' < \frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1, \quad \varepsilon''' = 1.3 - 2 = 1$

$E^{IV} = \frac{7-1}{3} = 2, \quad \lambda^{IV} < \frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1, \quad \varepsilon^{IV} = 1.2 - 1 = 1$

$E^{V} = \frac{7-1}{2} = 3, \quad \lambda^{V} < \frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1, \quad \varepsilon^{V} = 1.3 - 1 = 2.$

Donc, puisque $E^{IV} = E$, & $E^{V} = E'$, on fera (art. 37) $E^{IV} = E^{\mu}$

 savoir

ſavoir $\mu = 4$, & comme $E'' = 1$, on ſera $E'' = E^m$, ſavoir $m = 2$; donc, à cauſe que l'on a pris les ſignes ſupérieurs, & que m eſt pair, on en conclura que l'équation eſt réſoluble (art. 37).

On cherchera donc les valeurs de l, l', l'' etc. l^{μ} comme dans les formules (π) de l'art. 39, & l'on aura

$$\begin{aligned} l &= 1 \\ l' &= 1l = 1 \\ l'' &= 4l' + l = 5 \\ l''' &= 1l'' + l' = 6 \\ l^{IV} &= 1l''' + l'' = 11 \end{aligned}$$

d'où par les formules des art. 40, & 41, on trouvera d'abord, à cauſe de $\beta = 2$ qui eſt le nombre entier immédiatement moindre que $\sqrt{7}$,

$$R = 2l' + l = 3, \qquad S = l' = 1$$

$$X = l^{IV} - \frac{l'''}{2} = 8, \qquad Y = \frac{l'''}{2} = 3$$

donc (art. 38)

$$\xi = \frac{(8 + 3\sqrt{7})^n + (8 - 3\sqrt{7})^n}{2}$$

$$\psi = \frac{(8 + 3\sqrt{7})^n - (8 - 3\sqrt{7})^n}{2\sqrt{7}}$$

où n pourra être un nombre quelconque poſitif entier, tel que $n\mu + m$ ſoit pair, c'eſt à dire que $4n + 2$ ſoit pair, d'où l'on voit que n pourra être un nombre quelconque entier poſitif. Donc (même art.)

$$r = 3\xi + 7\psi, \qquad s = 3\psi + \xi$$

& enſuite par l'art. 44 en prenant toujours les ſignes ſupérieurs

$$T = \frac{7 + 3}{2} = 5, \qquad V = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

de ſorte qu'on aura

$\varrho =$

$$\varrho = 5\xi + 14\psi, \qquad \sigma = 5\psi + 2\xi.$$

Donc, puisque $r = p'$, $s = q'$, $\varrho = p''$, $\sigma = q''$, on aura

$$p = \varrho + 7r = 26\xi + 63\psi$$
$$q = \sigma + 7s = 26\psi + 9\xi.$$

Nous avons pris $e = 1$, c'est à dire positif; prenons maintenant $e = -1$, & l'on aura dans ce cas (art. 43)

$$p = p'' - 7p', \qquad q = q'' - 7q'.$$

Or, faisant $e = -1$, on aura $\lambda < \frac{\sqrt{7} - 1}{2}$, & $> \frac{\sqrt{7} - 1}{2} - 1$; donc $\lambda = 0$, & de là $\epsilon = -e = 1$, comme plus haut; ainsi on aura les mêmes valeurs de R, S, & de X, Y, & par conséquent de ξ, ψ & de r, s.

Maintenant on aura

$$T = \frac{7 - 3}{2} = 2, \qquad V = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

donc $\varrho = 2\xi + 7\psi, \qquad \sigma = 2\psi + \xi$

d'où l'on trouvera encore

$$p = \varrho - 7r = -19\xi, -42\psi,$$
$$q = \sigma - 7s = -19\psi - 6\psi$$

ou bien en changeant les signes

$$p = 19\xi + 42\psi, \qquad q = 19\psi + 6\psi.$$

Or, comme 109 est un nombre premier, on ne pourra trouver aucune autre valeur de α (art. 24), de sorte que les expressions précédentes renfermeront nécessairement toutes les solutions possibles de l'équation proposée.

Exemple 4. Soit proposée l'équation

$$1459 = u^2 - 30t^2.$$

Com-

Comme 1459 est un nombre premier, on ne pourra faire que $p = u$, $q = t$ & $A = 1459$, $B = 30$, de sorte qu'on n'aura que l'équation

$$1459 = p^2 - 30q^2.$$

On chercherait donc un nombre $\alpha < \frac{1459}{2}$, & tel que $\alpha^2 - 30$ soit divisible par 1459; ou bien on cherchera, comme dans l'exemple 4 de l'art. 20, un nombre $A' < \frac{A}{4} < \frac{1459}{4}$ dont le produit par 1459 étant augmenté de 30 soit un carré, & l'on trouvera $A' = 241$ & $\alpha = 593$, moyennant quoi on formera les équations

$$\begin{array}{lll} 1459.241 = 593^2 - 30, & \alpha = 593 & A' = 241 \\ 241.\ 51 = 111^2 - 30, & \alpha' = -2A' + \alpha = 111, & A'' = 51 \\ 51.\ 1 = 9^2 - 30, & \alpha'' = -2A'' + \alpha' = 9, & A''' = 1 \\ 1 \times -5 = 5^2 - 30, & \alpha''' = -4A''' + \alpha'' = 5, & A^{IV} = -5. \end{array}$$

& de là

$$\begin{array}{ll} p = p'' + 2p', & q = q'' + 2q' \\ p' = p''' + 2p'', & q' = q''' + 2q'' \\ p'' = p^{IV} + 4p''', & q'' = q^{IV} + 4q'''. \end{array}$$

Or, puisque $\alpha''' < \sqrt{B}$, & que A''', & A^{IV} sont aussi chacun $< \sqrt{B}$, on fera $\alpha''' = 5 = e$, & $A''' = \pm E = 1$, $A^{IV} = \mp D = -5$, donc $E = 1$ & $D = 5$ avec les signes supérieurs. Ensuite on fera $p''' = r$, $q''' = s$, $p^{IV} = \varrho$, $q^{IV} = \sigma$, & l'on aura à résoudre l'équation

$$1 = r^2 - 30s^2.$$

Maintenant, à cause de $E = 1$, $B = 30$, & $e = 5$, on aura (art. 43)

$$\lambda < \frac{\sqrt{30} + 5}{1} \ \& > \frac{\sqrt{30} + 5}{1} - 1, \text{ donc}$$

$$\lambda = 10, \ \& \ \varepsilon = \lambda E - e = 5.$$

Ayant

Ayant ainsi ε, on formera les séries suivantes (art. 31 & 33)

$$E = 1 \qquad \varepsilon = 5$$

$$E' = \frac{30-25}{1} = 5, \quad \lambda' < \frac{\sqrt{30}+5}{5} = 2, \quad \varepsilon' = 2.5-5 = 5$$

$$E'' = \frac{30-25}{5} = 1, \quad \lambda'' < \frac{\sqrt{30}+5}{1} = 10, \quad \varepsilon'' = 10.1-5 = 5$$

$$E''' = \frac{30-25}{1} = 5, \quad \lambda''' < \frac{\sqrt{30}+5}{10} = 1, \quad \varepsilon''' = 1.5-5 = 0.$$

Donc, comme $E'' = E$, & $E''' = E'$, on fera (art. 37) $E'' = E^{\mu}$, c'est à dire $\mu = 2$, & comme l'on a en même tems $E = 1$, on fera $E^{m} = E$, savoir $m = 0$, ce qui donnera sur le champ $R = 1$, $S = 0$, & par conséquent $r = \xi$, $s = \psi$ (art. 40).

On formera donc la série l, l', l'', (art. 39)

$$l = 1$$
$$l' = 2l = 2$$
$$l'' = 10l' + l = 21$$

& l'on aura (art. 41), à cause de $\mu = 2$, les valeurs suivantes

$$X = l'' - 5l' = 11, \qquad Y = l' = 2$$

donc (art. 38)

$$\xi = \frac{(11 + 2\sqrt{30})^{n} + (11 - 2\sqrt{30})^{n}}{2}$$

$$\psi = \frac{(11 + 2\sqrt{30})^{n} - (11 - 2\sqrt{30})^{n}}{2\sqrt{30}}$$

n étant tel que $n\mu + m$ savoir $2n$ soit pair, de sorte que n pourra être un nombre entier positif quelconque (art. 37). Maintenant, puisque $R = 1$, $S = 0$, $E = 1$, & $\varepsilon = 5$, on aura (art. 44) $T = 5$, $V = 1$; d'où $\varrho = 5\xi + 30\psi$, $\sigma = 5\psi + \xi$.

Donc, ayant $p''' = r$, $q''' = s$, $p^{IV} = \varrho$, $q^{IV} = \sigma$, on trouvera en remontant

$p'' =$

$p'' = \varrho + 4r = 9\xi + 30\psi$; $q'' = \sigma + 4s = 9\psi + \xi$
$p' = r + 2p'' = 19\xi + 60\psi$, $q' = s + 2q'' = 19\psi + 2\xi$
$p = p'' + 2p' = 47\xi + 150\psi$, $q = q'' + 2q' = 47\psi + 5\xi$.

Faisons maintenant e négatif (art. 43), c'est à dire $e = -5$, & l'on aura dans ce cas

$$p = p'' - 2p', \quad q = q'' - 2q'$$
$$p' = p''' - 2p'', \quad q' = q''' - 2q''$$
$$p'' = p^{IV} - 4p''', \quad q'' = q^{IV} - 4q'''.$$

Ensuite on aura $\lambda < \frac{\sqrt{30} - 5}{1} > \frac{\sqrt{30} - 5}{1} - 1$, donc $\lambda = 0$, & par conséquent $\varepsilon = \lambda E - e = 5$, comme ci-dessus; de sorte que les valeurs de ξ, & ψ seront les mêmes que nous avons déjà trouvées. A l'égard de T, & V, on aura (à cause de $R = 1$, $S = 0$, $e = -5$, $E = 1$) $T = -5$, $V = 1$; donc $\varrho = -5\xi + 30\psi$, & $\sigma = -5\psi + \xi$; donc

$p'' = \varrho - 4r = -9\xi + 30\psi$, $q'' = \sigma - 4s = -9\psi + \xi$
$p' = r - 2p'' = +19\xi - 60\psi$, $q' = s - 2q'' = 19\psi - 2\xi$
$p = p'' - 2p' = -47\xi + 150\psi$, $q = q'' - 2q' = -47\psi + 5\xi$.

Ainsi, en combinant les deux formules, on aura en général

$$p = \pm 47\xi + 150\psi, \quad q = \pm 47\psi + 5\xi.$$

Et comme 1459 est un nombre premier, il n'y auroit pas d'autres solutions que celles que nous venons de trouver.

Exemple 5. Etant proposée l'équation

$$210 = u^2 - 46t^2$$

dont on connoit déjà cette solution $u = 292$, & $t = 43$; on demande toutes les autres solutions possibles en nombres entiers.

Comme 210 ne contient aucun facteur carré, u, & t devront être toujours premiers entr'eux (art. 22); ainsi on fera $u = p$, $t =$

$t = q$, $A = 210$, & $B = 46$, de sorte que l'équation à résoudre sera

$$210 = p^2 - 46q^2.$$

Maintenant, puisqu'on connoit déjà une valeur de p, & q, savoir $p = 292$ & $q = 43$, on pourra s'en servir pour trouver la valeur de α dans l'équation $AA' = \alpha^2 - B$, savoir $210A' = \alpha^2 - 46$. Pour cela il n'y aura qu'à chercher la fraction $\frac{m}{n}$ qui précédera immédiatement la fraction $\frac{p}{q}$ dans la suite des fractions convergentes vers $\frac{p}{q}$ (art. 29), & faisant $a = mp - Bnq$, on aura en général $\alpha = \mu A \pm a$ (art. 23).

Divisant 292 par 43, ensuite 43 par le reste 34, & ainsi successivement, on aura les quotiens 6, 1, 3, 1, 3, 2, à l'aide desquels on formera les fractions $\frac{6}{1}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{34}{5}$, $\frac{129}{19}$, $\frac{292}{43}$; ainsi on aura $m = 129$, $n = 19$; donc $a = 86$; de sorte que comme 86 est $< \frac{A}{2}$, on fera $\mu = 0$, & l'on aura $\alpha = a = 86$; & de là on trouvera $A' = 35$. On formera donc les équations suivantes

$$210 \times 35 = (86)^2 - 46, \quad \alpha = 86, \quad A' = 35$$
$$35 \times 6 = (16)^2 - 46, \quad \alpha' = -2A' + \alpha = 16, \quad A'' = 6$$
$$6 \times -7 = (2)^2 - 46, \quad \alpha'' = 3A'' - \alpha' = 2, \quad A''' = -7,$$

& par conséquent

$$p = p'' + 2p', \qquad q = q'' + 2q'$$
$$-p' = p''' - 3p'', \qquad -q' = q''' - 3q''.$$

Donc, puisque $\alpha'' < \sqrt{B}$, & que A'' est aussi $< \sqrt{B}$, on fera $\alpha'' = e = 2$, $A'' = \pm E = 6$, $A''' = \mp D = -7$; donc $E = 6$, $D = 7$, avec les signes supérieurs. Ensuite on fera $p'' = r$, $q'' = s$, $p''' = \rho$, $q''' = \sigma$, & l'on aura à résoudre l'équation

$$6 = r^2 - 46s^2.$$

Or

Or, puisque B $= 46$, E $= 6$, $e = 2$, on aura (art. 43) $\lambda < \frac{\sqrt{46} + 2}{6}$ & $> \frac{\sqrt{46} + 2}{6} - 1$, donc $\lambda = 1$; donc $\epsilon = \lambda E - e = 4$.

Ayant ϵ, on formera (art. 31, & 33) les féries fuivantes, où le figne $<$ indique qu'il faut prendre les nombres entiers qui font immédiatement plus petits.

$$E = 6 \qquad \epsilon = 4$$

$$E' = \frac{46-16}{6} = 5, \quad \lambda' < \frac{\sqrt{46}+4}{5} = 2, \quad \epsilon' = 2.5 - 4 = 6$$

$$E'' = \frac{46-36}{5} = 2, \quad \lambda'' < \frac{\sqrt{46}+6}{2} = 6, \quad \epsilon'' = 6.2 - 6 = 6$$

$$E''' = \frac{46-36}{2} = 5, \quad \lambda''' < \frac{\sqrt{46}+6}{5} = 2, \quad \epsilon''' = 2.5 - 6 = 4$$

$$E^{IV} = \frac{46-16}{5} = 6, \quad \lambda^{IV} < \frac{\sqrt{46}+4}{6} = 1, \quad \epsilon^{IV} = 1.6 - 4 = 2$$

$$E^{V} = \frac{46-4}{6} = 7, \quad \lambda^{V} < \frac{\sqrt{46}+2}{7} = 1, \quad \epsilon^{V} = 1.7 - 2 = 5$$

$$E^{VI} = \frac{46-25}{7} = 3, \quad \lambda^{VI} < \frac{\sqrt{46}+5}{3} = 3, \quad \epsilon^{VI} = 3.3 - 5 = 4$$

$$E^{VII} = \frac{46-16}{3} = 10, \quad \lambda^{VII} < \frac{\sqrt{46}+4}{10} = 1, \quad \epsilon^{VII} = 1.10 - 4 = 6$$

$$E^{VIII} = \frac{46-36}{10} = 1, \quad \lambda^{VIII} < \frac{\sqrt{46}+6}{1} = 12, \quad \epsilon^{VIII} = 12.1 - 6 = 6$$

$$E^{IX} = \frac{46-36}{1} = 10, \quad \lambda^{IX} = \frac{\sqrt{46}+6}{10} = 1, \quad \epsilon^{IX} = 1.10 - 6 = 4$$

$$E^{X} = \frac{46-16}{10} = 3, \quad \lambda^{X} = \frac{\sqrt{46}+4}{3} = 3, \quad \epsilon^{X} = 3.3 - 4 = 5$$

E^{XI}

$E^{XI} = \frac{46-25}{3} = 7,\quad \lambda^{XI} = \frac{\sqrt{46}+5}{7} = 1,\quad \varepsilon^{XI} = 1.7-5 = 2$

$E^{XII} = \frac{46-4}{7} = 6,\quad \lambda^{XII} = \frac{\sqrt{46}+2}{6} = 1,\quad \varepsilon^{XII} = 1.6-2 = 4$

$E^{XIII} = \frac{46-16}{6} = 5,\quad \lambda^{XIII} = \frac{\sqrt{46}+4}{5} = 2,\quad \varepsilon^{XIII} = 2.5-4 = 6$

etc. etc. etc.

Donc, puiſque $E^{XII} = E$, & $E^{XIII} = E'$, on fera $E^{XII} = E^{\mu}$, ſavoir $\mu = 12$, & comme $E^{VIII} = 1$, on fera $E^{VIII} = E^{m}$, ſavoir $m = 8$.

On formera donc, par les formules (π) de l'art. 39, la ſérie l, l', l'' etc. juſqu'à l^{XII}, en cette ſorte :

$$\begin{aligned}
l &= 1\\
l' &= 2l = 2\\
l'' &= 6l' + l = 13\\
l''' &= 2l'' + l' = 28\\
l^{IV} &= 1l''' + l'' = 41\\
l^{V} &= 1l^{IV} + l''' = 69\\
l^{VI} &= 3l^{V} + l^{IV} = 248\\
l^{VII} &= 1l^{VI} + l^{V} = 317\\
l^{VIII} &= 12l^{VII} + l^{VI} = 4052\\
l^{IX} &= 1l^{VIII} + l^{VII} = 4369\\
l^{X} &= 3l^{IX} + l^{VIII} = 17159\\
l^{XI} &= 1l^{X} + l^{IX} = 21528\\
l^{XII} &= 1l^{XI} + l^{X} = 38687.
\end{aligned}$$

Et l'on aura (art. 40, 41) $R = \beta l^{VII} + l^{VI}$, $S = l^{VII}$, $X = l^{XII} - \frac{\varepsilon l^{XI}}{E}$, $Y = \frac{l^{XI}}{E}$, ſavoir à cauſe de $\beta = 6$,

 R =

$$R = 2150, \qquad S = 317$$
$$X = 24335, \qquad Y = 3588.$$

Donc, ſuppoſant en général

$$\xi = \frac{(X+Y\sqrt{B})^n + (X-Y\sqrt{B})^n}{2}, \quad \psi = \frac{(X+Y\sqrt{B})^n - (X-Y\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}$$

on aura (art. 38)

$$r = 2150\xi + 317 \times 46\psi, \qquad s = 2150\psi + 317\xi,$$

& l'expoſant n pourra être quelconque, pourvu que $n\mu + m = 16n + 8$ ſoit poſitif & pair; de ſorte que n pourra être un nombre quelconque entier poſitif (art. 37).

Maintenant on aura (art. 44) en prenant les ſignes ſupérieurs,

$$T = \frac{BS + eR}{E} = 3147, \quad V = \frac{R + eS}{E} = 464$$

& par conſéquent

$$\varrho = 3147\xi + 464 \times 46\psi, \qquad \sigma = 3147\psi + 464\xi.$$

Donc, puiſque $p'' = r$, $q'' = s$, $p''' = \varrho$, $q''' = \sigma$, on aura

$$p' = -\varrho + 3r = 3303\xi + 487 \times 46\psi, \; q' = -\sigma' + 3s = 3303\psi + 487\xi$$
$$p = r + 2p' = 8756\xi + 1291 \times 46\psi, \; q = s + 2q' = 8756\psi + 1291\xi.$$

Faiſons à préſent e négatif (art. 43), & l'on aura dans ce cas $\lambda < \frac{\sqrt{46} - 2}{6}$ & $> \frac{\sqrt{46} - 2}{6} - 1$, donc $\lambda = 0$, donc $\varepsilon = -e = 2$. Ainſi, en prenant $E = 6$, & $\varepsilon = 2$, on formera de nouvelles ſéries ſemblables aux précédentes.

Mais, ſans ſe donner cette peine, il ſuffira de remarquer que les valeurs de E, & de ε, répondent à celles de E^{IV} & de ε^{IV} des ſéries précédentes; d'où il s'enſuit que celles de E, E', E'' etc. ε, ε', ε'' etc. & λ', λ'' etc. dont il s'agit ici, répondront à celles de E^{IV}, E^{V}, E^{VI} etc. ε^{IV}, ε^{V}, ε^{VI} etc. & λ^{V}, λ^{VI} etc. des ſéries déjà trouvées; & qu'ainſi il n'y

n'y aura qu'à diminuer dans ces mêmes séries tous les exposans de 4 pour les accommoder au cas présent; & comme les termes qui ont 12 & 13 pour exposans sont les mêmes que ceux qui ont 0, & 1, il est évident que pour continuer les séries il n'y aura qu'à les recommencer après les termes dont l'exposant sera 11 (voyez l'exemple suivant & la Remarque de l'art. 47); de cette maniere on trouvera dans le cas présent $E = 6$, $E' = 7$, $E'' = 3$ etc. $E^{IV} = 1$ etc. $E^{XII} = 6$, $E^{XIII} = 7$, & $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 3$, $\lambda''' = 1$, $\lambda^{IV} = 12$ etc., donc $m = 4$, & $\mu = 12$ comme plus haut. Or, puisque les quantités X & Y sont toujours les mêmes pour la même valeur de B (art. 41), il suffira de chercher R & S en faisant la série

$$l = 1$$
$$l' = 1l = 1$$
$$l'' = 3l' + l = 4$$
$$l''' = 1l'' + l' = 5$$

d'où l'on aura

$$R = \beta l''' + l'' = 34, \quad S = l''' = 5$$

& par conséquent

$$r = 34\xi + 5 \times 46\psi, \quad s = 34\psi + 5\xi$$

l'exposant n pouvant être de même un nombre quelconque entier positif, à cause que $12n + 4$ est toujours pair.

Or, à cause de $e = -2$, on aura $T = 27$, & $S = 4$, donc

$$\varrho = 27\xi + 4 \times 46\psi, \quad \sigma = 27\psi + 4\xi.$$

Donc (art. 28)

$$p' = -\varrho - 3r = -129\xi - 19 \times 46\psi, \quad q' = -\sigma - 3s = -129\psi - 19\xi$$
$$p = r - 2p' = 292\xi + 43 \times 46\psi, \quad q = s - 2q' = 292\psi + 43\xi.$$

Les expressions de p, & q que nous venons de trouver résultent de la supposition de $\alpha = 86$; or comme le nombre $A = 210$ n'est pas pre-

premier, il est clair qu'on pourra encore trouver d'autres valeurs de α (art. 24). Pour cela on décomposera le nombre 210 en deux facteurs, a, & b premiers entr'eux; & comme $210 = 2.3.5.7$, on aura

$$\begin{array}{lccccccc} a = & 15, & 21, & 30, & 35, & 42, & 70, & 105 \\ b = & 14, & 10, & 7, & 6, & 5, & 3, & 2 \end{array}$$

de sorte qu'on pourra trouver encore 7 autres valeurs de α.

Soit 1°. $a = 15$, $b = 14$; on cherchera, suivant la méthode que nous avons déjà pratiquée ci-dessus, la fraction $\frac{a'}{b'}$ qui précédera immédiatement la fraction donnée $\frac{a}{b}$; & l'on trouvera $a' = 1$, $b' = 1$; & comme $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$, on aura $\omega = (1 - 2ab')\alpha = -29 \times 86$; donc $\beta = m\text{A} \pm \omega = 210m \pm 2494$; donc, faisant $m = 12$ & prenant le signe $-$, pour que la valeur de β soit $< \frac{210}{2}$, on aura $\beta = 26$.

Soit 2°. $a = 21$, $b = 10$, on trouvera $a' = 2$, $b' = 1$, & comme $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$, on aura $\omega = (1 - 2ab')\alpha = -41 \times 86 = -3526$; donc $\beta = 210m \pm 3526$, & faisant $m = 17$ & prenant le signe inférieur, $\beta = 44$.

Soit 3°. $a = 30$, $b = 7$, on trouvera $a' = 13$, $b' = 3$, donc, comme $\frac{13}{3} > \frac{30}{7}$, on aura $\omega = (1 + 2ab')\alpha = 181 \times 86 = 15566$; donc $\beta = 210m \pm 15566$; donc, faisant $m = -74$ & prenant le signe $+$, on aura $\beta = 26$; comme dans le 1^r^ cas.

Soit 4°. $a = 35$, $b = 6$, on trouvera $a' = 6$, $b' = 1$; donc, puisque $\frac{6}{1} > \frac{35}{6}$, on aura $\omega = (1 + 2ab')\alpha = 71 \times 86 = 6106$, donc $\beta = 210m \pm 6106$; donc, prenant $m = -29$ avec le signe supérieur, on aura $\beta = 16$.

Soit

Soit 5°. $a = 42$, $b = 5$, on trouvera $a' = 17$, $b' = 2$; donc, comme $\frac{17}{2} > \frac{42}{5}$, on aura $\omega = (1 + 2ab')\, a = 169 \times 86 = 14534$; donc $\beta = 210m \pm 14534$, & prenant $m = -69$ avec le signe supérieur, on aura $\beta = 44$, comme dans le 2[d] cas.

Soit 6°. $a = 70$, $b = 3$, on trouvera $a' = 21$, $b' = 1$; donc, à cause que $\frac{21}{1} < \frac{70}{3}$, $\omega = (1 - 2al')\, a = -139 \times 86 = -11954$, donc $\beta = 210m \pm 11954$, donc, prenant $m = 57$ avec le signe inférieur, on aura $\beta = 16$ comme dans le 4[eme] cas.

Soit 7°. $a = 105$, $b = 2$, on trouvera $a' = 52$, $b' = 1$; & comme $\frac{52}{1} < \frac{105}{2}$, on aura $\omega = (1 - 2ab')\, a = -209 \times 86 = -17974$; donc $\beta = 210m \pm 17974$, donc, faisant $m = 86$ & prenant le signe inférieur, on aura $\beta = 86$.

Ainsi les valeurs de β, c'est à dire, les nouvelles valeurs de α seront (en excluant 86, qui est la valeur de α dont nous avons déjà fait usage) 26, 44, & 16; & mettant ces valeurs dans l'équation $AA' = \alpha^2 - B$, savoir $210A' = \alpha^2 - 46$, on trouvera que les valeurs correspondantes de A' seront 3, 9 & 1.

Faisons en premier lieu $\alpha = 26$ & $A' = 3$, on aura les équations

$$210 \times 3 = (26)^2 - 46, \quad \alpha = 26 \qquad A' = 3$$

$$3 \times -14 = (2)^2 - 46, \quad \alpha' = -8A' + \alpha = 2, \quad A'' = -14,$$

$$\& \qquad p = p'' + 8p', \qquad q = q'' + 8q'.$$

Donc, comme $\alpha' < \sqrt{B}$, & $A' < B$, on fera $\alpha' = e = 2$, $A' = \pm E = 3$, $A'' = \mp D = -14$, & par conséquent en prenant les signes supérieurs $E = 3$, $D = 14$; ensuite on fera $p' = r$, $q' = s$, $p'' = \varrho$, $q'' = \sigma$, & l'on aura à résoudre l'équation

$$3 = r^2 - 46s^2.$$

Or l'on a (art. 43) $\lambda < \frac{\sqrt{B} + e}{E}$ & $> \frac{\sqrt{B} + e}{E} - 1$, donc $\lambda = 2$, & par conséquent $\epsilon = \lambda E - e = 4$.

Ayant

Ayant donc $E = 3$, & $\epsilon = 4$, on verra si dans les séries précédentes il se trouve deux termes comme E', ϵ', tels que $E' = 3$, $\epsilon' = 4$ (voyez plus bas la Remarque de l'art. 47); or on trouve précisément $E^{VI} = 3$, & $\epsilon^{VI} = 4$, de sorte que $\nu = 6$; ainsi il n'y aura qu'à diminuer dans ces séries tous les exposans de 6 à l'imitation de ce que nous avons déjà fait ci-dessus; de cette maniere on aura pour le cas présent $E = 3$, $E' = 10$, $E'' = 1$ etc. donc $m = 2$, & ensuite $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 12$ etc. donc

$$l = 1$$
$$l' = 1l = 1,$$

donc $R = \beta l' + l = 7$, & $S = l' = 1$;

& par conséquent

$$r = 7\xi + 46\psi, \qquad s = 7\psi + \xi.$$

Or $T = \dfrac{BS + eR}{E} = 20$, $V = \dfrac{R + eS}{E} = 3$;

donc

$$\varrho = 20\xi + 3 \times 46\psi, \qquad \sigma = 20\psi + 3\xi.$$

Donc, puisque $p' = r$, $q' = s$, $p'' = \varrho$, $q'' = \sigma$, on aura

$$p = \varrho + 8r = 76\xi + 11 \times 46\psi, \quad q = \sigma + 8s = 76\psi + 11\xi.$$

A l'égard de l'exposant n de ξ, & ψ, il pourra être un nombre quelconque entier positif, à cause que m est $= 2$, & que μ est toujours $= 16$, comme nous le démontrerons en général dans l'art. 47; de sorte que $\mu n + m$ sera toujours pair.

Soit maintenant e négatif & $= -2$, on aura $\lambda = 1$, & $\epsilon = 5$; or on trouve dans les séries précédentes $E^{X} = 3$, $\epsilon^{X} = 5$; donc, diminuant tous les exposans de 10, & recommençant les séries après les termes E^{XI}, ϵ^{XI} comme nous l'avons déjà dit plus haut, on aura dans le cas présent $E = 3$, $E' = 7$, $E'' = 6$ etc. $E^{X} = 1$, par conséquent $m = 10$; & $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 2$, $\lambda^{IV} = 6$, $\lambda^{V} = 2$, $\lambda^{VI} = 1$, $\lambda^{VII} = 1$, $\lambda^{VIII} = 3$, $\lambda^{IX} = 1$, $\lambda^{X} = 12$ etc. donc

$l =$

$$
\begin{aligned}
l &= 1\\
l' &= 1l = 1\\
l'' &= 1l' + l = 2\\
l''' &= 2l'' + l' = 5\\
l^{IV} &= 6l''' + l'' = 32\\
l^{V} &= 2l^{IV} + l''' = 69\\
l^{VI} &= 1l^{V} + l^{IV} = 101\\
l^{VII} &= 1l^{VI} + l^{V} = 170\\
l^{VIII} &= 3l^{VII} + l^{VI} = 611\\
l^{IX} &= 1l^{VIII} + l^{VII} = 781
\end{aligned}
$$

donc $R = \beta l^{IX} + l^{VIII} = 5297$, $S = l^{IX} = 781$, & de là

$$r = 5297\xi + 781 \times 46\psi, \quad s = 5297\psi + 781\xi.$$

Or, à cause de $e = -2$, on aura

$$T = \frac{BS + eR}{E} = 8444, \quad V = \frac{R + eS}{E} = 1245;$$

donc

$$\varrho = 8444\xi + 1245 \times 46\psi, \quad \sigma = 8444\psi + 1245\xi,$$

donc

$$p = \varrho - 8r = -33932\xi - 5003 \times 46\psi, \quad q = \sigma - 8s = -33932\psi - 5003\xi.$$

Quant à l'exposant n, il pourra être de même un nombre quelconque entier positif, à cause que m & μ sont pairs.

Faisons en second lieu $\alpha = 44$, $A' = 9$, on trouvera les équations

$$210 \times 9 = (44)^2 - 46, \quad \alpha = 44, \qquad A' = 9$$

$$9 \times -5 = 1 - 46, \quad \alpha' = 5A' - \alpha = 1, \quad A'' = -5$$

& par conséquent

$$-p = p'' - 5p', \quad -q = q'' - 5q'.$$

Donc

Donc, ayant $\alpha' < \sqrt{B}$, & $A'' < \sqrt{B}$, on fera $\alpha' = e = 1$, $A'' = \pm E = -5$, $A' = \mp D = 9$; & par conséquent $E = 5$, & $D = 9$ avec les signes inférieurs; ensuite de quoi on fera $p'' = r$, $q'' = s$, $p' = \varrho$, $q' = \sigma$, & la nouvelle équation à résoudre sera

$$-5 = r^2 - 46 s^2.$$

Or, puisqu'on a ici les signes inférieurs, on aura $\lambda < \frac{\sqrt{B} - e}{E}$ & $> \frac{\sqrt{B} - e}{E} - 1$; donc $\lambda = 1$; & par conséquent $\varepsilon = \lambda E + e = 6$.

En examinant les séries précédentes, on trouvera justement $E' = 5$, & $\varepsilon' = 6$; ainsi il n'y aura qu'à diminuer tous les exposans de 1, & l'on aura dans le cas présent $E = 5$, $E' = 2$, $E'' = 5$ etc. $E^{VII} = 1$; donc $m = 7$; & ensuite $\lambda' = 6$, $\lambda'' = 2$, $\lambda''' = 1$, $\lambda^{IV} = 1$, $\lambda^{V} = 3$, $\lambda^{VI} = 1$ etc., donc

$$l = 1$$
$$l' = 6l = 6$$
$$l'' = 2l' + l = 13$$
$$l''' = 1l'' + l' = 19$$
$$l^{IV} = 1l''' + l'' = 32$$
$$l^{V} = 3l^{IV} + l''' = 115$$
$$l^{VI} = 1l^{V} + l^{IV} = 147$$

donc $R = \beta l^{VI} + l^{V} = 997$, $S = l^{VI} = 147$; & de là

$$r = 997\xi + 147 \times 46\psi, \quad s = 997\psi + 147\xi.$$

Or, ayant pris les signes inférieurs, on aura

$$T = \frac{BS - eR}{E} = 953, \quad V = \frac{R - eS}{E} = 170;$$

donc

$$\varrho = 953\xi + 170 \times 46\psi, \quad \sigma = 953\psi + 170\xi.$$

Donc

Donc, comme $p'' = r$, $q'' = s$, $p' = \varrho$, $q' = \sigma$, on aura

$$p = -r + 5\varrho = 4768\xi + 703 \times 46\psi, \quad q = -s + 5\sigma = 4768\psi + 703\xi.$$

Quant à l'exposant n des quantités ξ, & ψ, il faudra que $\mu n + m$ soit impair, à cause que l'on a pris les signes inférieurs (art. 37); or μ est toujours $= 16$, comme on peut s'en assurer en continuant la série E, E' etc. jusqu'à ce que l'on retrouve les deux premiers termes (voyez aussi plus bas l'art. 47), & m est $= 7$; d'où l'on voit que, quelque valeur entiere qu'on donne à n, $\mu n + m$ sera toujours impair; ainsi n pourra être un nombre quelconque entier positif.

Prenons à présent e négatif, savoir $e = -1$, on aura $\lambda = 1$, & $\varepsilon = 4$. Or dans les séries précédentes on trouve $E''' = 5$, & $\varepsilon''' = 4$, donc diminuant tous les exposans de 3, on aura pour le cas présent $E = 5$, $E' = 6$, $E'' = 7$ etc. $E^V = 1$; donc $m = 5$, & ensuite $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 3$, $\lambda^{IV} = 1$, $\lambda^V = 12$ etc. d'où

$$l = 1$$
$$l' = 1l = 1$$
$$l'' = 1l' + l = 2$$
$$l''' = 3l'' + l' = 7$$
$$l^{IV} = 1l''' + l'' = 9.$$

Donc $R = \beta l^{IV} + l''' = 61$, $S = l^{IV} = 9$, & de là

$$r = 61\xi + 9 \times 46\psi, \quad s = 61\psi + 9\xi.$$

$$\text{Or}\quad T = \frac{BS - eR}{E} = 95, \quad \& \quad V = \frac{R - eS}{E} = 14,$$

donc $\varrho = 95\xi + 14 \times 46\psi$, $\sigma = 95\psi + 14\xi$, donc

$$p = -r - 5\varrho = -536\xi - 79 \times 46\psi, \quad q = -s - 5\sigma = -536\psi - 79\xi.$$

Ici l'exposant n pourra être aussi un nombre quelconque entier positif, à cause que $m = 5$, & que $\mu = 16$, ce qui rendra toujours $n\mu + m$ impair.

Soit

Soit enfin $\alpha = 16$, & $A' = 1$, on aura

$$210 \times 1 = (16)^2 - 46, \quad \alpha = 16, \quad A' = 1$$

$$1 \times -45 = 1 - 46, \quad \alpha' = -15 A' + \alpha = 1, \quad A'' = -45.$$

& $\quad p = p'' + 15 p', \quad q = q'' + 15 q'.$

Donc, comme α' & $A' < \sqrt{B}$, on fera $\alpha' = e = 1$, $A' = \pm E = 1$, $A'' = \mp D = -45$, donc $E = 1$, $D = 45$, avec les signes supérieurs; ensuite on fera $p' = r$, $q' = s$, $p'' = \varrho$, $q'' = \sigma$, & l'on aura à résoudre l'équation

$$1 = r^2 - 46 s^2.$$

Or, ayant $E = 1$, on aura d'abord $m = 0$, donc (art. 40) $R = 1$, $S = 0$; & de là $r = \xi$, $s = \psi$.

De plus on aura $T = \frac{BS + eR}{E} = 1$, & $V = \frac{R + eS}{E} = 1$;

donc $\quad \varrho = \xi + 46\psi, \quad \sigma = \psi + \xi.$

Donc

$$p = \varrho + 15 r = 16\xi + 46\psi, \quad q = \sigma + 15 s = 16\psi + \xi.$$

Faisant ensuite e négatif & $= -1$, on aura toujours $m = 0$, & par conséquent $R = 1$, $S = 0$, & $r = \xi$, $s = \psi$; mais on trouvera $T = -1$ & $V = 1$; de sorte qu'on aura $\varrho = -\xi + 46\psi$, $\sigma = -\psi + \xi$, & ensuite

$$p = \varrho - 15 r = -16\xi + 46\psi, \quad q = \sigma - 15 s = -16\psi + \xi.$$

Quant à l'exposant n, il pourra être de même un nombre quelconque entier positif à cause de $m = 0$, & de $\mu = 16$, ce qui rendra toujours $n\mu$ pair.

Rassemblant toutes les formules que nous venons de trouver, on aura pour la solution de l'équation proposée

$$210 = p^2 - 46 q^2$$

les expressions suivantes

$p =$

$p = 16\xi - 46\psi, \qquad q = 16\psi - \xi$

$p = 16\xi + 46\psi, \qquad q = 16\psi + \xi$

$p = 76\xi + 11 \times 46\psi, \qquad q = 76\psi + 11\xi$

$p = 292\xi + 43 \times 46\psi, \qquad q = 292\psi + 43\xi$

$p = 536\xi + 79 \times 46\psi, \qquad q = 536\psi + 79\xi$

$p = 4768\xi + 703 \times 46\psi, \qquad q = 4768\psi + 703\xi$

$p = 8756\xi + 1291 \times 46\psi, \qquad q = 8756\psi + 1291\xi$

$p = 33932\xi + 5003 \times 46\psi, \qquad q = 33932\psi + 5003\xi.$

où

$$\xi = \frac{(24335 + 3588\sqrt{46})^n + (24335 - 3588\sqrt{46})^n}{2}$$

$$\psi = \frac{(24335 + 3588\sqrt{46})^n - (24335 - 3588\sqrt{46})^n}{2\sqrt{46}}$$

n étant un nombre quelconque entier positif.

Et ces formules renfermeront néceſſairement toutes les ſolutions poſſibles de l'équation dont il s'agit.

Si on fait $n = 0$, on aura $\xi = 1$ & $\psi = 0$; & les valeurs de p, & q deviendront

$p = 16, \qquad q = 1$

$p = 76, \qquad q = 11$

$p = 292, \qquad q = 43$

$p = 536, \qquad q = 79$

$p = 4768, \qquad q = 703$

$p = 8756, \qquad q = 1291$

$p = 33932, \qquad q = 5003$

qui ſont les plus petites qui puiſſent avoir lieu; enſuite, faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3$ etc. on trouvera des valeurs de p & q toujours plus grandes.

Exem-

Exemple 6. Soit encore proposée l'équation

$$10 = u^2 - 431\, t^2.$$

Puisque 10 ne contient aucun facteur carré, & qu'il est en même tems $< \sqrt{431}$, on fera d'abord $u = r$, $t = s$, $E = 10$ & $B = 31$, & l'on aura une équation de l'espece de celle de l'art. 34.

Suivant la méthode de cet article, on cherchera premierement un ou plusieurs nombres $\varepsilon < \sqrt{B}$, & $> \sqrt{B} - E$, tels que $B - \varepsilon^2$ soit divisible par E; donc, puisque $\sqrt{431}$ est à peu près $= 20$, il est clair par les deux premieres conditions que ε devra être < 21, & > 10; ainsi, en essayant pour ε tous les nombres naturels depuis 10 jusqu'à 20 inclusivement, on n'en trouvera que deux qui satisfassent à la troisieme condition, lesquels sont 11 & 19; de sorte qu'il faudra faire successivement $\varepsilon = 11$, & $\varepsilon = 19$.

Soit 1°. $\varepsilon = 11$, on formera les séries suivantes

$$E = 10 \qquad \varepsilon = 11$$

$$E' = \frac{431 - 11^2}{10} = 31,\quad \lambda' < \frac{\sqrt{431} + 11}{31} = 1,\quad \varepsilon' = 1.31 - 11 = 20$$

$$E'' = \frac{431 - 20^2}{31} = 1,\quad \lambda'' < \frac{\sqrt{431} + 20}{1} = 40,\quad \varepsilon'' = 40.1 - 20 = 20$$

$$E''' = \frac{431 - 20^2}{1} = 31,\quad \lambda''' < \frac{\sqrt{431} + 20}{40} = 1,\quad \varepsilon''' = 1.31 - 20 = 11$$

$$E^{IV} = \frac{431 - 11^2}{31} = 10,\quad \lambda^{IV} < \frac{\sqrt{431} + 11}{10} = 3,\quad \varepsilon^{IV} = 3.10 - 11 = 19$$

$$E^{V} = \frac{431 - 19^2}{10} = 7,\quad \lambda^{V} < \frac{\sqrt{431} + 19}{7} = 5,\quad \varepsilon^{V} = 5.7 - 19 = 16$$

$$E^{VI} = \frac{431 - 16^2}{7} = 25,\quad \lambda^{VI} < \frac{\sqrt{431} + 16}{25} = 1,\quad \varepsilon^{VI} = 1.25 - 16 = 9$$

E^{VII}

$$E^{VII} = \frac{431 - 9^2}{25} = 14,\quad \lambda^{VII} < \frac{\sqrt{431} + 9}{14} = 2,\quad \varepsilon^{VII} = 2.14 - 9 = 19$$

$$E^{VIII} = \frac{431 - 19^2}{14} = 5,\quad \lambda^{VIII} < \frac{\sqrt{431} + 19}{5} = 7,\quad \varepsilon^{VIII} = 7.5 - 19 = 16$$

$$E^{IX} = \frac{431 - 16^2}{5} = 35,\quad \lambda^{IX} < \frac{\sqrt{431} + 16}{35} = 1,\quad \varepsilon^{IX} = 1.35 - 16 = 19$$

$$E^{X} = \frac{431 - 19^2}{35} = 2,\quad \lambda^{X} < \frac{\sqrt{431} + 19}{2} = 19,\quad \varepsilon^{X} = 19.2 - 19 = 19$$

$$E^{XI} = \frac{431 - 19^2}{2} = 35,\quad \lambda^{XI} < \frac{\sqrt{431} + 19}{35} = 1,\quad \varepsilon^{XI} = 1.35 - 19 = 16$$

$$E^{XII} = \frac{431 - 16^2}{35} = 5,\quad \lambda^{XII} < \frac{\sqrt{431} + 16}{5} = 7,\quad \varepsilon^{XII} = 7.5 - 16 = 19$$

$$E^{XIII} = \frac{431 - 19^2}{5} = 14,\quad \lambda^{XIII} < \frac{\sqrt{431} + 19}{14} = 1,\quad \varepsilon^{XIII} = 2.14 - 19 = 9$$

$$E^{XIV} = \frac{431 - 9^2}{14} = 25,\quad \lambda^{XIV} < \frac{\sqrt{431} + 9}{25} = 1,\quad \varepsilon^{XIV} = 1.25 - 9 = 16$$

$$E^{XV} = \frac{431 - 16^2}{25} = 7,\quad \lambda^{XV} < \frac{\sqrt{431} + 16}{7} = 5,\quad \varepsilon^{XV} = 5.7 - 16 = 19$$

$$E^{XVI} = \frac{431 - 19^2}{7} = 10,\quad \lambda^{XVI} < \frac{\sqrt{431} + 19}{10} = 3,\quad \varepsilon^{XVI} = 3.10 - 19 = 11$$

$$E^{XVII} = \frac{431 - 11^2}{10} = 31,\quad \lambda^{XVII} < \frac{\sqrt{431} + 11}{31} = 1,\quad \varepsilon^{XVII} = 1.31 - 11 = 20$$

etc. etc. etc.

Donc, puisque $E^{XVI} = E$, $E^{XVII} = E'$, on aura $E^{XVI} = E^{\mu}$, c'est à dire $\mu = 16$; & comme $E'' = 1$, on aura $E'' = E^{m}$, & par conséquent $m = 2$; de sorte que l'équation est résoluble (art. 37).

Ainsi

Ainſi on formera, ſuivant les formules (π), la ſérie l, l', l'', l''' etc. juſqu'au terme l^{XVI}, & l'on trouvera

$$l = 1$$
$$l' = 1\,l = 1$$
$$l'' = 40\,l' + l = 41$$
$$l''' = 1\,l'' + l' = 42$$
$$l^{IV} = 3\,l''' + l'' = 167$$
$$l^{V} = 5\,l^{IV} + l''' = 877$$
$$l^{VI} = 1\,l^{V} + l^{IV} = 1044$$
$$l^{VII} = 2\,l^{VI} + l^{V} = 2965$$
$$l^{VIII} = 7\,l^{VII} + l^{VI} = 21799$$
$$l^{IX} = 1\,l^{VIII} + l^{VII} = 24764$$
$$l^{X} = 19\,l^{IX} + l^{VIII} = 492315$$
$$l^{XI} = 1\,l^{X} + l^{IX} = 517079$$
$$l^{XII} = 7\,l^{XI} + l^{X} = 4111868$$
$$l^{XIII} = 2\,l^{XII} + l^{XI} = 8740815$$
$$l^{XIV} = 1\,l^{XIII} + l^{XII} = 12852683$$
$$l^{XV} = 5\,l^{XIV} + l^{XIII} = 73004230$$
$$l^{XVI} = 3\,l^{XV} + l^{XIV} = 231865373.$$

Donc 1°. on aura, par l'art. 40, $R = \beta l' + l$, & $S = l'$, c'eſt à dire, à cauſe de $\beta = 20$ racine approchée de 431, $R = 21$, $S = 1$.

2°. on aura par l'art. 41, $X = l^{XVI} - \frac{e\,l^{XV}}{E}$, & $Y = \frac{l^{XV}}{E}$, ſavoir, à cauſe de $E = 10$, & $e = 11$,

$$X = 151560720, \qquad Y = 7300423.$$

Donc

Donc, faisant

$$\xi = \frac{(X + Y\sqrt{431})^n + (X - Y\sqrt{431})^n}{2}$$

$$\psi = \frac{(X + Y\sqrt{431})^n - (X - Y\sqrt{431})^n}{2\sqrt{431}}$$

on aura en général (art. 38)

$$r = 21\xi + 431\psi, \quad s = 21\psi + \xi,$$

n étant un nombre quelconque positif entier, tel que $n\mu + m$, savoir $16n + 2$, soit pair, de sorte que n pourra être un nombre positif entier quelconque.

Soit 2°. $\varepsilon = 19$, on formera de même les séries

$E = 10 \qquad\qquad\qquad\qquad \varepsilon = 19$

$E' = \frac{431 - 19^2}{10} = 7,\ \lambda' < \frac{\sqrt{431} + 19}{7} = 5,\quad \varepsilon' = 5.7 - 19 = 16$

$E'' = \frac{431 - 16^2}{7} = 25,\ \lambda'' < \frac{\sqrt{431} + 16}{25} = 1,\quad \varepsilon'' = 1.25 - 16 = 19$

etc. etc. etc.

Or, comme les termes E, & E' sont les mêmes que les termes E^{IV}, & E^{V} des séries précédentes, il est clair que tous les termes suivans seront les mêmes aussi (art. 35), de sorte que, pour avoir les valeurs de E, E', E'' etc. ε, ε', ε'' etc. & λ', λ'', λ''' etc. dans le cas de $\varepsilon = 19$, il n'y aura qu'à prendre celles que nous avons trouvées ci-dessus en diminuant tous les exposans de 4, afin que le terme E^{IV} devienne E; mais, comme les deux premiers termes E, & E' sont ici 10, & 7, il faudra continuer les séries précédentes jusqu'à ce que l'on retrouve les mêmes termes. Or pour cela il suffit de remarquer que, puisque les deux derniers termes E^{XVI}, & E^{XVII} sont les mêmes que les deux premiers E, E', le terme E^{XVIII}, sera le même que le terme E'', & ainsi des autres; de là il est aisé de voir qu'en prenant E^{IV} pour E, E^{V} pour E' etc. on aura

ra $E^{XIV} = 1$, $E^{XVI} = 10$, $E^{XVII} = 7$, par conſéquent $m = 14$, & $\mu = 16$; & que les valeurs de λ', λ'' etc. juſqu'à λ^{XIII} ſeront $\lambda' = 5$, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 2$, $\lambda^{IV} = 7$, $\lambda^{V} = 1$, $\lambda^{VI} = 19$, $\lambda^{VII} = 1$, $\lambda^{VIII} = 7$, $\lambda^{IX} = 2$, $\lambda^{X} = 1$, $\lambda^{XI} = 5$, $\lambda^{XII} = 3$, $\lambda^{XIII} = 1$, à l'aide deſquelles ſi on forme la nouvelle ſérie l, l', l'' etc. l^{XIII};

$$
\begin{aligned}
l &= 1 \\
l' &= 5l = 5 \\
l'' &= 1l' + l = 6 \\
l''' &= 2l'' + l' = 17 \\
l^{IV} &= 7l''' + l'' = 125 \\
l^{V} &= 1l^{IV} + l''' = 142 \\
l^{VI} &= 19l^{V} + l^{IV} = 2823 \\
l^{VII} &= 1l^{VI} + l^{V} = 2965 \\
l^{VIII} &= 7l^{VII} + l^{VI} = 23578 \\
l^{IX} &= 2l^{VIII} + l^{VII} = 50121 \\
l^{X} &= 1l^{IX} + l^{VIII} = 73699 \\
l^{XI} &= 5l^{X} + l^{IX} = 418616 \\
l^{XII} &= 3l^{XI} + l^{X} = 1329547 \\
l^{XIII} &= 1l^{XII} + l^{XI} = 1748163;
\end{aligned}
$$

on aura $R = \beta l^{XIII} + l^{XII}$, & $S = l^{XIII}$, & par conſéquent, β étant $= 20$,

$$R = 36292807, \qquad S = 1748163, \qquad \text{d'où}$$

$$r = 36292807\,\xi + 753458253\,\psi,$$

$$s = 36292807\,\psi + 1748163\,\xi.$$

A l'égard des valeurs de ξ, & ψ, elles ſeront les mêmes que ci-deſſus; car X & Y ſont toujours les mêmes pour une même valeur de B (art. 41), & quant au nombre n, il pourra être de même un nombre quelconque entier poſitif, parce qu'à cauſe de $\mu = 16$, & $m = 14$, $\mu n + m$ ſera toujours pair comme il le faut (art. 37).

On

On voit par là que les plus petits nombres qui résolvent l'équation proposée sont $r = 21$, & $s = 1$, qui résultent de la premiere formule en y faisant $n = 0$, ce qui donne $\xi = 1$, & $\psi = 0$; ensuite, en faisant de même $n = 0$ dans la seconde formule, on aura les nombres immédiatement plus grands qui peuvent résoudre la même équation, & qui sont $r = 36292807$, $s = 1748163$; & on peut être assuré qu'entre ces nombres-ci & ceux-là, il n'y en a pas d'autres qui puissent satisfaire à l'équation dont il s'agit.

Au reste, puisqu'on a trouvé μ, & m, pairs à la fois, il s'ensuit que cette équation

$$-10 = r^2 - 431 s^2$$

n'est point résoluble en nombres entiers (art. 37).

REMARQUE.

47. Quand on a une fois trouvé, pour une équation quelconque $\pm E = r^2 - Bs^2$, les valeurs de E', E'', E''' etc. jusqu'à E^{μ} (E^{μ} étant $= E$, & $E^{\mu+1} = E'$), ainsi que celles de λ', λ'', λ''' etc. λ^{μ}, & que dans la période E, E', E'' etc. $E^{\mu-1}$ il se trouve un terme égal à l'unité, ce qui est nécessaire pour que l'équation $\pm E = r^2 - Bs^2$ soit résoluble, alors les mêmes valeurs peuvent servir pour résoudre aussi toute autre équation comme $\pm F = r^2 - Bs^2$, F étant $< \sqrt{B}$. Car nous avons déjà démontré (art. 41) que les valeurs de X & de Y sont toujours les mêmes pour une même valeur de B, & nous y avons vu que la série E^m, E^{m+1}, E^{m+2} etc. $E^{m+\mu-1}$, (E^m étant $= 1$) est toujours aussi nécessairement la même, pour le même valeur de B; d'où il s'ensuit, à cause de $E^{\mu} = E$, $E^{\mu+1} = E'$ etc. que la série E^m, E^{m+1} etc. $E^{\mu-1}$, E, E' etc. E^{m-1} sera aussi toujours la même, & que par conséquent la série E, E', E'' etc. $E^{\mu-1}$ contiendra toujours nécessairement les mêmes termes, quel que soit le premier terme E; pourvu qu'il s'y trouve un terme comme E^m égal à l'unité.

Ainsi, étant proposée l'équation $\pm F = r^2 - Bs^2$, on verra si le nombre F se trouve parmi les valeurs de E, E', E'' etc. $E^{\mu-1}$; si

l'on trouve, par exemple, $F = E^{\varrho}$, alors il n'y aura qu'à prendre ce terme E^{ϱ} le premier, & continuer la suite E^{ϱ}, $E^{\varrho+1}$ etc. jusqu'à ce que l'on retrouve deux termes consécutifs identiques avec E^{ϱ}, & $E^{\varrho+1}$, en recommençant toujours la série E, E', E'' etc. quand on sera parvenu au dernier terme $E^{\mu-1}$; ou bien, pour que le premier terme soit toujours désigné par E, il n'y aura qu'à diminuer, dans la série déjà trouvée E, E', E'' etc. $E^{\mu-1}$, tous les exposans du nombre ϱ, en les augmentant de μ lorsqu'ils deviendront négatifs.

On en fera de même à l'égard de la série correspondante λ', λ'', λ''' etc. λ^{μ}, & l'on aura par ce moyen les nouvelles séries E, E', E'' etc. $E^{\mu-1}$, & λ', λ'', λ''' etc. λ^{μ} relatives à l'équation $\pm F = r^2 - Bs^2$, & à l'aide desquelles on cherchera seulement les nombres R & S puisqu'on connoit déjà les nombres X, & Y; il faudra cependant, pour que le probleme soit soluble, que les nouveaux exposans m & μ aient les conditions requises (art. 37); c'est ce qu'il faudra d'abord examiner pour ne pas faire des calculs inutiles: quant à μ, il aura toujours la même valeur, parce que chaque période de la série contenant toujours nécessairement les mêmes termes, il faudra aussi que le nombre μ de ces termes soit toujours le même; ainsi il ne s'agira que d'avoir m; or, si on appelle m' l'exposant du terme qui étoit égal à l'unité dans la premiere série, il est clair qu'on aura $m = m' - \varrho$ si $m' > \varrho$, ou $m = \mu + m' - \varrho$ si $m' < \varrho$; de cette maniere on connoitra sur le champ si la nouvelle équation est résoluble ou non.

Si au contraire le nombre F ne se trouve point dans la série E, E', E'' etc. $E^{\mu-1}$, alors ce sera une marque sure que l'équation $\pm F = r^2 - Bs^2$ n'est point résoluble; car, si on formoit d'après le nombre F la série F, F', F'' etc. analogue à la série E, E', E'' etc. on n'y trouveroit point de terme égal à l'unité.

Il s'ensuit aussi de ce que nous venons de dire que, lorsqu'on a calculé la série E, E', E'' etc. $E^{\mu-1}$ d'après une valeur de ε, alors on peut se dispenser de chercher d'autres valeurs de ε (art. 34), & il n'y aura qu'à voir si dans cette série il y a d'autres termes égaux à E, & former ensuite de nouvelles séries dont ces termes soient les premiers; comme nous

nous venons de l'expliquer; par exemple si $E^{\varrho} = E$, ϱ étant $< \mu - 1$, on diminuera tous les exposans de ϱ, en ajoutant μ lorsque les restes deviendront négatifs; & l'on aura les nouvelles séries E', E'', E''' etc. λ', λ'', λ''' etc. à l'aide desquelles on trouvera de nouvelles valeurs de R & S; c'est ainsi que nous en avons déjà usé dans l'exemple 5.

Ayant résolu plus haut l'équation $10 = r^2 - 431 s^2$, supposons maintenant qu'il s'agisse de résoudre encore l'équation

$$2 = r^2 - 431 s^2.$$

Je trouve, en examinant les valeurs des termes E, E', E'' etc. E^{XVI} trouvées ci-dessus, que $E^X = 2$; or, comme on avoit $m = 2$, & $\mu = 16$, la nouvelle valeur de m sera (à cause de $\varrho = 2$ & $m' = 2$) $16 + 2 - 10 = 8$, d'où je conclus que l'équation dont il s'agit est résoluble (art. 37).

Je diminuerai donc tous les exposans de 10, en y ajoutant 16 lorsqu'il viendra des restes négatifs, & j'aurai les valeurs suivantes de λ', λ'', λ''' etc. jusqu'à λ^{VII} c'est à dire λ^{m-1}, qui sont les seules dont nous ayons besoin pour trouver R & S,

$\lambda' = 1$,	d'où	$l' = 1$
$\lambda'' = 7$,		$l'' = 8$
$\lambda''' = 2$,		$l''' = 17$
$\lambda^{IV} = 1$,		$l^{IV} = 25$
$\lambda^{V} = 5$,		$l^{V} = 142$
$\lambda^{VI} = 3$,		$l^{VI} = 451$
$\lambda^{VII} = 1$,		$l^{VII} = 593$.

Ainsi, à cause de $\beta = 20$, on trouvera

$$R = \beta l^{VII} + l^{VI} = 1231, \qquad S = l^{VII} = 593.$$

De sorte qu'on aura ici

$$r = 1231\xi + 255583\psi, \qquad s = 1231\psi + 593\xi$$

les valeurs de ξ, & ψ étant exprimées comme dans l'exemple 6.

De

De même, si j'avois à résoudre l'équation $2 = r^2 - 30s^2$, je verrois si le nombre 2 se trouve dans la série E, E' etc. de l'exemple 4; & comme il ne s'y trouve point, j'en conclus sur le champ qu'une telle équation n'est point résoluble en nombres entiers.

En effet, si on fait $E = 2$, & qu'on cherche les termes suivans E', E'' etc., par la méthode générale, il faudra d'abord trouver un nombre $\varepsilon < \sqrt{30}$, & $> \sqrt{30} - 2$, & qui soit tel que $30 - \varepsilon^2$ soit divisible par 2; d'où l'on voit qu'on ne peut prendre que $\varepsilon = 4$. Soit donc

$$E = 2 \qquad \varepsilon = 4$$

$$E' = \frac{30-16}{2} = 7, \quad \lambda' < \frac{\sqrt{30}+2}{7} = 1, \quad \varepsilon' = 7 - 4 = 3$$

$$E'' = \frac{30-9}{7} = 3, \quad \lambda'' < \frac{\sqrt{30}+3}{3} = 2, \quad \varepsilon'' = 6 - 3 = 3$$

$$E''' = \frac{30-9}{3} = 7, \quad \lambda''' < \frac{\sqrt{30}+3}{7} = 1, \quad \varepsilon''' = 7 - 3 = 4$$

$$E^{IV} = \frac{30-16}{7} = 2, \quad \lambda^{IV} < \frac{\sqrt{30}+4}{2} = 4, \quad \varepsilon^{IV} = 8 - 4 = 4$$

$$E^{V} = \frac{30-16}{2} = 7$$

où l'on voit que dans la série E, E' etc. il n'y a aucun terme égal à l'unité.

Application à l'équation

$$\pm 1 = r^2 - Bs^2,$$

B *étant un nombre positif non carré.*

48. Comme 1 est $< \sqrt{B}$, cette équation sera toujours dans le cas de celle de l'art. 34, en faisant $E = 1$.

On commencera donc par chercher un nombre entier positif $\varepsilon < \sqrt{B}$, & $> \sqrt{B} - 1$ tel que $B - \varepsilon^2$ soit divisible par 1; d'où l'on

l'on voit que ϵ ne pourra être que le nombre entier qui est immédiatement moindre que $\sqrt{B}$, & que nous avons déjà désigné en général par β (art. 40); de sorte qu'on aura nécessairement $\epsilon = \beta$.

Connoissant ainsi ϵ & E, on formera les séries E, E', E'' etc. ϵ', ϵ'' etc. & λ', λ'' etc. à l'aide des formules (κ), (λ), & (μ); & on poussera ces séries jusqu'à ce que l'on trouve deux termes consécutifs comme E^{μ}, $E^{\mu+1}$, identiques avec les deux premiers E, E', ce qui arrivera toujours nécessairement, comme nous l'avons démontré en général dans l'art. 35; alors il n'y aura plus qu'à chercher les valeurs de X & Y par les formules de l'art. 41, & comme l'on a $E = 1$, & par conséquent $E^m = E$ (art. 37), savoir $m = 0$, on remarquera que la série Λ', Λ'', Λ''' etc. sera la même que la série λ', λ'', λ''' etc. & que par conséquent la série L, L', L'' etc. sera aussi la même que la série l, l', l'' etc. de l'art. 39; de sorte qu'ayant formé cette derniere série par les formules (π), on aura sur le champ

$$Y = \beta l^{\mu-1} + l^{\mu-2}, \qquad Y = l^{\mu-1}.$$

Or, puisque $m = 0$, on aura (art. 40) $R = 1$, & $S = 0$, & de là $r = \xi$, & $s = \psi$; donc on aura en général (art. 38)

$$r = \frac{(X + Y\sqrt{B})^n + (X - Y\sqrt{B})^n}{2}$$

$$s = \frac{(X + Y\sqrt{B})^n - (X - Y\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}$$

n étant un nombre entier positif tel que $n\mu$ soit pair, ou impair, suivant que l'équation sera $1 = r^2 - Bs^2$, ou $-1 = r^2 - Bs^2$ (art. 37).

Donc 1°. si l'équation est $1 = r^2 - Bs^2$, $n\mu$ devra être pair; donc, si μ est pair, on pourra prendre pour n un nombre quelconque entier positif; si μ est impair, il ne faudra prendre pour n que des nombres pairs; ainsi toute équation de la forme $1 = r^2 - Bs^2$ est toujours résoluble en nombres entiers.

2°. Si l'équation est $-1 = r^2 - Bs^2$, il faudra que $n\mu$ soit impair, ce qui ne sauroit être à moins que μ ne soit aussi impair, d'où il

il s'enſuit que, ſi l'expoſant, ou le quantieme μ eſt un nombre pair, alors l'équation $-1 = p^2 - Bq^2$ n'eſt jamais réſoluble en nombres entiers; au contraire, ſi l'expoſant μ eſt impair, alors l'équation peut ſe réſoudre par les formules précédentes, en ne prenant pour n que des nombres impairs.

49. J'avois déjà donné ailleurs, (voyez le 4 Tome des Mémoires de la Société de Turin,) une démonſtration de cette propoſition, que toute équation de la forme $1 = p^2 - Bq^2$, B étant poſitif non carré, eſt toujours réſoluble en nombres entiers d'une infinité de manieres; & j'y avois auſſi joint une méthode générale pour trouver en même tems toutes les ſolutions dont une telle équation peut être ſuſceptible: celle que je viens de donner eſt non ſeulement plus directe & plus ſimple, mais elle a encore l'avantage de faire voir que l'équation dont il s'agit eſt toujours réſoluble quel que ſoit B, ce que je n'avois pu démontrer alors que par un aſſés long circuit.

Au reſte, il eſt clair que les ſéries E, E', E'' etc. $E^{\mu+1}$, & λ', λ'', λ''' etc. λ^{μ}, qui réſultent de la ſuppoſition de $E = 1$, ſerviront pour réſoudre abſolument toutes les équations de la forme $\pm E = r^2 - Bs^2$, quelle que ſoit la valeur de E, pourvu qu'elle ſoit $< \sqrt{B}$, par la Remarque de l'art. 47, parce que dans ce cas l'unité ſe trouve néceſſairement parmi les termes de la période E, E', E'' etc.

§. IV.

Méthode générale pour reconnoitre quand un nombre quelconque donné A *peut être un diviſeur d'un nombre de la forme* $a^2 - B$, B *étant auſſi donné, & pour trouver la valeur de a dans un très grand nombre de cas.*

50. Les méthodes que nous venons de donner dans les §. II & III, demandent toujours qu'on trouve un nombre a moindre que $\frac{A}{2}$ & tel que $a^2 - B$ ſoit diviſible par A; pour y parvenir nous avons pro-

proposé d'essayer successivement pour α tous les nombres naturels moindres que $\frac{A}{2}$, ce qui est très facile ; mais, comme cette opération seroit souvent très longue, surtout lorsqu'il n'existe point de pareil nombre α, auquel cas il faudroit essayer successivement tous les nombres moindres que $\frac{A}{2}$, pour pouvoir s'assurer qu'aucun d'eux ne puisse être pris pour α ; j'ai cru qu'il ne seroit pas inutile de donner ici quelques regles générales pour reconnoître *a priori*, si un nombre quelconque donné A peut être un diviseur de $\alpha^2 - B$; nous y joindrons d'ailleurs une méthode pour trouver la valeur de α dans un très grand nombre de cas.

51. Il est d'abord évident que, si A n'est pas un nombre premier, il faut que $\alpha^2 - B$ soit divisible par chacun des facteurs premiers de A en particulier. Voyons donc à quel caractere on peut connoitre si un nombre premier donné a peut être un diviseur d'un nombre de cette forme $\alpha^2 - B$, B étant un nombre donné positif ou négatif.

Si a est un diviseur de B, il est visible qu'il peut l'être aussi de $\alpha^2 - B$, puisqu'il ne s'agit que de prendre pour α un multiple de a. De plus, si a est $= 2$, & que B soit impair, il est clair aussi que $\alpha^2 - B$ peut toujours être divisible par a ; car il n'y aura qu'à prendre pour α un nombre quelconque impair.

Ainsi la difficulté se réduit au cas où a est un nombre premier qui ne soit pas un diviseur de B, & qui soit en même tems différent de 2.

Or je dis que, dans ce cas, $\alpha^2 - B$ ne peut être divisible par a à moins que $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ ne le soit aussi.

Pour démontrer ce théoreme, je fais $\frac{a-1}{2} = m$, & je multiplie $\alpha^2 - B$ par la quantité suivante

$$\alpha^{2(m-1)} + \alpha^{2(m-2)}B + \alpha^{2(m-3)}B^2 + \text{etc.} + B^{m-1}$$

 que

que je nommerai P; j'aurai

$$(\alpha^2 - B)P = \alpha^{2m} - B^m = \alpha^{a-1} - B^m = \alpha^{a-1} - 1 - (B^m - 1).$$

Or, puisque B n'est pas divisible par a (hyp.), il est clair que, pour que $\alpha^2 - B$ soit divisible par a, α ne doit pas l'être; de plus, a est un nombre premier (hyp.), donc par le théoreme connu de Fermat (voyez la page 163 de ses Oeuvres Mathématiques), que M. Euler a démontré dans les Commentaires de Petersbourg, le nombre $\alpha^{a-1} - 1$ sera toujours divisible par a; donc, si $\alpha^2 - B$ est divisible par a, il faudra nécessairement que $B^m - 1$, ou bien $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ le soit aussi.

Il en sera de même si $u^2 - Bt^2$ doit être divisible par a, en supposant u, & t premiers à a; car, mettant Bt^2 à la place de B, on aura d'abord $B^{\frac{a-1}{2}} . t^{a-1} - 1$ divisible par a; mais $t^{a-1} - 1$ est toujours divisible par a; donc il faudra que $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ le soit aussi.

52. Je dis maintenant que, si a est tel que $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ soit divisible par a, on pourra toujours trouver un nombre α tel que $\alpha^2 - B$ soit aussi divisible par a.

En effet, l'équation

$(\alpha^a - B)P = \alpha^{a-1} - 1 - (B^m - 1)$ de l'art. préc. fait voir que, si $B^m - 1$ est divisible par a, $(\alpha^2 - B)P$ le sera aussi, à cause que $\alpha^{a-1} - 1$ est toujours divisible par a; donc, puisque a est un nombre premier, il faut que l'un ou l'autre des deux facteurs $\alpha^2 - B$, & P soit divisible par a; par conséquent, si on peut trouver une valeur de α telle que P ne soit pas divisible par q, cette valeur rendra nécessairement $\alpha^2 - B$ divisible par ce même nombre a.

Or, en mettant $\frac{a-1}{2}$ à la place de m, on a

$$P = \alpha^{a-3} + B\alpha^{a-5} + B^2\alpha^{a-7} + \text{etc.} + B^{\frac{a-3}{2}};$$

qu'on

qu'on substitue successivement dans cette quantité les nombres 1, 2, 3 etc. jusqu'à $a - 2$ à la place de α, & qu'on désigne les valeurs correspondantes de P par P', P'', P''' etc., il est facile de voir par la théorie des différences que l'on aura

$$P' - (a-3)P'' + \frac{(a-3)(a-4)}{2}P''' - \text{etc.} + P^{a-2} = 1.2.3.4 \ldots (a-3).$$

Donc, si tous les nombres P', P'', P''' etc. jusqu'à P^{a-2} inclusivement étoient divisibles par a, il faudroit que le nombre $1.2.3 \ldots (a-3)$ le fût aussi; ce qui ne pouvant être, à cause que a est un nombre premier, il s'ensuit qu'il y aura nécessairement quelqu'un des nombres P', P'', P''' etc. qui ne sera pas divisible par a; par conséquent, il y aura toujours nécessairement au moins un nombre moindre que $a - 1$, lequel étant pris pour α rendra P non divisible par a; donc ce nombre sera tel que $\alpha^2 - B$ sera divisible par a.

Ces deux théoremes sont dus à M. Euler (voyez les Tomes I & VI des nouveaux Commentaires de Petersbourg), mais il ne paroît pas que ce grand Géometre ait jamais pensé à l'usage dont ils peuvent être dans la résolution des équations de la forme $A = u^2 - Bt^2$ (voyez le Tome IX des mêmes Commentaires).

53. Nommons ξ cette valeur de α; il est clair que, si $\xi > \frac{a}{2}$, $a - \xi$ sera $< \frac{a}{2}$, à cause de $\xi < a$; ainsi on trouvera toujours une autre valeur de α moindre que $\frac{a}{2}$. En général, quel que soit ξ, il n'y aura qu'à prendre $\alpha = \mu a \pm \xi$ (art. 10), & on pourra toujours déterminer le nombre indéterminé μ & le signe de ξ en sorte que α soit moindre que $\frac{a}{2}$.

Ainsi, dès qu'on aura reconnu que $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ est divisible par a, on sera sûr qu'il existe toujours un nombre $\alpha < \frac{a}{2}$ tel que $\alpha^2 - B$ soit divisible par a; de sorte que, pour trouver ce nombre, il n'y aura qu'à essayer successivement tous les nombres naturels moindres que $\frac{a}{2}$.

54. Si a est de la forme $4n + 3$, alors comme $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ est divisible par a, $B^{2n+1} - 1$ le sera; donc $B^{2(n+1)} - B$ le sera aussi; donc, si on fait $\xi = B^{n+1} = B^{\frac{a+1}{4}}$, on trouvera par la formule $\alpha = \mu a \pm \xi$ une valeur de $\alpha < \frac{a}{2}$ telle que $\alpha^2 - B$ soit divisible par a; ainsi on peut toujours dans ce cas trouver la valeur de α; il n'en est pas de même lorsque a est de la forme de $4n + 1$, à moins que l'on ne trouve par hazard une puissance impaire de B comme B^{2r+1} telle que $B^{2r+1} - 1$ soit divisible par a, auquel cas on pourra faire $\xi = B^{r+1}$.

55. Supposons maintenant que l'on ait trouvé un nombre ξ tel que $\xi^2 - B$ soit divisible par a, (nous supposons toujours que a est différent de 2, & qu'il n'est pas un diviseur de B,) je dis qu'on pourra toujours trouver un nombre ξ' tel que $\xi'^2 - B$ soit divisible par a^2.

Car, soit $\xi' = \xi + \lambda a$, on aura $\xi'^2 - B = \lambda^2 a^2 + 2\lambda a \xi + \xi^2 - B$; or $\xi^2 - B$ étant divisible par a, on a $\xi^2 - B = \pi a$; donc $\xi'^2 - B = \lambda^2 a^2 + (2\lambda\xi + \pi)a$; d'où l'on voit que cette quantité sera divisible par a^2, si $2\lambda\xi + \pi$ est un multiple de a, c'est à dire, si $2\lambda\xi + \pi = \mu a$; ainsi il ne s'agira que de déterminer λ, & μ, en sorte qu'ils satisfassent à cette équation $\mu a - 2\lambda\xi = \pi$; ce qui, à cause de a & 2ξ premiers entr'eux, est toujours possible par la méthode de l'art. 8.

On

On pourra trouver de même, à l'aide du nombre ξ', un autre nombre ξ'' tel que $\xi''^2 - B$ soit divisible par a^3; car, soit $\xi'^2 - B = \pi' a^2$, & qu'on fasse $\xi'' = \xi' + \lambda' a^2$, on aura $\xi''^2 - B = \lambda'^2 a^4 + 2\lambda'\xi' a^2 + \xi'^2 - B = \lambda'^2 a^4 + (2\lambda'\xi' + \pi')a^2$, de sorte qu'il n'y aura qu'à déterminer λ' en sorte que l'on ait $2\lambda'\xi' + \pi' = \mu' a$; c'est à dire, qu'on n'aura qu'à résoudre l'équation $\mu' a - 2\lambda'\xi' = \pi'$, laquelle, à cause de a & $2\xi'$ premiers entr'eux, est susceptible de la même méthode de l'art. 8.

Donc, en général, on pourra toujours trouver un nombre ξ tel que $\xi^2 - B$ soit divisible par a^n; & faisant ensuite $x = \mu a^n \pm \xi$, on aura aussi $x^2 - B$ divisible par a^n; de sorte qu'on pourra toujours prendre x moindre que $\frac{a^n}{2}$.

56. Si a n'est pas premier à B, c'est à dire, si B est divisible par a, ou en général par une puissance quelconque de a, que je dénoterai par a^r, il est clair que, tant que n ne sera pas plus grand que r, $\xi^2 - B$ sera divisible par a^n en prenant ξ tel que ξ^2 soit divisible par a^n.

Mais, lorsque r sera $< n$, il faudra distinguer deux cas, l'un où r est un nombre pair, & l'autre où r est impair. Soit 1°. $r = 2s$, & puisque B est divisible par a^{2s}, il faudra que ξ^2 le soit aussi, & par conséquent que ξ soit divisible par a^s; faisant donc $\xi = a^s \xi'$ & $B = a^{2s} B'$, on aura $\xi^2 - B = a^{2s}(\xi'^2 - B')$; expression qui devant être divisible par a^n, il faudra que $\xi'^2 - B'$ soit divisible par a^{n-2s}; de sorte que, comme B' n'est pas divisible par a, la question sera réduite au cas de l'art. préc.

Soit 2°. $r = 2s - 1$, & il faudra de même que ξ^2 soit divisible par a^{2s-1}, ce qui ne peut être à moins que ξ ne soit divisible par a^s; donc, faisant $\xi = a^s \xi'$ & $B = a^{2s-1} B'$, on aura $\xi^2 - B = a^{2s-1}(a\xi'^2 - B')$; de sorte que, pour que cette quantité soit divisible par a^n, il faudra que $a\xi'^2 - B'$ le soit par a^{n-r}; par conséquent $a\xi'^2 - B'$ devra être d'abord divisible par a, ce qui est impos-

possible à cause que le terme $a\xi'^2$ est divisible par a, & que l'autre terme B^{ν} ne l'est pas. Donc il sera impossible dans ce cas de trouver un nombre ξ tel que $\xi^2 - B$ soit divisible par a^n.

57. Il reste encore à examiner le cas où a seroit $= 2$. Or, soit d'abord B impair, il est clair que ξ devra être impair aussi; ainsi l'on fera $\xi = 2z + 1$, ce qui donnera $\xi^2 - B = 4z(z+1) + 1 - B$, quantité qui doit être divisible par 2^n.

Pour cela on remarquera que, comme $z(z+1)$ est toujours nécessairement un nombre pair, soit que z soit pair ou impair, le terme $4z(z+1)$ sera toujours divisible par 8, c'est à dire, par 2^3; d'où il s'ensuit que, tant que n ne surpassera pas 3, il faudra que $1 - B$ soit aussi divisible par a^n; & que lorsque n surpassera 3, il faudra que $1 - B$ soit d'abord divisible par 2^3; sans cela il sera impossible de trouver un nombre ξ qui satisfasse à la question.

Soit maintenant $n > 3$, & $1 - B$ divisible par 2^r, r étant aussi > 3; il est clair que, si r n'est n'est pas $< n$, il suffira de prendre, pour z, un nombre de cette forme $2^{n-2}\zeta$, ζ étant un nombre quelconque.

Si $r < n$, il faudra d'abord que $4z(z+1)$ soit divisible par 2^r, c'est à dire, que $z(z+1)$ le soit par 2^{r-2}; donc $z = 2^{r-2}\zeta$, ou $= 2^{r-2}\zeta - 1$; donc, faisant $1 - B = 2^r\beta$, il faudra que $2^r(\zeta(2^{r-2}\zeta \pm 1) + \beta)$ soit divisible par 2^n, c'est à dire, que $\zeta(2^{r-2}\zeta \pm 1) + \beta$ soit divisible par 2^{n-r}.

Donc, si $n - r$ n'est pas $> r - 2$, c'est à dire, si n n'est pas $> 2(r-1)$, il suffira que $\zeta \pm \beta$ soit divisible par 2^{n-r}; par conséquent $\zeta = 2^{n-r}\varrho \mp \beta$, ϱ étant un nombre entier quelconque.

Si $n - r > r - 2$, c'est à dire, si $n > 2(r-1)$, il faudra d'abord que $\zeta \pm \beta$ soit divisible par 2^{r-2}, & par conséquent que $\zeta = 2^{r-2}\varrho \mp \beta$; ce qui étant substitué dans l'expression $2^{r-2}\zeta^2 \pm \zeta + \beta$, donnera $2^{r-2}((2^{r-2}\varrho \mp \beta)^2 \pm \varrho)$,

ce

ce qui devant être divisible par 2^{n-r}, il faudra que $(2^{r-2}\varrho \mp \beta)^2 \pm \varrho$, c'est à dire $2^{2(r-2)}\varrho^2 \mp 2^{r-1}\varrho\beta + \beta^2 \pm \varrho$, soit divisible par $2^{n-2(r-1)}$.

Donc, si $n - 2(r-1)$ n'est pas $> r-1$, c'est à dire, si n n'est pas $> 3(r-1)$, il suffira que $\varrho \pm \beta^2$ soit divisible par $2^{n-2(r-1)}$, c'est à dire, que l'on ait $\varrho = 2^{n-2(r-1)}\pi \mp \beta^2$.

Si $n - 2(r-1) > r-1$, savoir si $n > 3(r-1)$, alors il faudra d'abord que $\varrho \pm \beta^2$ soit divisible par 2^{r-1}, ce qui donnera $\varrho = 2^{r-1}\pi \mp \beta^2$; ensuite il faudra que $2^{r-3}\varrho^2 \mp \varrho\beta \pm \pi$, c'est à dire $2^{3r-5}\pi^2 \mp 2^{2r-3}\beta^2\pi \mp 2^{r-1}\beta\pi + 2^{r-3}\beta^4 + \beta^3 \pm \pi$, soit divisible par $2^{n-3(r-1)}$; donc etc.

Enfin, si B étoit un nombre pair, comme $a = 2$, on auroit le cas de l'art. 51; ainsi, faisant $B = 2^r B'$ si r n'est pas $< n$, il suffira de prendre ξ tel que ξ^2 soit divisible par 2^n; si $r < n$ & impair, il n'y aura aucun nombre qui puisse être pris pour ξ; & si $r < n$ & pair, on fera $\xi = 2^{\frac{r}{2}}\xi'$ & la question se réduira à déterminer ξ' en sorte que $\xi'^2 - B'$ soit divisible par 2^{n-r}, B' étant maintenant un nombre impair; de sorte que ce cas rentre dans celui que nous venons d'examiner plus haut.

58. Maintenant, soient f, & g deux nombres quelconques premiers entr'eux, & supposons que $\xi^2 - B$ soit divisible par f, & que $\psi^2 - B$ le soit par g. Qu'on prenne $x = \mu f \pm \xi = \nu g \pm \psi$, & il est clair que $x^2 - B$ sera divisible à la fois par f, & par g, & par conséquent par fg, à cause que f & g sont premiers entr'eux. Ainsi il ne s'agira que de déterminer μ & ν en sorte que l'on ait $\mu f \pm \xi = \nu g \pm \psi$, c'est à dire $\mu f - \nu g = \pm \psi \pm \xi$, les signes de ψ, & de ξ étant à volonté; ce qui, à cause de f, & g premiers entr'eux, se fera aisément par la méthode de l'art. 8.

Donc, lorsqu'on aura trouvé des nombres ξ, ξ', ξ'' etc. tels que $\xi^2 - B$, $\xi'^2 - B$, $\xi''^2 - B$ soient divisibles respectivement par a^n, b^p, c^q etc.

c^q etc. a, b, c etc. étant premiers entr'eux, on pourra trouver un nombre x tel que $x^2 - B$ soit divisible par $a^n b^p c^q$ - - -. Ainsi, faisant $A = a^n b^p c^q$ - - -, & $\alpha = \mu A \pm x$, on aura $\alpha^2 - B$ divisible par A, & l'on pourra déterminer α ensorte qu'il soit $< \frac{A}{2}$.

59. De là, & de ce que nous avons démontré plus haut, je tire les conclusions suivantes.

Pour savoir s'il est possible de trouver un nombre α tel que $\alpha^2 - B$ soit divisible par A (A, & B étant donnés), on résoudra le nombre A en ses facteurs premiers, & supposant que a soit un quelconque de ces facteurs, lequel soit élevé à la puissance n, on distinguera trois cas suivant que a sera égal à 2, ou différent de 2 & premier à B ou non.

1°. Lorsque a est différent de 2, & premier à B, il faudra que $B^{\frac{a-1}{2}} - 1$ soit divisible par a, c'est à dire, que le reste de la division de B, élevé à la puissance $\frac{a-1}{2}$, soit l'unité. Si cette condition n'a point lieu par rapport à chacun des facteurs a dont nous parlons, il sera impossible que $\alpha^2 - B$ soit divisible par A, quel que soit α; par conséquent on sera d'abord assuré que l'équation $A = u^2 - Bt^2$ n'admet absolument aucune solution rationelle.

2°. Lorsque a sera égal à 2, ou qu'il sera un diviseur de B, on verra par les regles données dans les art. 56, & 57, si l'on peut trouver un nombre ξ tel que $\xi^2 - B$ soit divisible par a^n; si cela ne se peut pas, on en conclura pareillement qu'il n'y aura aucun nombre α tel que $\alpha^2 - B$ soit divisible par A, & qu'ainsi l'équation $A = u^2 - Bt^2$ ne sera susceptible d'aucune solution rationelle.

Supposons maintenant que l'on ait reconnu que chacun des diviseurs premiers a du nombre A a les conditions prescrites, alors on sera assuré de pouvoir trouver un nombre α moindre que $\frac{A}{2}$, & qui soit tel que $\alpha^2 - B$ soit divisible par A.

De

De plus, lorsque parmi les facteurs premiers de A, qui ne sont pas communs à B, il ne s'en trouve aucun de la forme de $4m + 1$, on pourra toujours trouver le nombre a dont il s'agit, sans tâtonnement, par les méthodes que nous avons données plus haut (art. 54 & suiv.). Et quand parmi les facteurs dont nous parlons, il s'en trouvera un ou plusieurs de la forme de $4m + 1$, alors il suffira de chercher, en tâtonnant, par rapport à chacun d'eux, un nombre ξ moindre que la moitié du facteur donné, & tel que $\xi^2 - B$ soit divisible par ce même facteur. Après quoi on pourra trouver le nombre a par les méthodes données (art. 55 & suiv.). On pourra même souvent s'exempter du tâtonnement lorsqu'on aura trouvé une puissance impaire de B, qui étant divisée par le facteurs dont il s'agit, donnera l'unité de reste (art. 54).

60. Soit, par exemple, $A = 51$, & $B = 7$ comme dans l'art. 50; puisque $51 = 3.17$, il faudra voir si $7^{\frac{3-1}{2}} - 1$ est divisible par 3, & si $7^{\frac{17-1}{2}} - 1$ est divisible par 17, c'est à dire, si $7 - 1$ est divisible par 3, & $7^8 - 1$ est divisible par 17; or $7 - 1 = 6$, & par conséquent divisible par 3, & $7^8 - 1 = 5764800$, qui n'est pas divisible par 17, parce qu'il donne 15 de reste; donc il n'existe point de nombre a tel que $a^2 - 7$ soit divisible par 51.

Si A étant toujours $= 51$, B étoit $= -7$, il faudroit voir si $(-7)^{\frac{3-1}{2}} - 1$ est divisible par 3, & si $(-7)^{\frac{17-1}{2}} - 1$ l'est par 17, c'est à dire, si $-7 - 1$ est divisible par 3, & si $7^8 - 1$ est divisible par 17; & comme ni l'une ni l'autre de ces divisions n'est possible, c'est une marque qu'il n'existe pas non plus de nombre a tel que $a^2 + 7$ soit divisible par 51.

61. Il est bon de remarquer que, pour savoir si $7^8 - 1$ est divisible par 17, on auroit pu se dispenser de chercher la puissance huitième de 7, d'en retrancher l'unité, & de diviser le reste par 17, com-

me nous avons fait, ce qui exige des opérations assés longues & pénibles ; car, comme tout se réduit à voir si la puissance huitieme de 7 étant divisée par 17 donne 1 de reste, il n'y aura qu'à considérer d'abord le carré de 7 qui est 49, & qui étant divisé par 17 donne le reste 15, ou bien -2, complément de 15 à 17, pour avoir un reste plus petit ; donc le carré de 49, c'est à dire, la 4eme puissance de 7, étant divisée par le même nombre 17, donnera pour reste le carré de -2, c'est à dire 4 ; & enfin le carré de cette dernière puissance, c'est à dire la puissance 8eme de 7, donnera pour reste le carré de 4, c'est à dire 16 ; d'où l'on voit que $7^8 - 1$ n'est pas divisible par 17, le reste de cette division étant 15, comme on l'a trouvé plus haut.

Cette opération est fondée comme l'on voit sur ce principe, que si a^m étant divisé par b donne le reste r, a^{mn} étant divisé aussi par b donnera le reste r^n : (j'entends par reste en général tout nombre qui étant retranché du dividende rend la division possible, d'où l'on voit que le reste peut être augmenté ou diminué à volonté d'un multiple quelconque du diviseur.) En effet, puisque $a^m = \mu b + r$, (μ étant le quotient de la division de a^m par b) ; on aura $a^{mn} = (\mu b + r)^n = \nu b + r^n$, à cause que tous les termes de $(\mu b + r)^n$ sont divisibles par b à l'exception du dernier r^n.

En général, soit r le reste de la division de f par b, & s le reste de la division de g par b, rs sera celui de la division de fg par b ; car $f = \mu b + r$, $g = \nu b + s$; donc $fg = \mu\nu b^2 + \mu s b + \nu r b + rs = \lambda b + rs$.

62. Soit encore $A = 109$, & $B = 7$; comme 109 est un nombre premier, il faudra voir si 7^{54} étant divisé par 109 donne le reste 1.

Pour cela je décompose l'exposant 54 en ses facteurs premiers qui sont 3, 3, 3, 2, & je commence par prendre le cube de 7 qui est 343, & qui étant divisé par 109 donne le reste 16 ; je prends ensuite le cube de ce reste, qui est 4096, & qui donnera 63, ou bien -46

-46 de reste; je prends derechef le cube de -46 qui est -97336 & j'aurai pour reste -108 ou bien 1; enfin je prends le carré de ce dernier reste, & j'ai encore 1, qui sera par conséquent le reste de la division de 7^{54} par 109; de sorte $7^{54}-1$ sera nécessairement divisible par 109.

Au reste, quoique 109 soit un nombre premier de la forme $4n+1$, & que par conséquent on ne puisse pas faire usage directement de la méthode de l'art. 51, pour trouver un nombre ξ tel que ξ^2-17 soit divisible par 109; cependant comme l'on a trouvé que le reste de la division de 7^{27} par 109 est 1, on pourra faire $\xi = 7^{14}$, ou bien ξ égal au reste de la division de 7^{14} par 109.

Pour trouver ce reste, je me rappelle que 7^3 donne 16 de reste, & que 7^9 donne -46 de reste; d'où il s'ensuit que 7^{12} donnera un reste égal à $-16 \times 46 = -736$; or le reste de la division de -736 par 109 est -82, ou bien 27; de sorte que 27 sera aussi le reste de la division de 7^{12} par 109; or 7^2 étant $= 49$, on multipliera encore 27 par 49, & le produit 1323, ou plutôt le reste 15 de la division de 1323 par 109, sera aussi le reste de la division de 7^{14} par le même nombre 109; ainsi on aura $\xi = 15$; ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé dans l'art. 20.

On voit par là que, lorsqu'il s'agira de chercher le reste de la division de $B^{\frac{a-1}{2}}$ par le nombre premier a, il sera toujours plus utile de commencer par chercher les restes des puissances impaires de B, dont les exposans sont des diviseurs de $\frac{a-1}{2}$, parce que si l'on en trouve une qui donne 1 de reste, on pourra ensuite par son moyen trouver le nombre ξ.

§. V.

Maniere de trouver toutes les solutions possibles en nombres entiers, des équations du second degré à deux inconnues.

63. Nous avons donné dans le §. III la méthode de trouver toutes les solutions possibles en nombres entiers, dont une équation quelcon-

que de la forme $A = u^2 - Bt^2$ peut être susceptible; mais, lorsqu'il s'agit de résoudre en nombres entiers une équation quelconque du second degré à deux inconnues telle que celle de l'art. 1, il ne suffit pas que dans la réduite $A = u^2 - Bt^2$, u, & t soient des nombres entiers; il faut de plus que ces deux nombres soient tels que $\pm u - f$ soit divisible par B, & que $\pm t - \vartheta - \frac{\beta(\pm u - f)}{B}$ le soit par α, les signes ambigus de u, & t étant à volonté (art. 2).

Or, lorsque B est un nombre négatif, nous avons vu (art. 27), que le nombre des solutions de l'équation $A = u^2 - Bt^2$ est toujours limité; de sorte qu'il n'y aura qu'à essayer successivement toutes les valeurs de u & de t qu'on aura trouvées, & on verra s'il y en a quelques unes qui satisfassent aux conditions dont il s'agit; si aucune n'y satisfait, on en pourra conclure que l'équation proposée n'est point résoluble en nombres entiers.

Il n'en est pas de même lorsque B est un nombre positif; car dans ce cas nous avons vu (art. 44) que le nombre des solutions possibles est toujours ou nul ou infini. Il est vrai que, quand l'équation $u^2 - Bt^2 = A$ est résoluble, on peut trouver par nos méthodes des formules générales qui renferment absolument toutes les solutions possibles; ainsi la question se réduit à trouver parmi cette infinité de valeurs de u & t, toutes celles qui peuvent satisfaire aux conditions prescrites; c'est l'objet des recherches suivantes.

64. Je remarque d'abord, que l'on a en général $u = \rho p$, $t = \rho q$, ρ^2 étant un facteur quelconque de A (art. 22), & les nombres p & q étant de ces formes (art. 44)

$$p = a\xi + Bb\psi, \quad q = a\psi + b\xi$$

où, a, & b sont des nombres entiers donnés & ξ, & ψ sont exprimés par

$$\xi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^m + (X - Y\sqrt{B})^m}{2}$$

$\psi =$

$$\psi = \frac{(X + Y\sqrt{B})^n - (X - Y\sqrt{B})^n}{2\sqrt{B}}$$

X, & Y étant auſſi donnés, & n pouvant être un nombre quelconque entier poſitif, pair ou impair, ou ſeulement pair, ou ſeulement impair; de ſorte que toute la difficulté conſiſte à trouver la valeur qu'il faut donner à l'expoſant n pour que les deux nombres $\frac{f \pm \varrho p}{B}$, $\frac{\beta(f \pm \varrho p) - B(\delta \pm \varrho q)}{2\alpha B}$ ſoient entiers.

Je remarque, en ſecond lieu, que lorſque le quantieme μ ſe trouve pair, l'expoſant n peut toujours être un nombre quelconque entier poſitif (art. 37); & que dans ce cas on a (art. 41) $X^2 - BY^2 = 1$.

Mais, ſi le quantieme μ eſt impair, alors l'expoſant n ne pourra être que pair, ou impair, & l'on aura $X^2 - BY^2 = -1$ (art. cités).

Suppoſons que l'expoſant n doive être toujours impair, on aura donc $n = 2n' + 1$; donc en ſuppoſant

$$\xi' = \frac{(X + Y\sqrt{B})^{2n'} + (X - Y\sqrt{B})^{2n'}}{2}$$

$$\psi' = \frac{(X + Y\sqrt{B})^{2n'} - (X - Y\sqrt{B})^{2n'}}{2}$$

on aura

$$\xi = X\xi' + BY\psi', \qquad \psi = X\psi' - Y\xi'$$

& par conſéquent

$$p = (aX - BbY)\,\xi' + B(aY - bX)\,\psi'$$

$$q = (aX - BbY)\,\psi' + (aY - bX)\,\xi'$$

expreſſions qui ſont de la même forme que les précédentes, mais dans leſquelles l'expoſant de $X \pm Y\sqrt{B}$ ſera toujours pair.

Or

Or, le cas où cet exposant est toujours un nombre pair se ramene aisément au cas où il peut être un nombre quelconque pair ou impair; en effet, puisqu'on a $(X \pm Y\sqrt{B})^2 = X^2 + BY^2 \pm 2XY\sqrt{B}$, il est clair que si on fait

$$X' = X^2 + BY^2, \qquad Y' = 2XY$$

on aura en général

$$(X \pm Y\sqrt{B})^{2n'} = (X' \pm Y'\sqrt{B})^{n'}$$

de sorte qu'il n'y aura dans ce cas qu'à mettre X', & Y' à la place de X & Y, & alors l'exposant pourra être un nombre quelconque pair ou impair.

De plus, on aura $X'^2 - BY'^2 = (X^2 + BY^2)^2 - B(2XY)^2 = (X^2 - BY^2)^2 = 1$, comme dans le cas où l'exposant μ est pair.

De là il s'ensuit que, soit que μ soit pair ou impair, les quantités p, & q peuvent toujours se réduire à la forme

$$p = a\xi + Bb\psi, \qquad q = a\psi + b\psi$$

les quantités ξ, & ψ étant exprimées comme ci-dessus, l'exposant n' pouvant être un nombre quelconque entier positif, & les quantités X, & Y étant telles que $X^2 - BY^2 = 1$.

65. Cela posé, nous allons examiner en général quel doit être l'exposant n pour qu'un nombre quelconque de la forme $F + Gp + Hq$, soit divisible par un nombre quelconque entier R, (F, G, H étant des nombres quelconques entiers donnés, & non divisibles par R.)

Pour cela il faut démontrer le théoreme suivant.

Soit r un nombre premier quelconque, & X, & Y des nombres entiers tels que $X^2 - BY^2 = 1$; je dis 1°. que si B est divisible par r, $(X \pm Y\sqrt{B})^{2r} - 1$ le sera aussi. 2°. Si B n'est pas divisible par r (auquel cas $B^{r-1} - 1$ le sera nécessairement par le théoreme de Fermat), je distingue deux cas, l'un lorsque $B^{\frac{r-1}{2}} + 1$ sera divi-

divisible par r, & l'autre lorsque $B^{\frac{r-1}{2}} - 1$ le sera; (car, puisque r est premier, il est clair que $B^{r-1} - 1$ ne peut être divisible par r à moins que l'un ou l'autre de ses deux facteurs $B^{\frac{r-1}{2}} - 1$, $B^{\frac{r-1}{2}} + 1$ ne le soit.) Dans le premier cas, je dis que $(X \pm Y\sqrt{B})^{r+1} - 1$ sera divisible par r, & dans le second, je dis que $(X \pm Y\sqrt{B})^{r-1} - 1$ le sera.

Qu'on considere la quantité $(X \pm Y\sqrt{B})^r$ & qu'on la développe en série suivant le théoreme de Newton, on aura à cause que r est impair

$$X^r \pm rX^{r-1}Y\sqrt{B} + \frac{r(r-1)}{2}X^{r-2}Y^2B$$
$$\pm \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}X^{r-3}Y^3B\sqrt{B} + \text{etc.}$$
$$\pm Y^rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}.$$

Or, r étant un nombre premier, il est facile de prouver que les coëfficiens du binome r, $\frac{r(r-1)}{2}$, $\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3.}$ etc. sont tous divisibles par r (voyez le Tome I des nouveaux Commentaires de Petersbourg page 22); donc $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X^r \mp Y^rB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$ sera nécessairement divisible par r, quels que soient les nombres X, Y & B. Mais, par le théoreme de Fermat déjà cité (art. 51), $X^{r-1} - 1$ est toujours divisible par r lorsque X ne l'est pas; de sorte que $X^r - X$ sera toujours divisible par r, quel que soit X; de même $Y^r - Y$ sera aussi toujours divisible par r, & par conséquent $(Y^r - Y)B^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$ le sera aussi; donc, ajoutant ou ôtant ces quantités de la précédente, il s'ensuit que

$$(X \pm Y\sqrt{B})^r - X \mp YB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$$

sera toujours divisible par r.

Donc

Donc 1°. si B est divisible par r, il faudra que $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X$ le soit aussi; donc le produit de cette quantité par celle-ci $(X \pm Y\sqrt{B})^r + X$, savoir $(X \pm Y\sqrt{B})^{2r} - X^2$ le sera aussi; mais on a $X^2 - BY^2 = 1$ (hyp.), donc $X^2 - 1$ sera aussi divisible par r; donc ajoutant $X^2 - 1$ à la quantité précédente, on aura la quantité

$$(X \pm Y\sqrt{B})^{2r} - 1$$

qui sera nécessairement divisible par r.

2°. Si B n'est pas divisible par r, & que $B^{\frac{r-1}{2}} + 1$ le soit, $YB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B} + Y\sqrt{B}$ le sera aussi; donc, ajoutant ou retranchant cette quantité de $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X \mp YB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$, on aura la quantité $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X \pm Y\sqrt{B}$, qui sera aussi divisible par r; donc, multipliant par $X \pm Y\sqrt{B}$, on aura le produit $(X \pm Y\sqrt{B})^{r+1} - (X^2 - BY^2)$, qui sera encore divisible par r; mais $X^2 - BY^2 = 1$; donc la quantité

$$(X \pm X\sqrt{B})^{r+1} - 1$$

sera divisible par r.

3°. Si $B^{\frac{r-1}{2}} + 1$ n'est pas divisible par r, $B^{\frac{r-1}{2}} - 1$ le sera, (B ne l'étant pas), donc $YB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B} - Y\sqrt{B}$ le sera aussi; donc ajoutant ou retranchant cette quantité de la quantité $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X \mp YB^{\frac{r-1}{2}}\sqrt{B}$, on aura celle-ci $(X \pm Y\sqrt{B})^r - X \mp Y\sqrt{B}$, qui sera aussi divisible par r; donc, multipliant par $X \mp Y\sqrt{B}$, le produit le sera aussi; mais ce produit est $(X^2 - BY^2)((X \pm Y\sqrt{B})^{r-1} - 1)$; donc à cause de $X^2 - BY^2 = 1$, la quantité

$$(X \pm Y\sqrt{B})^{r-1} - 1$$

sera nécessairement divisible par r.

66. Si

66. Si r étoit $= 2$, alors $(X \pm Y\sqrt{B})^r - 1$ feroit toujours divisible par r; car $(X \pm Y\sqrt{B})^2 - 1 = X^2 + BY^2 \pm 2XY\sqrt{B} - 1 =$ (à cause de $X^2 - BY^2 = 1$) $2BY^2 \pm 2XY\sqrt{B}$.

67. Nous désignerons dorénavant par ϱ l'exposant de $X \pm Y\sqrt{B}$, tel que $(X \pm Y\sqrt{B})^\varrho - 1$ soit divisible par un nombre premier quelconque r.

Ainsi, si B est divisible par r, ϱ sera $= 2r$; si B n'est pas divisible par r, & que $B^{\frac{r-1}{2}} + 1$ le soit, on aura $\varrho = r + 1$; si $B^{\frac{r-1}{2}} - 1$ est divisible par r, on aura $\varrho = r - 1$; enfin, si $r = 2$, on aura $\varrho = r$.

68. Soit en général $a^\varrho - 1$ divisible par r, je dis que $a^{r\varrho} - 1$ le sera par r^2, $a^{r^2\varrho} - 1$ le sera par r^3 etc.

En effet, puisque $a^\varrho - 1$ est divisible par r (hyp.), il est clair que $a^{m\varrho} - 1$ le sera aussi, m étant un nombre quelconque entier positif; donc les quantités suivantes seront toutes divisibles par r

$$a^\varrho - 1$$
$$a^{2\varrho} + a^\varrho - 2$$
$$a^{3\varrho} + a^{2\varrho} + a^\varrho - 3$$
etc.

Donc

$$a^{r\varrho} + a^{(r-1)\varrho} + a^{(r-2)\varrho} + \text{etc.} + a^\varrho - r$$

le sera aussi. Donc

$$a^\varrho\,(a^{(r-1)\varrho} + a^{(r-2)\varrho} + \text{etc.} + 1)$$

le sera; & comme a^ϱ ne peut pas l'être, à cause que $a^\varrho - 1$ l'est, il s'ensuit que

$$a^{(r-1)\varrho} + a^{(r-2)\varrho} + a^{(r-3)\varrho} + \text{etc.} + 1$$

 le sera

le sera nécessairement; donc, multipliant cette quantité par $a^{\varrho} - 1$ qui est aussi divisible par r, le produit $a^{r\varrho} - 1$ sera nécessairement divisible par r^2.

On prouvera de même que

$$a^{(r-1)r\varrho} + a^{(r-2)r\varrho} + a^{(r-3)r\varrho} + \text{etc.} + 1$$

sera divisible par r; de sorte qu'en multipliant cette quantité par $a^{r\varrho} - 1$, on aura le produit $a^{r^2\varrho} - 1$ qui sera divisible par r^3; & ainsi de suite.

69. Donc $(X \pm Y\sqrt{B})^{\varrho} - 1$ étant divisible par r, $(X \pm Y\sqrt{B})^{r\varrho} - 1$ le sera par r^2, $(X \pm Y\sqrt{B})^{r^2\varrho} - 1$ le sera par r^3, & en géneral $(X \pm Y\sqrt{B})^{r^{m-1}\varrho} - 1$ sera divisible par r^m.

70. Considérons maintenant la quantité $F + Gp + Hq$ qui doit être divisible par R (art. 65); il est clair que, quel que soit le nombre R, on peut toujours le mettre sous cette forme $r^m . r'^{m'} . r''^{m''}$ - - - - (r, r' etc. étant des nombres premiers); de plus, il est évident que pour que la quantité dont il s'agit soit divisible par R, il faut qu'elle le soit en particulier par chacun des facteurs r^m, $r'^{m'}$ etc. & *vice versa* il est facile de voir que, dès que la même quantité sera divisible par chacun de ces facteurs, elle le sera aussi nécessairement par leur produit R; d'où il s'ensuit que la question se réduit à rechercher les conditions nécessaires pour que la quantité $F + Gp + Hq$ soit divisible par autant de nombres qu'on voudra de la forme r^m, r étant un nombre premier quelconque.

Or, si on substitue les valeurs de p, & q, & ensuite celles de ξ, & ψ (art. 64), la quantité dont il s'agit deviendra de cette forme

$$F + P(X + Y\sqrt{B})^n + Q(X - Y\sqrt{B})^n$$

n pouvant être un nombre quelconque entier positif.

Supposons qu'il y ait un nombre n tel que cette quantité soit divisible par r^m, je dis que, si n est plus grand que $r^{m-1}\varrho$, (ϱ ayant la valeur

valeur que nous lui avons assignée (art. 67), & qu'on prenne le reste de la division de n par $r^{m-1}\varrho$, lequel soit dénoté par N, la même quantité sera aussi nécessairement divisible par r^m, en prenant le nombre N à la place du nombre n.

Car, soit $n = \mu r^{m-1}\varrho + N$, μ étant le quotient de la division de n par $r^{m-1}\varrho$, puisque $(X \pm Y\sqrt{B})^{r^{m-1}\varrho} - 1$ est divisible par r^m (art. 69), $(X \pm Y\sqrt{B})^{\mu r^{m-1}\varrho} - 1$ le sera aussi; donc, multipliant par $(X \pm Y\sqrt{B})^N$, le produit $(X \pm Y\sqrt{B})^n - (X \pm Y\sqrt{B})^N$ sera aussi divisible par r^m; donc $P(X + Y\sqrt{B})^n - P(X + Y\sqrt{B})^N$, & $Q(X - Y\sqrt{B})^n - Q(X - Y\sqrt{B})^N$ seront tous les deux divisibles par r^m; donc, retranchant ces quantités de la quantité $F + P(X + Y\sqrt{B})^n + Q(X - Y\sqrt{B})^n$, on aura la quantité

$$F + P(X + Y\sqrt{B})^N + Q(X - X\sqrt{B})^N$$

qui sera pareillement divisible par r^m.

71. De là il s'ensuit que, si la quantité $F + Gp + Hq$ est divisible par r^m, en donnant à l'exposant n de ξ, & ψ une certaine valeur quelconque, il faudra aussi nécessairement que la même quantité soit divisible par r^m, en prenant n moindre $r^{m-1}\varrho$.

Ainsi, pour reconnoitre si la quantité dont il s'agit peut être divisible par r^m, il n'y aura qu'à faire successivement $n = 0, 1, 2$, etc. $r^{m-1}\varrho$; & si aucune de ces suppositions ne rend la proposée divisible par r^m, ce sera une marque sûre qu'elle ne le deviendra jamais quelque valeur qu'on puisse donner à n; de sorte qu'on en pourra conclure que la quantité dont il s'agit ne peut jamais être divisible par r^m.

Mais, si on trouve une ou plusieurs valeurs de n moindres que $r^{m-1}\varrho$, qui rendent la quantité proposée divisible par r^m, alors nommant N une quelconque de ces valeurs, toutes les autres valeurs possibles de n qui auront la même propriété seront comprises, dans cette formule

$$n = \mu r^{m-1}\varrho + N$$

μ étant un nombre quelconque entier positif.

72. Donc, pour que la quantité $F + Gp + Hq$ puisse être divisible par R, il faudra (art. 70, & 71) qu'elle le soit par r^m en prenant $n < r^{m-1}\varrho$, par $r'^{m'}$ en prenant $n < r'^{m'-1}\varrho'$ etc.

Si une seule de ces conditions manquoit, il en faudroit conclure qu'il seroit impossible que la quantité dont il s'agit pût jamais être divisible par R, quelque valeur qu'on donnât à n.

Supposons donc que toutes ces conditions se trouvent remplies; & soit N la valeur, ou les valeurs (s'il y en a plus d'une) de n moindres que $r^{m-1}\varrho$ qui rendent la quantité $F + Gp + H$ divisible par r^m, N' celles qui rendent la même quantité divisible par $r'^{m'}$, (N' étant $< r'^{m'-1}\varrho'$) & ainsi des autres, on aura en général, en prenant des nombres quelconques entiers μ, μ', μ''

$$n = \mu r^{m-1}\varrho + N$$
$$n' = \mu' r'^{m'-1}\varrho' + N'$$
$$n'' = \mu'' r''^{m''-1}\varrho'' + N''$$
etc.

De sorte que, pour trouver les valeurs de l'exposant n qui rendront la quantité proposée divisible par R, il ne s'agira que de déterminer les nombres μ, μ', μ'' etc. en sorte que l'on ait

$$\mu r^{m-1}\varrho + N = \mu' r'^{m'-1}\varrho' + N'$$
$$\mu r^{m-1}\varrho + N = \mu'' r''^{m''-1}\varrho'' + N''$$
etc.

ce que l'on peut exécuter par la methode de l'art. 8.

En général, on voit que la question se réduit à trouver un nombre n qui étant divisé par $r^{m-1}\varrho$ donne le reste N, étant divisé par $r'^{m'-1}\varrho'$ donne le reste N', étant divisé par $r''^{m''-1}\varrho''$ donne le reste N'', & ainsi de suite. Or on a plusieurs méthodes abrégées pour résoudre ces sortes de problêmes.

La

La plus ſimple eſt celle-ci: Soient les diviſeurs M, M', M'' etc. en ſorte que l'on ait dans notre cas $M = r^{m-1}\varrho$, $M = r'^{m'-1}\varrho'$ etc. & les reſtes N, N', N'' etc. On cherchera d'abord le plus petit multiple commun de tous les diviſeurs M, M', M'' etc. & on l'appellera P. On cherchera enſuite le plus petit multiple commun de M, M'', M''' etc. ſavoir de tous les diviſeurs à l'exception de M', & on appellera ce multiple Q; on cherchera de même le plus petit multiple commun de M, M', M''' etc. c'eſt à dire de tous les diviſeurs moins M'', & on l'appellera Q', & ainſi de ſuite. Enfin on cherchera par la méthode de l'art. 8 des nombres entiers μ, ν, μ', ν', μ'', ν'' etc. tels que

$$\begin{aligned} \mu Q &- \nu M' = N' - N \\ \mu' Q' &- \nu' M'' = N'' - N \\ \mu'' Q'' &- \nu'' M''' = N''' - N \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

(le nombre de ces équations doit être égal à celui des diviſeurs M, M' etc. moins un) & faiſant pour abréger

$$N + \mu Q + \mu' Q' + \mu'' Q'' + \text{etc.} = L$$

on aura en général

$$n = \lambda P + L$$

λ étant un nombre entier quelconque.

La démonſtration eſt facile à déduire de l'art. 8; ainſi nous ne nous y arrêterons pas.

Si les nombres Q & M' ſont premiers entr'eux, il eſt toujours poſſible de réſoudre l'équation $\mu Q - \nu M' = N' - N$, & même d'une infinité de manieres (art. 8); mais il ſuffira pour notre objet d'avoir une ſeule valeur de μ, pour la ſubſtituer dans la quantité L.

Mais, ſi les nombres Q, & M' ne ſont pas premiers entr'eux, alors pour que l'équation $\mu Q - \nu M' = N' - N$ ſoit réſoluble en nombres entiers, il faudra que $N' - N$ ſoit diviſible par la plus grande commune meſure de Q, & M' (art. cité), de ſorte que ſi cette con-

condition n'a point lieu, il en faudra conclure qu'il eſt poſſible de trouver un nombre n qui ait les propriétés requiſes; & que par conſéquent la quantité $F + Gp + Hq$ ne pourra jamais être diviſible par R. On dira la même choſe par rapport aux autres équations $\mu'Q' - \nu'M'' = N'' - N$ etc. auxquelles il faut ſatisfaire.

Ainſi, pour pouvoir s'aſſurer ſi la quantité $F + Gp + Hq$ peut être diviſible par R, & pour trouver en même tems les valeurs de l'expoſant n qui peuvent la rendre telle, il ſuffira d'examiner ſucceſſivement toutes les valeurs de cette quantité qui répondent à $n = 0$, 1, 2 etc. juſqu'au plus grand des nombres $r^{m-1}\varrho$, $r'^{m'-1}\varrho'$, $r''^{m''-1}\varrho''$ etc.; d'où l'on voit que ce tâtonnement ſera toujours limité.

73. Suppoſons maintenant qu'on ait une autre quantité telle que $F' + H'p + G'q$, qui doive être diviſible par R'; on trouvera de la même maniere que ci-deſſus que l'expoſant n qui peut la rendre telle (s'il y en a un) ſera exprimé en général par

$$n = \lambda'P' + L'$$

P', & L' étant des nombres connus, & λ' un nombre quelconque entier.

Donc, ſi on veut que les quantités $F + Gp + Hq$, & $F' + G'p + H'q$ ſoient en même tems diviſibles, la premiere par R, & la ſeconde par R', il faudra que n ſoit en même tems de ces deux formes $\lambda P + L$, & $\lambda'P' + L'$, de ſorte qu'il ne s'agira que de trouver des nombres entiers λ, & λ' tels que l'on ait

$$\lambda P + L = \lambda'P' + L'$$

probleme que l'on réſoudra par la méthode de l'art. 8; & l'on trouvera que la valeur de n ſera de cette forme

$$n = \pi\Pi + \Lambda$$

Π étant le plus petit multiple commun de P & P', Λ étant un nombre donné, & π un nombre quelconque entier; de ſorte qu'il y aura toujours une infinité de valeurs de n qui ſatisferont à ces deux conditions.

74.

74. Donc, puisque les valeurs des inconnues x, & y d'une équation quelconque du second degré (art. 2, & 64) se réduisent toujours, lorsque u & t sont des nombres entiers, & que B est un nombre positif, à ces formes

$$x = \frac{F + Gp + Hq}{R}, \qquad y = \frac{F' + G'p + H'q}{R'}$$

l'exposant n des quantités $X \pm Y\sqrt{B}$ qui entrent dans les expressions de p, & q, pouvant être un nombre quelconque entier positif, on reconnoitra aisément par les méthodes précédentes si les inconnues x, & y peuvent être des nombres entiers; & dans ce cas on trouvera aussi toutes les valeurs possibles de l'exposant n, qui peuvent rendre x, & y des nombres entiers; valeurs dont le nombre sera toujours infini.

De sorte que le nombre des solutions en nombres entiers, dont une équation quelconque du second degré à deux inconnues est susceptible, sera toujours nécessairement ou nul, ou infini.

Il resteroit à donner quelques exemples pour montrer l'application des méthodes précédentes, mais comme elle ne peut avoir aucune difficulté, nous croyons pouvoir nous dispenser d'entrer dans ce détail, pour ne pas rendre ce Mémoire trop long.

§. VI.

Remarques particulieres.

I.

La quantité $p^2 - Bq^2$ peut être regardée comme le produit de ces deux-ci $p + q\sqrt{B}$ & $p - q\sqrt{B}$; d'où il s'ensuit que, si on multiplie cette quantité par une autre quantité de la même forme telle que $p'^2 - Bq'^2$, on aura le produit de ces quatre quantités $p + q\sqrt{B}$, $p - q\sqrt{B}$, $p' + q'\sqrt{B}$, $p' - q'\sqrt{B}$; or le produit de $p + q\sqrt{B}$ par $p' + q'\sqrt{B}$ est $pp' + Bqq' + (pq' + qp'\sqrt{B})$, & celui de $p - q\sqrt{B}$ par $p' - q'\sqrt{B}$ est de même $pp' + Bqq' - (pq' + qp')\sqrt{B}$, c'est à dire qu'en faisant $pp' + Bqq' = P$, & $pq' +$ qp'

$qp' = Q$, ces produits sont l'un $P + Q\sqrt{B}$, & l'autre $P - Q\sqrt{B}$; donc le produit de $p^2 - Bq^2$ par $p'^2 - Bq'^2$ sera égal à celui de $P + Q\sqrt{B}$ par $P - Q\sqrt{B}$, c'est à dire égal à $P^2 - BQ^2$.

Si, au lieu de multiplier d'abord $p + q\sqrt{B}$ par $p' + q'\sqrt{B}$, & $p - q\sqrt{B}$ par $p' - q'\sqrt{B}$, on multiplioit $p + q\sqrt{B}$ par $p' - q'\sqrt{B}$, & $p - q\sqrt{B}$ par $p' + q'\sqrt{B}$, on auroit les produits $P + Q\sqrt{B}$, & $P - Q\sqrt{B}$, dans lesquels $P = pp' - Bqq'$, $Q = pq' - qp'$; de sorte qu'on aura en général

$$(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2) = P^2 - BQ^2, \quad \&$$
$$P = pp' \pm Bqq', \quad Q = pq' \pm qp'$$

comme nous l'avons vu (art. 9).

Cette analise a l'avantage de faire voir clairement pourquoi le produit de deux quantités de la forme $p^2 - Bq^2$ ne peut être que deux fois de la même forme; en effet, en réduisant l'équation

$$(p^2 - Bq^2)(p'^2 - Bq'^2) = P^2 - PQ^2$$

à la forme

$$(p+q\sqrt{B})(p-q\sqrt{B})(p'+q'\sqrt{B})(p'-q'\sqrt{B}) = (P+Q\sqrt{B})(P-Q\sqrt{B})$$

il est visible qu'on n'y peut satisfaire que par ces deux suppositions

$$P \pm Q\sqrt{B} = (p \pm q\sqrt{B})(p' \pm q'\sqrt{B}) \quad \text{ou}$$
$$P \pm Q\sqrt{B} = (p \pm q\sqrt{B})(p' \mp q'\sqrt{B}),$$

ce qui donne les deux valeurs de P, & Q que nous avons trouvées.

Donc, puisque le produit de deux quantités de la forme $p^2 - Bq^2$ est deux fois de la même forme, le produit de trois de ces quantités sera quatre fois de la même forme, le produit de quatre quantités sera huit fois de la même forme, & ainsi de suite; à moins que quelques unes de ces formes ne soient détruites par l'évanouissement des quantités Q, ce qui doit arriver nécessairement lorsqu'on multiplie ensemble des quantités égales.

En

En effet, si on fait $p' = p$, & $q' = q$, en sorte que $P^2 - BQ^2 = (p^2 - Bq^2)^2$, les doubles valeurs de P, & Q se réduiront à celles-ci $P = p^2 + Bq^2$, $Q = 2pq$, & $P = p^2 - Bq^2$, $Q = 0$, dont les dernieres ne nous apprennent rien; de sorte que dans ce cas on n'aura à proprement parler qu'une seule valeur de P, & une de Q.

Mais voyons en général quelles sont les expressions de P & Q qui peuvent satisfaire à l'équation

$$(p^2 - Bq^2)^m = P^2 - BQ^2.$$

Suivant notre méthode, on réduira cette équation à la forme

$$(p + q\sqrt{B})^m (p - q\sqrt{B})^m = (P + Q\sqrt{B})(P - Q\sqrt{B})$$

& on fera $P + Q\sqrt{B} = (p + q\sqrt{B})^m$, $P - Q\sqrt{B} = (p - q\sqrt{B})^m$, d'où l'on aura

$$P = \frac{(p + q\sqrt{B})^m + (p - q\sqrt{B})^m}{2}$$

$$Q = \frac{(p + q\sqrt{B})^m - (p - q\sqrt{B})^m}{2\sqrt{B}}$$

expressions qui seront toujours rationelles, comme il est facile de s'en assurer par le développement des puissances de $p + q\sqrt{B}$, & de $p - q\sqrt{B}$.

Si on faisoit $P + Q\sqrt{B} = (p - q\sqrt{B})^m$ & $P - Q\sqrt{B} = (p + q\sqrt{B})^m$, on auroit les mêmes valeurs de P & de Q que nous venons de trouver, à l'exception que celle de Q seroit négative, ce qui est indifférent ici.

II.

Si on avoit à multiplier ensemble deux quantités de cette forme $p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2$, on pourroit démontrer par la méthode précédente que le produit seroit aussi de la même forme.

Car

Car soient

$$p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2, \quad \&$$
$$p'^2 - Bq'^2 - Cr'^2 + BCs'^2$$

les deux quantités qu'il s'agit de multiplier l'une par l'autre, en faisant pour abréger

$$p + q\sqrt{B} = \alpha, \quad p - q\sqrt{B} = \beta$$
$$r + s\sqrt{B} = \gamma, \quad r - s\sqrt{B} = \delta$$

& de même

$$p' + q'\sqrt{B} = \alpha', \quad p' - q'\sqrt{B} = \beta'$$
$$r' + s'\sqrt{B} = \gamma', \quad r' - s'\sqrt{B} = \delta'$$

elles deviendront

$$\alpha\beta - C\gamma\delta, \quad \& \quad \alpha'\beta' - C\gamma'\delta'$$

dont le produit peut se réduire à cette forme

$$(\alpha\alpha' \pm C\gamma\gamma')(\beta\beta' \pm C\delta\delta') - C(\alpha\delta' \pm \gamma\beta')(\beta\gamma' \pm \delta\alpha').$$

Or il est facile de voir qu'on aura

$$\alpha\alpha' \pm C\gamma\gamma' = P + Q\sqrt{B}$$
$$\beta\beta' \pm C\delta\delta' = P - Q\sqrt{B}$$
$$\alpha\delta' \pm \gamma\beta' = R + S\sqrt{B}$$
$$\beta\gamma' \pm \delta\alpha' = R - S\sqrt{B}$$

en faisant

$$P = pp' + Bqq' \pm C(rr' + Bss')$$
$$Q = pq' + qp' \pm C(rs' + sr')$$
$$R = pr' - Bqs' \pm (rp' - Bsq')$$
$$S = qr' - ps' \pm (sp' - rq')$$

d'où il s'ensuit que le produit des deux quantités données sera

$$P^2 - BQ^2 - CR^2 + BCS^2;$$

& par conséquent de la même forme que ces mêmes quantités.

Si

Si on vouloit avoir le carré de $p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2$, il n'y auroit qu'à supposer dans les formules précédentes $p' = p$, $q' = q$, $r' = r$, $s' = s$, & l'on auroit, en prenant le signe supérieur

$$P = p^2 + Bq^2 + C(r^2 + Bs^2)$$
$$Q = 2pq + 2Crs$$
$$R = 2pr - 2Bqs$$
$$S = 0;$$

& en prenant l'inférieur

$$P = p^2 + Bq^2 - C(r^2 + Bs^2)$$
$$Q = 2pq - 2Crs$$
$$R = 0$$
$$S = 2rq - 2ps.$$

On pourra trouver de même le cube & les puissances plus hautes de $p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2$, lesquelles seront toujours aussi de la même forme, de sorte qu'on pourra résoudre en général l'équation

$$(p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2)^m = P^2 - BQ^2 - CR^2 + BCS^2.$$

Au reste, il faut remarquer que, pour avoir toutes les valeurs possibles de P, Q, R & S, il faudra faire successivement chacune des quantités p, q, r, s positive & négative; à cause qu'il n'y a que les carrés de ces quantités qui entrent dans la quantité donnée $p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2$.

III.

Si on vouloit trouver des fonctions de plus de deux dimensions qui eussent la même propriété, que le produit de deux fonctions semblables fût aussi une fonction semblable, on y parviendroit aisément par la considération suivante.

Qu'on considere la quantité irrationelle

$$t + ua\sqrt[n]{A} + xa^2\sqrt[n]{A^2} + ya^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.} = p,$$

a étant

a étant une des racines n^{emes} de l'unité, il est facile de voir que, si on multiplie ensemble deux expressions semblables, le produit sera aussi de la même forme.

Or, si on désigne par a', a'', a''' etc. les différentes valeurs de a, c'est à dire, les différentes racines de l'équation $a^n - 1 = 0$, & par p', p'', p''' etc. les valeurs correspondantes de p, on sait que le produit $p' p'' p'''$ - - - - etc. sera toujours une quantité rationelle; donc cette quantité aura la propriété requise.

En effet, soit

$$\theta + \upsilon a \sqrt[n]{A} + \xi a^2 \sqrt[n]{A^2} + \psi a^3 \sqrt[n]{A^3} + \text{etc.} = \pi$$

& la quantité $\pi' \pi'' \pi'''$ - - - sera rationelle & semblable à la quantité $p' p'' p'''$ - - -; donc si on fait

$$P = p' p'' p''' \text{ - - - -}, \qquad \Pi = \pi' \pi'' \pi''' \text{ - - - -}$$

on aura $P\Pi = p' \pi' p'' \pi'' p''' \pi'''$ - - - -; mais en multipliant p par π & nommant le produit q; on trouvera, à cause de $a^n = 1$,

$$T + V a \sqrt[n]{A} + X a^2 \sqrt[n]{A^2} + Y a^3 \sqrt[n]{A^3} + \text{etc.} = q$$

T, V, X etc. étant des fonctions rationelles de t, u, x etc. θ, υ, ξ etc. & A; donc, si on fait de même

$$Q = q' q'' q''' \text{ - - - -}$$

la quantité Q sera rationelle & semblable à P & à Π, & l'on aura $Q = P\Pi$.

De là on voit que, si on multiplie ensemble autant de fonctions semblables à P qu'on voudra, le produit sera toujours aussi une fonction semblable.

Donc, si on élève P à une puissance quelconque, cette puissance sera toujours aussi une fonction semblable à sa racine.

Pour trouver en général l'expression d'une puissance quelconque P^m, il faudra trouver d'abord celle de p^m qui sera nécessairement de la forme

T +

$$T + Va\sqrt[n]{A} + Xa^2\sqrt[n]{A^2} + Ya^3\sqrt[n]{A^3} \text{ etc.}$$

& alors on aura $P^m = p'^m p''^m p'''^m \ldots$.

Soit donc en général

$$p^m = T + Va\sqrt[n]{A} + Xa^2\sqrt[n]{A^2} + Ya^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.}$$

& comme cette équation doit être identique, & par conséquent avoir lieu pour toutes les valeurs de a, on aura celles-ci

$$p'^m = T + Va'\sqrt[n]{A} + Xa'^2\sqrt[n]{A^2} + Ya'^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.}$$

$$p''^m = T + Va''\sqrt[n]{A} + Xa''^2\sqrt[n]{A^2} + Ya''^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.}$$

$$p'''^m = T + Va'''\sqrt[n]{A} + Xa'''^2\sqrt[n]{A^2} + Ya'''^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.}$$

etc.

qui seront au nombre de n; donc, comme les quantités T, V, X, Y etc. sont aussi au même nombre, on pourra les déterminer à l'aide de ces mêmes équations; & il est facile de voir qu'à cause que a', a'', a''' etc. sont les racines de l'équation $a^n - 1 = 0$, dont tous les termes intermédiaires manquent, on aura

$$T = \frac{p'^m + p''^m + p'''^m + \text{etc.}}{n}$$

$$V = \frac{a'^{n-1}p'^m + a''^{n-1}p''^m + a'''^{n-1}p'''^m + \text{etc.}}{n\sqrt[n]{A}}$$

$$X = \frac{a'^{n-2}p'^m + a''^{n-2}p''^m + a'''^{n-2}p'''^m + \text{etc.}}{n\sqrt[n]{A^2}}$$

$$Y = \frac{a'^{n-3}p'^m + a''^{n-3}p''^m + a'''^{n-3}p'''^m + \text{etc.}}{n\sqrt[n]{A^3}}$$

etc.

expres-

expressions qui deviendront rationelles par la substitution des valeurs de p'^m, p''^m, p'''^m etc. comme il est facile de s'en convaincre par cette considération que l'on a

$$a' + a'' + a''' + \text{etc.} = 0$$
$$a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \text{etc.} = 0$$
$$a'^3 + a''^3 + a'''^3 + \text{etc.} = 0$$
etc.
$$a'^n + a''^n + a'''^n + \text{etc.} = n$$
$$a'^{n+1} + a''^{n+1} + a'''^{n+1} + \text{etc.} = 0$$
etc.
$$a'^{2n} + a''^{2n} + a'''^{2n} + \text{etc.} = n$$
& ainsi de suite;

de sorte qu'on pourra avoir les valeurs de T, V, X etc. indépendamment des racines a', a'', a''' etc.

Cette même considération suffit aussi pour faire trouver en général la valeur de $P = p'p''p''' \ldots$ sans connoitre les racines a', a'', a''' etc.; car, si on fait

$$p' + p'' + p''' + \text{etc.} = \alpha$$
$$p'^2 + p''^2 + p'''^2 + \text{etc.} = \beta$$
$$p'^3 + p''^3 + p'''^3 + \text{etc.} = \gamma$$
etc.

& ensuite

$$b = \frac{\alpha^2 - \beta}{2}$$
$$c = \frac{\alpha b - \beta\alpha + \gamma}{3}$$
$$d = \frac{\alpha c - \beta b + \gamma\alpha - \delta}{4}$$
etc.

la

la quantité P sera égale, comme l'on sait, au terme n^{eme} de la série a, b, c, d etc.; mais il est facile de voir que les valeurs de α, β, γ etc. ne peuvent contenir d'autres fonctions des racines a', a'', a''' etc. que la somme de ces racines, ou de leurs carrés, ou de leurs cubes etc.; donc etc.

En général, il est évident que la quantité P n'est autre chose que le dernier terme de l'équation dont les racines seroient p', p'', p''' etc., c'est à dire, de l'équation qui résultera de celle-ci

$$t + ua\sqrt[n]{A} + xa^2\sqrt[n]{A^2} + \text{etc.} = p$$

en la délivrant des quantités radicales & l'ordonnant ensuite par rapport à p; ou bien (ce qui revient au même) de l'équation résultante de l'élimination de ω dans ces deux-ci

$$t + u\omega + x\omega^2 + y\omega^3 + \text{etc.} = p$$

& $\omega^n - A = 0$.

Soit $n = 2$, en sorte que $p = t + ua\sqrt{A}$, & $a^2 - 1 = 0$, on trouvera $P = t^2 - Au^2$; c'est le cas que nous avons examiné plus haut (art. 1).

Soit $n = 3$, en sorte que $p = t + ua\sqrt[3]{A} + xa^2\sqrt[3]{A^2}$, & $a^3 - 1 = 0$, on trouvera

$$P = t^3 + Au^3 - 3Atux + A^2x^3.$$

Donc, si on fait de même

$$\Pi = \theta^3 + A\upsilon^3 - 3A\theta\upsilon\xi + A^2\xi^3$$

le produit $P\Pi$ sera de la même forme, c'est à dire qu'on aura

$$P\Pi = T^3 + AV^3 - 3ATVX + A^2X^3$$

& pour avoir les valeurs de T, V & X, on considérera que $\pi = \theta + \upsilon a\sqrt[3]{A} + \xi a^2\sqrt[3]{A^2}$, & que $p\pi = T + Va\sqrt[3]{A} + Xa^2\sqrt[3]{A^2}$, d'où l'on aura

$$T = t\theta + A(u\xi + vx)$$
$$V = tv + \theta u + Ax\xi$$
$$X = t\xi + \theta x + uv.$$

Si on faisoit x & $\xi = 0$, les quantités P & Π deviendroient $t^3 + Au^3$ & $\theta^3 + Av^3$, mais leur produit ne feroit plus de la même forme, à cause que la quantité X ne deviendroit pas nulle.

Soit $n = 4$, en sorte que $p = t + ua\sqrt[4]{A} + xa^2\sqrt[4]{A^2} + ya^3\sqrt[4]{A^3}$, & $a^4 - 1 = 0$, on trouvera

$$P = t^4 - A(2t^2(x^2 + uy) - 4tu^2x + u^4) + A^2(4txy^2 + x^4 - 4ux^2y + 2u^2y^2) - A^3y^4;$$

& le produit d'autant de fonctions de cette forme qu'on voudra sera toujours une fonction de la même forme; & ainsi de suite.

IV.

Si on avoit à résoudre l'équation

$$r^n - As^n = q^m$$

il est évident qu'on y parviendroit si on pouvoit rendre chaque facteur de $r^n - As^n$, comme $r - as\sqrt[n]{A}$, égal à une puissance n^{eme}, a étant toujours une des racines de l'équation $a^n - 1 = 0$.

Soit donc en général $r - sa\sqrt[n]{A} = p^m$, en sorte que $p = \sqrt[m]{(r - sa\sqrt[n]{A})}$, il est facile de concevoir que la valeur de p ne peut être exprimée que de cette maniere

$$p = t + ua\sqrt[n]{A} + xa^2\sqrt[n]{A^2} + ya^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.} + za^{n-1}\sqrt[n]{A^{n-1}};$$

cette quantité étant élevée à la puissance m, on aura (art. préc.)

$$p^m = T + Va\sqrt[n]{A} + Xa^2\sqrt[n]{A^2} + Ya^3\sqrt[n]{A^3} + \text{etc.} + Za^{n-1}\sqrt[n]{A^{n-1}}$$

donc

donc $r = T$, $s = -V$, & $X = 0$, $Y = 0$, etc. $Z = 0$, & la valeur de q sera $= p' p'' p''' \ldots$.

Donc le problème sera résoluble, au moins par cette méthode, toutes les fois qu'on pourra satisfaire aux équations $X = 0$, $Y = 0$ etc. $Z = 0$; mais, quoique ces équations ne soient qu'au nombre de $n - 2$, & que les indéterminées t, u, x etc. soient au nombre de n, il arrivera bien souvent qu'il ne sera pas possible de les résoudre rationellement.

Le cas de $n = 2$ ayant déjà été examiné (art. 1), faisons $n = 3$, & l'on aura $p = t + ua\sqrt[3]{A} + xa^2\sqrt[3]{A^2}$.

Soit maintenant $m = 2$, en sorte qu'il s'agisse de résoudre l'équation

$$r^3 - As^3 = q^2$$

& faisant le carré de p, on aura

$$p^2 = t^2 + 2uxA + (Ax^2 + 2tu)a\sqrt[3]{A} + (u^2 + 2tx)a^2\sqrt[3]{A^2}$$

en sorte qu'on aura

$$T = t^2 + 2Aux,$$
$$V = Ax^2 + 2tu$$
$$X = u^2 + 2tx,$$

par conséquent

$$r = t^2 + 2Aux, \qquad s = -Ax^2 - 2tu$$

& l'équation à laquelle il faudra satisfaire sera $u^2 + 2tx = 0$, laquelle donne sur le champ $x = -\frac{u^2}{2t}$; de sorte qu'en substituant cette valeur de x, dans celles de r & s, on aura

$$r = t^2 - \frac{Au^3}{t}$$

$$s = -\frac{Au^4}{4t^2} - 2tu.$$

A l'égard de $q = p' p''$, on trouvera comme dans le n°. préc.

$$q = t^3 + Au^3 - 3Atux + A^2x^3$$

ou bien en substituant, pour x, sa valeur $-\frac{u^2}{2t}$,

$$q = t^3 + \frac{5Au^3}{2} - \frac{A^2u^6}{8t^3}.$$

Si on vouloit éviter les fractions, il n'y auroit qu'à multiplier r & s, par le carré $4t^2$, & q par le cube $8t^3$, & l'on auroit plus simplement

$$r = 4t(t^3 - Au^3)$$
$$s = -u(8t^3 + Au^3)$$
$$q = 8t^6 + 20At^3u^3 - A^2u^6.$$

Soit $m = 3$ en sorte que l'équation à résoudre soit

$$r^3 - As^3 = q^3$$

on fera le cube de p, & l'on aura

$$p^3 = t^3 + Au^3 + 6Atux + A^2x^3$$
$$+ 3(t^2u + Au^2x + Atx^2)\,a\sqrt[3]{A}$$
$$+ 3(tu^2 + t^2x + Aux^2)\,a^2\sqrt[3]{A^2}$$

d'où

$$T = t^3 + Au^3 + 6Atux + A^2x^3$$
$$V = 3t^2u + 3A(u^2x + tx^2)$$
$$X = 3(tu^2 + tx^2 + Aux^2)$$

ainsi l'on aura

$$r = t^3 + Au^3 + 6Atux + A^2x^3$$
$$s = -3t^2u - 3A(tx^2 + u^2x)$$

& il

& il faudra que l'on ait $X = 0$, ſavoir

$$tu^2 + t^2 x + Aux^2 = 0;$$

quant à la valeur de q, elle ſera la même que ci-deſſus, ſavoir

$$q = t^3 + Au^3 - 3Atux + A^2 x^3.$$

Ainſi toute la difficulté ſe réduit à réſoudre l'équation $tu^2 + t^2 x + Aux^2 = 0$; c'eſt à dire, à trouver une valeur quelconque rationelle de t, ou de u, ou de x qui ſatisfaſſe à cette équation.

Pour la mettre ſous une forme plus ſimple, faiſons $u = ft$, $x = fgt$; & diviſant par ft^3, on aura $f + g + Af^2 g^2 = 0$; ou bien, en diviſant par fg, $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = Afg$; ſoit de plus $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = h$, $\frac{1}{f} - \frac{1}{g} = l$, on aura $\frac{4}{fg} = h^2 - l^2$; donc l'équation précédente deviendra celle-ci $h = \frac{4A}{h^2 - l^2}$, c'eſt à dire $4A = h(h + l)(h - l)$; ſoit encore $l = kh$, & l'on aura $4A = h^3(1 - k^2)$, c'eſt à dire que $\frac{4A}{1 - k^2}$ devra être un cube; & par conſéquent que $2A^2(1 - k^2)$ devra en être un auſſi, dont la racine ſera $\frac{2A}{h}$.

Mais, comme nous ne nous propoſons pas ici de traiter cette matiere à fond, nous ne nous y arrêterons pas davantage quant à préſent; nous obſerverons ſeulement que M. de Fermat prétend, dans ſes remarques ſur Diophante, avoir démontré en général ce théoreme,

 que

que l'équation $r^n + s^n = q^n$ n'eſt jamais réſoluble d'une maniere rationelle lorſque n ſurpaſſe 2; mais ce Savant ne nous a pas laiſſé ſa démonſtration, & il ne paroit pas que perſonne l'ait encore trouvée juſqu'à préſent. M. Euler a à la vérité démontré ce théoreme dans le cas de $n = 3$, & de $n = 4$, par une analiſe particuliere & très ingénieuſe, mais qui ne paroit pas applicable en général à tous les autres cas; ainſi ce théoreme eſt un de ceux qui reſtent encore à démontrer, & qui méritent le plus l'attention des Géometres.



SUR

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

PAR M. DE LA GRANGE. (*)

Viete est le premier qui ait tâché de donner une méthode générale pour résoudre les équations numériques; mais, quoique cette méthode ait été ensuite perfectionnée & simplifiée à quelques égards par Harriot, Ougtred, Pell etc. elle est encore si compliquée, & si rebutante par le grand nombre d'opérations qu'elle demande, que les Géometres paroissent l'avoir entiérement abandonnée. Celle que l'on suit communément est due à Newton, & elle est très facile & très simple. Il faut supposer seulement qu'on ait déjà trouvé la valeur de la racine qu'on cherche, approchée au moins jusqu'à sa dixieme partie près; alors on égale cette valeur, plus une nouvelle inconnue, à celle de l'équation proposée, & faisant la substitution, on a une seconde équation dont la racine est ce qu'il faudroit ajouter à la premiere racine approchée pour avoir la racine exacte; mais comme, par l'hypothese, ce reste à ajoûter à la premiere valeur de la racine est moindre qu'un dixieme de cette racine, on peut dans l'équation dont il s'agit négliger le carré & les puissances plus hautes de l'inconnue; de sorte que l'équation étant ainsi réduite au premier degré, on aura sur le champ la valeur de l'inconnue en décimales; cette valeur ne sera qu'approchée, mais on pourra s'en servir pour en trouver une autre plus exacte en faisant sur la seconde équation la même opération que sur la premiere &

(*) Lû à l'Académie le 20 Avril 1769.

& ainsi de suite. De cette maniere on trouve à chaque opération de nouvelles décimales à ajoûter, ou à retrancher de la valeur de la racine déjà trouvée, & on a par conséquent cette racine d'autant plus exactement qu'on pousse le calcul plus loin.

On peut aussi, comme l'a pratiqué Halley, revenir toujours à la premiere équation proposée en y substituant à la place de l'inconnue la valeur de la racine de plus en plus approchée & augmentée d'un reste inconnu; ce qui paroit en quelque façon plus simple & plus commode.

Telle est la méthode usitée pour résoudre les équations numériques par approximation. Plusieurs savans Géometres se sont appliqués à la rendre encore plus exacte & plus facile, soit en ayant égard aux termes où l'inconnue est au second degré, soit en donnant des formules générales à l'aide desquelles on puisse trouver sur le champ la valeur de la fraction qui est le reste à ajoûter à la racine approchée; mais aucun d'eux ne paroit avoir fait attention aux inconvéniens ou plutôt aux imperfections qui se trouvent encore dans cette méthode; du moins personne, que je sache, n'a donné jusqu'à présent les moyens d'y remédier.

La premiere & la principale de ces imperfections consiste en ce qu'il faut supposer qu'on ait déjà trouvé la valeur de la racine cherchée, approchée jusqu'à sa dixieme partie près; car, comme on n'a point encore de regle générale & sûre pour trouver, dans une équation quelconque, la valeur approchée de chacune de ses racines réelles, la méthode dont il s'agit n'est proprement applicable qu'aux cas où l'on connoit d'avance à peu près la valeur de la racine qu'on cherche. Il est vrai que Rolle a donné une méthode, qu'on appelle des *cascades*, pour approcher des racines des équations numériques aussi près que l'on veut; mais cette méthode n'est pas toujours sûre, surtout lorsqu'il y a dans l'équation des racines imaginaires, auquel cas elle laisse toujours en doute si ces racines sont réelles, ou non: (voyez l'*Algebre* de Rolle, chap. III & VI du livre 2).

Une

Une ſeconde imperfection regarde la nature même de la méthode par laquelle on approche de la valeur de la racine cherchée; ſuivant cette méthode on néglige, à chaque opération, des termes dont on ne connoit pas la valeur; de ſorte qu'il eſt impoſſible de pouvoir juger de la quantité de l'approximation, & de s'aſſurer du degré d'exactitude qui doit réſulter de chaque correction.

D'ailleurs ne pourroit-il pas arriver que la ſérie qui donne la racine cherchée fût très peu convergente, ou même qu'elle devînt divergente après avoir été convergente dans ſes premiers termes? Au moins il n'eſt pas démontré que cela ne puiſſe jamais avoir lieu dans la méthode dont nous parlons.

Enfin, quand même la ſérie ſeroit toujours convergente, il eſt clair qu'elle ne donneroit jamais qu'une valeur approchée de la racine dans le cas même où elle ſeroit égale à un nombre commenſurable. Il eſt vrai que l'on a des méthodes particulieres pour trouver les racines commenſurables; mais c'eſt toujours une grande imperfection de la méthode dont il s'agit de ne pas donner la valeur exacte de ces racines.

§. I.

Méthode pour trouver, dans une équation numérique quelconque, la valeur entiere la plus approchée de chacune de ſes racines réelles.

1. *Théoreme I.* Si l'on a une équation quelconque, & que l'on trouve deux nombres tels, qu'étant ſubſtitués ſucceſſivement à la place de l'inconnue de cette équation, ils donnent deux réſultats de ſigne contraire, l'équation aura néceſſairement au moins une racine réelle dont la valeur ſera entre ces deux nombres.

Ce théoreme eſt connu depuis longtems, & l'on a coûtume de le démontrer par la théorie des lignes courbes; mais on peut auſſi le démontrer directement par la théorie des équations, en cette ſorte. Soit x l'inconnue de l'équation, & α, β, γ etc. ſes racines, l'équation ſe réduira, comme l'on ſait, à cette forme

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots = 0.$$

Or

Or soient p, & q, les nombres qui substitués par x donneront des résultats de signe contraire, il faudra donc que ces deux quantités

$$(p - \alpha)\ (p - \beta)\ (p - \gamma) \cdots$$
$$(q - \alpha)\ (q - \beta)\ (q - \gamma) \cdots$$

soient de signes différens; par conséquent il faudra qu'il y ait au moins deux facteurs correspondans comme $p - \alpha$ & $q - \alpha$ qui soient de signes contraires; donc il y aura au moins une des racines de l'équation comme α, qui sera entre les nombres p, & q, c'est à dire plus petite que le plus grand de ces deux nombres, & plus grande que le plus petit d'entr'eux; donc cette racine sera nécessairement réelle.

2. *Corollaire* 1. Donc, si les nombres p, & q, ne different l'un de l'autre que de l'unité, ou d'une quantité moindre que de l'unité, le plus petit de ces nombres, s'il est entier, ou le nombre entier qui sera immédiatement moindre que le plus petit de ces deux nombres, s'il n'est pas entier, sera la valeur entiere la plus approchée d'une des racines de l'équation. Si la différence entre p, & q, est plus grande que l'unité, alors nommant n, $n+1$, $n+2$ etc. les nombres entiers qui tombent entre p & q, il est clair que, si on substitue successivement à la place de l'inconnue les nombres p, n, $n+1$, $n+2$ etc. q, on trouvera nécessairement deux substitutions consécutives qui donneront des résultats de signes différens; donc, puisque les nombres qui donneront ces deux résultats ne différent entr'eux que de l'unité, on trouvera comme ci-dessus la valeur entiere la plus approchée d'une des racines de l'équation.

3. *Corollaire* 2. Toute équation dont le dernier terme est négatif, en supposant le premier positif, a nécessairement une racine réelle positive, dont on pourra trouver la valeur entiere la plus approchée en substituant à la place de l'inconnue les nombres 0, 1, 2, 3 etc. jusqu'à ce que l'on rencontre deux substitutions qui donnent des résultats de signe contraire.

Car, en supposant le premier terme x^m, & le dernier $-$ H, (H étant un nombre positif) on aura, en faisant $x = 0$, le résultat négatif $-$H, & en faisant $x = \infty$, le résultat positif ∞^m; donc on

aura

aura ici $p = 0$, & $q = \infty$, donc les nombres entiers intermédiaires seront tous les nombres naturels 1, 2, 3 etc. donc etc. (Coroll. préc.).

De là on voit 1°. que toute équation d'un degré impair, dont le dernier terme est négatif, a nécessairement une racine réelle positive.

2°. Que toute équation d'un degré impair, dont le dernier terme est positif, a nécessairement une racine réelle négative; car, en changeant x en $-x$, le premier terme de l'équation deviendra négatif; donc, changeant tous les signes pour rendre de nouveau le premier terme positif, le dernier deviendra négatif; donc l'équation aura alors une racine réelle positive; par conséquent l'équation primitive aura une racine réelle négative.

3°. Que toute équation d'un degré pair, dont le dernier terme est négatif, a nécessairement deux racines réelles, l'une positive & l'autre négative; car premierement elle aura une racine réelle positive; ensuite, comme en changeant x en $-x$, le premier terme demeure positif, la transformée aura aussi une racine réelle positive; donc l'équation primitive en aura une réelle & négative.

4. *Remarque.* Comme on peut toujours changer les racines négatives d'une équation quelconque en positives, en changeant seulement le signe de l'inconnue, nous ne considérerons dans la suite, pour plus de simplicité, que les racines positives; ainsi, quand il s'agira d'examiner les racines d'une équation donnée, on considérera d'abord les racines positives de cette équation, ensuite on y changera les signes de tous les termes où l'inconnue se trouvera élevée à une puissance impaire, & on considérera de même les racines positives de cette nouvelle équation; ces racines prises en moins seront les racines négatives de la proposée.

5. *Théoreme II.* Si dans une équation quelconque qui ait une ou plusieurs racines réelles & inégales, on substitue successivement à la place de l'inconnue deux nombres dont l'un soit plus grand & dont l'autre soit plus petit que l'une de ces racines, & qui different en même

 tems

tems l'un de l'autre d'une quantité moindre que la différence entre cette racine & chacune des autres racines réelles de l'équation, ces deux substitutions donneront nécessairement deux résultats de signes contraires.

En effet, soit α une des racines réelles & inégales de l'équation, & β, γ, δ etc. les autres racines quelconques; soit de plus ϱ la plus petite des différences entre la racine α & chacune des autres racines réelles de l'équation, il est clair qu'en prenant $p > \alpha$, $q < \alpha$, & $p - q < \varrho$, les quantités $p - \alpha$, & $q - \alpha$ seront de signes contraires, & que les quantités $p - \beta$, $p - \gamma$ etc. seront chacune de même signe que sa correspondante $q - \beta$, $q - \gamma$ etc.; car, si $p - \beta$, & $q - \beta$ étoient de signes contraires, il faudroit que β fût aussi compris entre p, & q, ce qui ne se peut. Donc les deux quantités

$$(p - \alpha)\ (p - \beta)\ (p - \gamma) \cdots\cdots$$
$$(q - \alpha)\ (q - \beta)\ (q - \gamma) \cdots\cdots$$

c'est à dire les résultats des substitutions de p, & q à la place de l'inconnue x (art. 1) seront nécessairement de signes contraires.

6. *Corollaire* 1. Donc, si dans une équation quelconque on substitue successivement à la place de l'inconnue les nombres en progression arithmétique

$$0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta,\ 4\Delta \text{ etc.} \quad - - - - - - \quad (A)$$

les résultats correspondans formeront une suite dans laquelle il y aura autant de variations de signes que l'équation proposée aura de racines réelles positives & inégales, mais dont les différences ne soient pas moindres que la différence Δ de la progression. De sorte que, si on prend Δ égale ou moindre que la plus petite des différences entre les différentes racines positives & inégales de l'équation, la suite dont il s'agit aura nécessairement autant de variations de signe que l'équation contiendra de racines réelles positives, & inégales.

Donc

Donc, si la différence Δ est en même tems égale ou moindre que l'unité, on trouvera aussi par ce moyen la valeur entiere approchée de chacune des racines réelles positives & inégales de l'équation (art. 2).

Si l'équation ne peut avoir qu'une seule racine réelle, & positive, ou si elle en a plusieurs, mais dont les différences ne soient pas moindres que l'unité, il est clair qu'on pourra faire $\Delta = 1$, c'est à dire, qu'on pourra prendre les nombres naturels 0, 1, 2, 3 etc. pour les substituer à la place de l'inconnue; mais, s'il y a dans l'équation des racines inégales dont les différences soient moindres que l'unité, alors il faudra prendre Δ moindre que l'unité, & telle qu'elle soit égale ou moindre que la plus petite des différences entre les racines dont il s'agit; ainsi la difficulté se réduit à trouver la valeur qu'on doit donner à Δ, en sorte qu'on soit assuré qu'elle ne surpasse pas la plus petite des différences entre les racines positives & inégales de l'équation proposée; c'est l'objet du probleme suivant.

7. *Corollaire 2.* Toute équation qui n'a qu'un seul changement de signe, ne peut avoir qu'une seule racine réelle positive.

Il est d'abord clair que l'équation aura nécessairement une racine réelle positive, à cause que son dernier terme sera de signe différent du premier (art. 3).

Or, soit (en supposant le premier terme positif comme à l'ordinaire) X la somme de tous les termes positifs de l'équation, & Y la somme de tous les négatifs, en sorte que l'équation soit $X - Y = 0$; & puisqu'il n'y a par l'hypothese qu'un seul changement de signe, il est clair que les puissances de l'inconnue x du polynome X seront toutes plus hautes que celles du polynome Y; de sorte que, si x^r est la plus petite puissance de x dans le polynome X, & qu'on divise les deux polynomes X & Y par x^r, la quantité $\frac{X}{x^r}$ ne contiendra que des puissances positives de x, & la quantité $\frac{Y}{x^r}$ ne contiendra que des puissances

négatives de x; d'où il s'enſuit que, x croiſſant, la valeur de $\frac{X}{x^r}$ devra croître auſſi, & x diminuant, $\frac{X}{x^r}$ diminuera auſſi, à moins que le polynome X ne contienne que le ſeul terme x^r, auquel cas $\frac{X}{x^r}$ ſera toujours une quantité conſtante; au contraire, x croiſſant, la valeur de $\frac{Y}{x^r}$ diminuera néceſſairement, & x diminuant, $\frac{Y}{x^r}$ ira en augmentant. Or, ſoit a la racine réelle & poſitive de l'équation, on aura donc lorſque $x = a$, $X = Y$; donc auſſi $\frac{X}{x^r} = \frac{Y}{x^r}$; donc, en ſubſtituant au lieu de x des nombres quelconques plus grands que a, on aura toujours $\frac{X}{x^r} > \frac{Y}{x^r}$, & par conſéquent X — Y égal à un nombre poſitif; & en ſubſtituant au lieu de x des nombres moindres que a, on aura toujours $\frac{X}{x^r} < \frac{Y}{x^r}$, & par conſéquent X — Y égal à un nombre négatif; donc il ſera impoſſible que l'équation ait des racines réelles poſitives plus grandes ou plus petites que a.

8. *Probleme.* Une équation quelconque étant donnée, trouver une autre équation dont les racines ſoient les différences entre les racines de l'équation donnée.

Soit donnée l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc.} = 0 \; \text{- - -} \; (B)$$

on ſait que x peut être indifféremment égal à une quelconque de ſes racines; or ſoit x' une autre racine quelconque de la même équation, en ſorte que l'on ait auſſi

$$x'^m - Ax'^{m-1} + Bx'^{m-2} - Cx'^{m-3} + \text{etc.} = 0;$$

&

& soit u la différence entre les deux racines x, & x', de maniere que l'on ait $x' = x + u$; substituant cette valeur de x' dans la derniere équation, & ordonnant les termes par rapport à u, on aura une équation en u du même degré m, laquelle, en commençant par les derniers termes, sera de cette forme

$$X + Yu + Zu^2 + Vu^3 + \text{etc.} + u^m = 0$$

les coëfficiens X, Y, Z, etc. étant des fonctions de x telles que

$$X = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc.}$$

$$Y = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \text{etc.}$$

$$Z = \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ax^{m-3} + \text{etc.}$$

etc.

c'est à dire

$$Y = \frac{dX}{dx}, \quad Z = \frac{d^2X}{2dx^2}, \quad V = \frac{d^3X}{2.3dx^3} \quad \text{etc.}$$

Donc, puisque par l'équation donnée (B) on a $X = 0$, l'équation précédente étant divisée par u deviendra celle-ci:

$$Y + Zu + Vu^2 + \text{etc.} + u^{m-1} = 0 \quad - \; - \; - \quad (C)$$

Cette équation, si on y substitue pour x une quelconque des racines de l'équation (B), aura pour racines les différences entre cette racine & toutes les autres de la même équation (B); donc, si on combine les équations (B) & (C) en éliminant x, on aura une équation en u dont les racines seront les différences entre chacune des racines de l'équation (B) & toutes les autres racines de la même équation; ce sera l'équation cherchée.

Mais, sans exécuter cette élimination qui seroit souvent fort laborieuse, il suffira de considérer

1°. Que α, β, γ, etc. étant les racines de l'équation en x, celles de l'équation en u seront $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$ etc. $\beta - \alpha$, $\beta - \gamma$ etc.

$\gamma -$

$\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ etc. etc.; d'où l'on voit que ces racines feront au nombre de $m(m-1)$, & que de plus elles feront égales deux à deux, & de signes contraires; de sorte que l'équation en u manquera nécessairement de toutes les puissances impaires de u. Donc, en faisant $\frac{m(m-1)}{2} = n$, & $u^2 = v$, l'équation dont il s'agit sera de cette forme

$$v^n - av^{n-1} + bv^{n-2} - cv^{n-3} + \text{etc.} = 0 \quad \dots \quad (D).$$

2°. Que $(\alpha - \beta)^2$, $(\alpha - \gamma)^2$, $(\beta - \gamma)^2$ etc. étant les différentes valeurs de v dans l'équation (D), le coëfficient a sera égal à la somme de tous leurs produits deux à deux, etc. Or il est facile de voir que $(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 +$ etc. $= (m - 1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.}) - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \text{etc.})$; mais on sait que $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \text{etc.} = B$; & $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.} = A^2 - 2B$; donc on aura $a = (m-1)(A^2 - 2B) - 2B$, savoir $a = (m-1)A^2 - 2mB$; & on pourra de la même maniere trouver la valeur des autres coëfficiens b, c etc.

Pour y parvenir plus facilement, supposons

$$A1 = \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.}$$
$$A2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.}$$
$$A3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \text{etc.}$$
etc.

& l'on aura comme l'on sait

$$A1 = A$$
$$A2 = AA1 - 2B$$
$$A3 = AA2 - BA1 + 3C$$
$$A4 = AA3 - BA2 + CA1 - 4D$$
etc.

Sup-

Supposons de plus

$$a1 = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + \text{etc.}$$
$$a2 = (\alpha - \beta)^4 + (\alpha - \gamma)^4 + (\beta - \gamma)^4 + \text{etc.}$$
$$a3 = (\alpha - \beta)^6 + (\alpha - \gamma)^6 + (\beta - \gamma)^6 + \text{etc.}$$

etc.

il est facile de voir que l'on aura

$$a1 = (m - 1)A2 - 2\left(\frac{(A1)^2 - A2}{2}\right)$$
$$a2 = (m - 1)A4 - 4(A1A3 - A4) + 6\left(\frac{(A2)^2 - A4}{2}\right)$$
$$a3 = (m - 1)A6 - 6(A1A5 - A6) + 15(A2A4 - A6) - 20\left(\frac{(A3)^2 - A6}{2}\right)$$

etc.

ou bien

$$a1 = mA2 - 2\frac{(A1)^2}{2}$$
$$a2 = mA4 - 4A1A3 + 6\frac{(A2)^2}{2}$$
$$a3 = mA6 - 6A1A5 + 15A2A4 - 20\frac{(A3)^2}{2}.$$

etc.

& en général

$$a\mu = mA2\mu - 2\mu A1(A2\mu - 1)$$
$$+ \frac{2\mu(2\mu - 1)}{2}A2(A2\mu - 2) - \text{etc.}$$
$$\pm \frac{2\mu(2\mu - 1)(2\mu - 2) \cdots (\mu + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu} \cdot \frac{(A\mu)^2}{2}.$$

Les quantités $a1$, $a2$, $a3$ etc. étant ainsi connues, on aura sur le champ les valeurs des coëfficiens a, b, c etc. de l'équation (D) par les formules

$$a = a1$$

$$b = \frac{aa1 - a2}{2}$$

$$c = \frac{ba1 - aa2 + a3}{3}$$

$$d = \frac{ca1 - ba2 + aa3 - a4}{4}$$

etc.

Ainsi on pourra déterminer directement les coëfficiens a, b, c etc. de l'équation (C) par ceux de l'équation donnée (B). Pour cela on cherchera d'abord par les formules ci-dessus les valeurs des quantités $A1$, $A2$, $A3$ etc. jusqu'à $A2n$; ensuite à l'aide de celles-ci on cherchera celles des quantités $a1$, $a2$, $a3$ etc. jusqu'à an, & enfin par ces dernieres on trouvera les valeurs cherchées des coëfficiens a, b, c etc.

9. *Remarque.* Il est bon de remarquer que l'équation (D) exprime également les différences entre les racines positives & négatives de l'équation (B); de sorte que la même équation aura lieu aussi lorsqu'on changera x en $-x$ pour avoir les racines négatives (art. 4).

De plus il est clair que l'équation (D) sera toujours la même soit qu'on augmente, ou qu'on diminue toutes les racines de l'équation proposée d'une même quantité quelconque; donc, si cette équation a son second terme, on pourra le faire disparoitre, & cherchant ensuite l'équation en v qui en résultera, on aura la même équation qu'on auroit eue si on n'avoit pas fait évanouir le second terme; mais l'évanouissement de ce terme rendra toujours la recherche des coëfficiens a, b, c etc. un peu plus facile, parce qu'on aura $A = 0$, & par conséquent aussi $A1 = 0$, de sorte que les formules de l'art. préc. deviendront

A 1

$$A1 = 0$$
$$A2 = -2B$$
$$A3 = 3C$$
$$A4 = -BA2 - 4D$$
etc.

$$a1 = mA2$$
$$a2 = mA4 + 6.\frac{(A2)^2}{2}$$
$$a3 = mA6 + 15A2\,A4 - 20\frac{(A3)^2}{2}$$
etc.

$$a = a1$$
$$b = \frac{aa1 - a2}{2}$$
$$c = \frac{ba1 - aa2 + a3}{3}$$
etc.

10. *Corollaire* 1. Puiſque les racines de l'équation (D) ſont les carrés des différences entre les racines de l'équation propoſée (B), il eſt clair que ſi cette équation (D) avoit tous ſes termes de même ſigne, auquel cas elle n'auroit aucune racine réelle & poſitive, il eſt clair, dis-je, que, dans ce cas, les différences entre les racines de l'équation (B) ſeroient toutes imaginaires; de ſorte que cette équation ne pourroit avoir qu'une ſeule racine réelle, ou bien pluſieurs racines réelles & égales entr'elles; ſi ce dernier cas a lieu, on le reconnoitra & on le réſoudra par les méthodes connues (voyez auſſi plus bas le §. II); à l'égard du premier cas, il s'enſuit de l'art. 6 qu'on pourra prendre $\Delta = 1$.

11. *Corollaire* 2. Si l'équation (B) a une ou plusieurs couples de racines égales, il est clair que l'équation (D) aura une ou plusieurs valeurs de v égales à zéro, de sorte qu'elle sera alors divisible une ou plusieurs fois par v; cette division faite, lorsqu'elle a lieu, soit l'équation restante disposée à rebours de cette maniere

$$1 + \alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 + \text{etc.} + \pi v^r = 0 \quad \ldots (E)$$

r étant $=$ ou $<$ n; qu'on fasse $v = \frac{1}{y}$, & ordonnant l'équation par rapport à y on aura

$$y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \text{etc.} + \pi = 0 \quad \ldots (F).$$

Qu'on cherche par les méthodes connues la limite des racines positives de cette équation, & soit l cette limite, en sorte que l surpasse chacune des valeurs positives de y; donc $\frac{1}{l}$ sera moindre que chacune des valeurs positives de $\frac{1}{y}$ ou de v; & par conséquent moindre que chacune des valeurs de u^2, à cause de $v = u^2$ (probl. préc.).

Donc $\frac{1}{\sqrt{l}}$ sera nécessairement moindre qu'aucune des valeurs de u, c'est à dire qu'aucune des différences entre les racines réelles & inégales de l'équation proposée (B).

Donc 1°. si $\sqrt{l} < 1$, alors on sera sûr que l'équation (B) n'aura point de racines rélles dont les différences soient moindres que l'*unité*; ainsi dans ce cas on pourra faire sans scrupule $\Delta = 1$ (art. 6).

2°. Mais si $\sqrt{l} =$ ou > 1, alors il peut se faire qu'il y ait dans l'équation (B) des racines dont les différences soient moindres que l'unité; mais, comme la plus petite de ces différences sera toujours nécessairement plus grande que $\frac{1}{\sqrt{l}}$, on pourra toujours prendre $\Delta =$ ou $< \frac{1}{\sqrt{l}}$ (art. cité).

En

En général soit k le nombre entier qui est égal ou immédiatement plus grand que $\sqrt{l}$, & on pourra toujours prendre $\Delta = \frac{1}{k}$.

12. *Scholie* 1. Quant à la maniere de trouver la limite des racines d'une équation, la plus commode & la plus exacte est celle de Newton, laquelle consiste à trouver un nombre dont les racines de l'équation proposée étant diminuées, l'équation résultante n'ait aucune variation de signe; car alors cette équation ne pourra avoir que des racines négatives; par conséquent le nombre dont les racines de la proposée auront été diminuées surpassera nécessairement la plus grande de ces racines.

Ainsi, pour chercher la limite l des racines de l'équation

$$(F) \cdots\; y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \text{etc.} = 0,$$

on y mettra $y + l$ au lieu de y, & ordonnant l'équation résultante par rapport à y, elle deviendra

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + \text{etc.} + y^r = 0$$

dans laquelle

$$P = l^r + \alpha l^{r-1} + \beta l^{r-2} + \gamma l^{r-3} + \text{etc.} + \pi$$

$$Q = rl^{r-1} + (r-1)\alpha l^{r-2} + (r-2)\beta l^{r-3} + \text{etc.}$$

$$R = \frac{r(r-1)}{2} l^{r-2} + \frac{(r-1)(r-2)}{2} \alpha l^{r-3} + \text{etc.}$$

$$S = \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} l^{r-3} + \text{etc.}$$

etc.

& il n'y aura qu'à chercher une valeur de l qui étant substitué dans les quantités P, Q, R etc. les rende toutes positives; en commençant par la derniere de ces quantités laquelle n'aura que deux termes, & remontant successivement aux quantités précédentes, on déterminera facilement le plus petit nombre entier qui pourra être pris pour l, & qui sera la limite la plus proche cherchée.

Si on vouloit éviter tout tâtonnement, il n'y auroit qu'à prendre pour l le plus grand coëfficient des termes négatifs de l'équation (F) augmenté d'une unité; car il est facile de prouver qu'en donnant à l cette valeur, les quantités P, Q, R etc. seront toujours positives.

Cette maniere d'avoir la limite des racines d'une équation quelconque est due, je crois, à Maclaurin; mais en voici une autre qui donnera le plus souvent des limites plus approchées.

Soient $-\mu y^{r-m} - \nu y^{r-n} - \pi y^{r-p} -$ etc. les termes négatifs de l'équation (F), on prendra pour l la somme des deux plus grandes des quantités $\sqrt[m]{\mu}$, $\sqrt[n]{\nu}$, $\sqrt[p]{\pi}$ etc., ou un nombre quelconque plus grand que cette somme. Cette proposition peut se démontrer de la même maniere que la précédente; ainsi nous ne nous y arrêterons pas.

Au reste il faut observer que les limites trouvées de l'une, ou de l'autre de ces deux manieres seront rarement les plus prochaines limites; pour en avoir de plus petites on essayera successivement pour l des nombres moindres, & on prendra le plus petit de ceux qui satisferont aux conditions que P, Q, R etc. soient des nombres positifs.

13. *Scholie 2.* Ayant donc trouvé la limite l de l'équation (F), & pris k égal ou immédiatement plus grand que $\sqrt{l}$, on fera $\Delta = \frac{1}{k}$ (art. 10), & on substituera successivement dans l'équation proposée à la place de l'inconnue les nombres 0, $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$, $\frac{3}{k}$ etc.; les résultats venans de ces substitutions formeront une série dans laquelle il y aura autant de variations de signe que l'équation proposée contiendra de racines réelles positives & inégales, & de plus chacune de ces racines se trouvera entre les deux résultats consécutifs qui seront de signe différens, de sorte que si les nombres $\frac{h}{k}$, & $\frac{h+1}{k}$ donnent

des

des résultats de signe contraire, il y aura une racine entre $\frac{h}{k}$, & $\frac{h+1}{k}$; par conséquent le nombre entier qui approchera le plus de $\frac{h}{k}$ sera la valeur entiere approchée de cette racine (art. 2).

Ainsi on connoîtra par ce moyen non seulement le nombre des racines positives, & inégales de l'équation proposée, mais encore la valeur entiere approchée de chacune de ces racines.

Au reste il est clair que si l'on trouvoit un, ou plusieurs résultats égaux à zéro, les nombres qui auroient donné ces résultats seroient des racines exactes de l'équation proposée.

Pour faciliter, & abréger ce calcul on fera encore les remarques suivantes.

1°. Si on cherche par les méthodes des art. préc. la limite des racines positives de l'équation proposée, il est clair qu'il sera inutile d'y substituer à la place de l'inconnue des nombres plus grands que cette limite; en effet il est facile de voir qu'en substituant des nombres plus grands que cette limite, on aura toujours nécessairement des résultats positifs. Ainsi, nommant λ la limite dont il s'agit, le nombre des substitutions à faire sera égal à λk, & par conséquent toujours limité.

En général, sans chercher la limite λ, il suffira de pousser les substitutions jusqu'à ce que le premier terme de l'équation, ou la somme des premiers termes s'il y en a plusieurs consécutifs avec le même signe $+$, soit égale ou plus grande que la somme de tous les termes négatifs; car il est facile de prouver, par la méthode de l'art. 7, qu'en donnant à l'inconne des valeurs plus grandes, on aura toujours à l'infini des résultats positifs.

2°. Au lieu de substituer à la place de l'inconnue x les fractions $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$ etc. on y mettra d'abord $\frac{x}{k}$ à la place de x, ou ce qui re-

vient

vient au même, on multipliera le coëfficient du second terme par k, celui du troisieme terme par k^2, & ainsi des autres; & on y substituera ensuite à la place de x les nombres naturels 0, 1, 2, 3 etc. jusqu'à la limite de cette équation, ou bien jusqu'à ce que le premier terme, ou la somme des premiers, quand il y en a plusieurs consécutifs avec le même signe, soit égale, ou plus grande que la somme des négatifs; par ce moyen les résultats seront tous des nombres entiers, & les racines de l'équation proposée se trouveront nécessairement entre les nombres consécutifs qui donneront des résultats de signe contraire, ces nombres étant divisés par k, comme nous l'avons vu plus haut.

3°. Soit m le degré de l'équation dans laquelle il s'agit de substituer successivement les nombres naturels 0, 1, 2, 3 etc. je dis que, dès que l'on aura trouvé les $m + 1$ premiers résultats, c'est à dire, ceux qui répondent à $x = 0, 1, 2$ etc. m, on pourra trouver tous les suivans par la seule addition.

Pour cela il n'y aura qu'à chercher les différences des résultats trouvés, lesquelles seront au nombre de m, ensuite les différences de ces différences, lesquelles ne seront plus qu'au nombre de $m - 1$, & ainsi de suite jusqu'à la différence m^{eme}.

Cette derniere différence sera nécessairement constante, parce que l'exposant de la plus haute puissance de l'inconnue est m; ainsi on pourra continuer la suite des différences m^{emes} aussi loin qu'on voudra en répétant seulement la même différence trouvée; ensuite par le moyen de cette suite on pourra par la simple addition continuer celle des différences $m - 1^{emes}$, & à l'aide de celle-ci, on pourra continuer de même la suite des différences $m - 2^{emes}$, & ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à la premiere suite qui sera celle des résultats cherchés.

Il est bon d'observer ici que si les termes correspondans des différentes suites dont nous parlons étoient tous positifs, les termes suivans dans chaque suite seroient tous aussi positifs. Or, puisque la derniere différence est toujours positive, il est clair qu'on parviendra nécessairement dans chaque suite à des termes tous positifs; ainsi il

suffira

suffira de continuer toutes ces suites jusqu'à ce que leurs termes correspondans soient devenus tous positifs; parce qu'alors on sera sûr que la série des résultats continuée aussi loin qu'on voudra sera toujours positive, & que par conséquent elle ne contiendra plus aucune variation de signe.

Pour éclaircir ceci par un exemple, soit proposée l'équation

$$x^3 - 63x + 189 = 0$$

on trouvera d'abord que les résultats qui répondent à $x = 0, 1, 2, 3$ sont $189, 127, 71, 27$, d'où l'on tirera les diff. 1eres $-62, -56, -44$, les diff. 2des $6, 12$, & la diff. 3eme 6; ainsi on formera les quatre séries suivantes

6	6	6	6	6	6	6	etc.
6	12	18	24	30	36	42	etc.
−62	−56	−44	−26	−2	28	64	etc.
189	127	71	27	1	−1	27	etc.

dont la loi est que chaque terme est égal à la somme du terme précédent de la même série, & de celui qui y est au dessus dans la série précédente; de sorte qu'il est très facile de continuer ces séries aussi loin qu'on voudra.

Or la derniere de ces quatre séries sera, comme l'on voit, celle des résultats qui viennent de la substitution des nombres naturels 0, 1, 2 etc. à la place de x dans l'équation proposée, & comme les termes de la 7eme colonne, savoir 6, 42, 64, 27, sont tous positifs, il s'ensuit que les termes suivans seront tous aussi positifs, de sorte que la série des résultats continuée aussi loin qu'on voudra n'aura plus aucune variation de signe.

14. *Remarque.* On avoit déjà remarqué que l'on pouvoit trouver la valeur approchée de toutes les racines réelles & inégales d'une équation quelconque, en y substituant successivement à la place de l'inconnue différens nombres en progression arithmétique; mais cette re-

marque ne pouvoit pas être d'une grande utilité, faute d'avoir une méthode pour déterminer la progression que l'on doit employer dans chaque cas, en sorte que l'on soit assuré qu'elle fasse connoitre toutes les racines réelles & inégales de l'équation proposée. Nous en sommes heureusement venus à bout à l'aide du probleme de l'art. 8.

Au reste, nous verrons encore ci-après d'autres usages de ce même probleme par rapport aux racines égales & imaginaires.

§. II.

De la maniere d'avoir les racines égales & imaginaires des équations.

15. Nous n'avons considéré dans le §. préc. que les racines réelles & inégales de l'équation proposée (B); supposons maintenant que cette équation ait des racines égales; dans ce cas il faudra (art. 11) que l'équation (D) soit divisible autant de fois par u, qu'il y aura de combinaisons de racines égales deux à deux; par conséquent il faudra qu'il y ait dans cette équation (D) autant des derniers termes qui manquent; ainsi on connoitra d'abord par ce moyen combien de racines égales il y aura dans la proposée.

Or, puisque dans le cas des racines égales on a nécessairement $u = 0$ (art. 8), l'équation (C) du même art. donnera pour ce cas $Y = 0$; ainsi il faudra que les deux équations en x, $X = 0$, & $Y = 0$, aient lieu en même tems lorsque x est égal à une quelconque des racines égales de l'équation (B).

On cherchera donc par les méthodes connues le plus grand commun diviseur des deux polynomes X & Y, & faisant ensuite ce diviseur égal à zéro, on aura une équation qui ne sera composée que des racines égales de la proposée, mais élevées à une puissance moindre de l'unité.

Soit R le plus grand commun diviseur de X & de Y, & X' le quotient de X divisé par R, il est facile de voir que l'équation

X' =

$X' = 0$ contiendra toutes les mêmes racines que l'équation proposée $X = 0$, avec cette différence que les racines multiples de cette équation seront simples dans l'équation $X' = 0$; ainsi l'équation $X' = 0$ sera dans le cas des méthodes précédentes.

On peut encore, si l'on veut, trouver deux équations séparées, dont l'une contienne seulement les racines égales de l'équation $X = 0$, & dont l'autre contienne les racines inégales de la même équation. Pour cela il n'y aura qu'à chercher encore le plus grand commun diviseur des polynomes X' & Y, & nommant ce diviseur R' on prendra le quotient de X' divisé par R', lequel étant nommé X'' on fera ces deux équations $X'' = 0$, & $R' = 0$.

La premiere contiendra seulement les racines inégales de l'équation $X = 0$, & la seconde contiendra seulement les racines égales de la même équation, mais chacune une seule fois; de sorte que les deux équations $X'' = 0$, & $R' = 0$ n'auront que des racines inégales; & par conséquent seront susceptibles des méthodes du §. préc.

16. Connoissant ainsi le nombre des racines réelles tant inégales qu'égales de l'équation proposée, si ce nombre est moindre que le degré de l'équation, on en conclura que les autres racines sont nécessairement imaginaires.

En général, pour que l'équation (B) ait toutes ses racines réelles, il faut que les valeurs de u soient réelles aussi; donc il faudra que les valeurs de u^2, ou de v, soient toutes réelles & positives; par conséquent l'équation (D) de l'art. 8 doit avoir toutes ses racines réelles & positives; donc il faudra, par la regle connue, que les signes de cette équation soient alternativement positifs, & négatifs; de sorte que, si cette condition n'a pas lieu, ce sera une marque sure que l'équation (B) a nécessairement des racines imaginaires.

Or on sait que les racines imaginaires vont toujours en nombre pair, & qu'elles peuvent se mettre deux à deux sous cette forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, α & β étant des quantités réelles; donc on aura

$u = \pm 2\beta\sqrt{-1}$, & par conséquent $v = -4\beta^2$; d'où l'on voit que l'équation (D) aura nécessairement autant de racines réelles négatives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans l'équation (B).

Donc, si on fait $v = -w$, ce qui changera l'équation (D) en celle-ci

$$w^n - aw^{n-1} + bw^{n-2} - cw^{n-3} + \text{etc.} = 0 \quad \ldots (G)$$

cette équation aura nécessairement autant de racines réelles positives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans l'équation (B).

Donc, si dans l'équation (G) il n'y a qu'un seul changement de signe, l'équation (B) n'aura que deux racines imaginaires. (art. 7).

17. Il suit de l'article précédent que, pour avoir la valeur des racines imaginaires de l'équation (B), il n'y a qu'à chercher les racines réelles positives de l'équation (G). En effet, soit w', w'', w''' etc. ces racines, on aura d'abord $\frac{\sqrt{w'}}{2}$, $\frac{\sqrt{w''}}{2}$, $\frac{\sqrt{w'''}}{2}$ etc. pour les valeurs de β; ensuite, pour trouver les valeurs correspondantes de α, on substituera, dans l'équation (B), $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, à la place de x, & on fera deux équations séparées des termes tous réels, & de ceux qui seront multipliés par $\sqrt{-1}$; de cette maniere on aura deux équations en α de cette forme

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} + \text{etc.} = 0 \\ m\alpha^{m-1} + p\alpha^{m-2} + q\alpha^{m-3} + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} \ldots (H)$$

dans lesquelles les coëfficiens P, Q etc. p, q etc. seront donnés en a, b, c etc. & en β.

Donc, si on donne à β quelqu'une des valeurs précédentes, il faudra nécessairement que ces deux équations aient lieu en même tems, & par conséquent il faudra qu'elles aient un diviseur commun. On cherchera donc leur plus grand commun diviseur, & le faisant égal à zéro, on aura une équation en α & β, par laquelle, β étant connu, on trouvera α.

Il est

Il eſt bon de remarquer que, ſi toutes les valeurs de β tirées de l'équation (G) ſont inégales entr'elles, alors à chaque valeur de β il ne pourra répondre qu'une ſeule valeur de α; donc dans ce cas les deux équations (H) ne pourront avoir qu'une ſeule racine commune; & par conſéquent leur plus grand commun diviſeur ne pourra être que du premier degré.

On pouſſera donc la diviſion juſqu'à ce que l'on parvienne à un reſte où α ne ſe trouve plus qu'à la premiere dimenſion, & on fera enſuite ce reſte égal à zéro; ce qui donnera la valeur cherchée de α.

Mais, ſi parmi les valeurs de β tirées de l'équation (G) il y en a, par exemple, deux d'égales entr'elles, alors, comme à chacune de ces valeurs égales de β il peut répondre des valeurs différentes de α, il faudra qu'en mettant cette valeur double de β dans les équations (H), elles puiſſent avoir lieu par rapport à l'une & l'autre des valeurs de α qui y répondent; ainſi ces deux équations auront néceſſairement deux racines communes, & par conſéquent leur plus grand commun diviſeur ſera du ſecond degré. Il faudra donc, dans ce cas, ne pouſſer la diviſion que juſqu'à ce que l'on arrive à un reſte, où α ſe trouve à la ſeconde dimenſion ſeulement; & alors on fera ce reſte égal à zéro, ce qui donnera une équation du ſecond degré par laquelle on déterminera les deux valeurs de α, leſquelles ſeront néceſſairement toutes deux réelles.

De même, s'il y avoit trois valeurs égales de β, il faudroit, pour trouver les valeurs de α qui répondroient à cette valeur triple de β, ne pouſſer la diviſion que juſqu'à ce que l'on parvînt à un reſte où la plus haute puiſſance de α fût la troiſieme; & alors, feſant ce reſte égal à zéro, on auroit une équation en α du troiſieme degré, laquelle donneroit les trois valeurs réelles de α, correſpondantes à la même valeur de β; & ainſi de ſuite.

§. III.

Nouvelle méthode pour approcher des racines des équations numériques.

18. Soit l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} + K = 0 \ldots (a)$$

& supposons qu'on ait déjà trouvé par la méthode précédente, ou autrement, la valeur entiere approchée d'une de ses racines réelles & positives; soit cette premiere valeur p, en sorte que l'on ait $x > p$ & $x < p + 1$; on fera $x = p + \frac{1}{y}$, & substituant cette valeur dans l'équation proposée, à la place de x, on aura, après avoir multiplié toute l'équation par y^m & ordonné les termes par rapport à y, une équation de cette forme

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \text{etc.} + K' = 0 \ldots (b).$$

Or, comme (*hyp.*) $\frac{1}{y} > 0$ & < 1, on aura $y > 0$; donc l'équation (b) aura nécessairement au moins une racine réelle plus grande que l'unité.

On cherchera donc par les méthodes du §. I la valeur entiere approchée de cette racine, & comme cette racine doit être nécessairement positive, il suffira de considérer y comme positif (art. 4).

Ayant trouvé la valeur entiere approchée de y, que je nommerai q, on fera ensuite $y = q + \frac{1}{z}$, & substituant cette valeur de y dans l'équation (b), on aura une troisieme équation en z de cette forme

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + \text{etc.} + K'' = 0 \ldots (c)$$

laquelle aura nécessairement au moins une racine réelle plus grande que l'unité, dont on pourra trouver de même la valeur entiere approchée.

Cette

Cette valeur approchée de z étant nommée r, on fera $z = r + \frac{1}{u}$, & substituant on aura une équation en u qui aura au moins une racine réelle plus grande que l'unité, & ainsi de suite.

En continuant de la même maniere on approchera toujours de plus en plus de la valeur de la racine cherchée; mais, s'il arrive que quelqu'un des nombres p, q etc. soit une racine exacte, alors on aura $x = p$, ou $y = q$ etc. & l'opération sera terminée; ainsi, dans ce cas, on trouvera pour x une valeur commensurable.

Dans tous les autres cas la valeur de la racine sera nécessairement incommensurable, & on pourra seulement en approcher aussi près qu'on voudra.

19. Si l'équation proposée a plusieurs racines réelles positives, on pourra trouver, par les méthodes exposées dans le §. I, la valeur entiere approchée de chacune de ces racines; & nommant ces valeurs p, p', p'' etc. on les employera successivement pour approcher davantage de la vraie valeur de chaque racine; il faudra seulement remarquer

1°. Que si les nombres p, p', p'' etc. sont tous différens l'un de l'autre, alors les transformées (b), (c) etc. de l'art. préc. n'auront chacune qu'une seule racine réelle & plus grande que l'unité; car si, par exemple, l'équation (b) avoit deux racines réelles plus grandes que l'unité, telles que y' & y'', on auroit donc $x = p + \frac{1}{y'}$ & $x = p + \frac{1}{y''}$, de sorte que ces deux valeurs de x auroient la même valeur entiere approchée p contre l'hypothese; il en seroit de même si l'équation (c), ou quelqu'une des suivantes, avoit deux racines réelles plus grandes que l'unité.

De là il s'ensuit que, pour trouver dans ce cas les valeurs entieres approchées q, r etc. des racines des équations (b), (c) etc., il suffira de substituer successivement à la place de y, z etc. les nombres naturels posi-

positifs 1, 2, 3 etc. jusqu'à ce que l'on trouve deux substitutions consécutives qui donnent des résultats de signe contraire (art. 6).

2°. Que s'il y a deux valeurs de x qui aient la même valeur entiere approchée p, alors, en employant cette valeur, les équations (b), (c) etc. auront chacune deux racines réelles plus grandes que l'unité, jusqu'à ce que l'on arrive à une équation dont les deux racines plus grandes que l'unité aient des valeurs entieres approchées différentes; alors chacune de ces deux valeurs donnera une suite particuliere d'équations dont chacune n'aura plus qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité.

En effet, puisqu'il y a deux valeurs différentes de x qui ont la même valeur entiere approchée p, ces deux valeurs seront représentées par $p + \frac{1}{y}$; de sorte qu'il faudra que y ait nécessairement deux valeurs réelles plus grandes que l'unité; or, si ces deux valeurs de y ont la même valeur approchée q, il faudra de nouveau qu'en faisant $y = q + \frac{1}{z}$, z ait deux valeurs différentes plus grandes que l'unité, & ainsi de suite.

Mais, si les valeurs entieres approchées de y étoient différentes, alors nommant ces valeurs q & q', on feroit $y = q + \frac{1}{z}$ & $y = q' + \frac{1}{z}$, & il est clair que z, dans l'une & l'autre de ces deux suppositions, n'auroit plus qu'une seule valeur réelle qlus grande que l'unité; autrement les valeurs de y, au lieu d'être seulement doubles, seroient triples ou quadruples etc.

Donc, quand on sera parvenu à une transformée dont les deux racines plus grandes que l'unité auront des valeurs entieres différentes, alors les autres transformées résultantes de chacune de ces deux valeurs n'auront plus qu'une seule racine plus grande que l'unité; par conséquent on pourra trouver la valeur entiere approchée de ces racines

en

en y substituant simplement les nombres naturels 1, 2, 3 etc. jusqu'à ce que l'on ait deux substitutions qui donnent des résultats de signes contraires (art. 6).

On peut faire des remarques analogues sur le cas où il y auroit dans l'équation (a) trois racines ou davantage, qui auroient la même valeur entiere approchée.

20. Nous avons supposé dans l'art. 18 que les racines cherchées étoient positives; pour trouver les négatives il n'y aura qu'à mettre $-x$ à la place de x dans l'équation proposée, & on cherchera de même les racines positives de cette derniere équation; ce seront les racines négatives de la proposée (art. 4).

Quant aux racines imaginaires, qui sont toujours exprimées par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, nous avons donné, dans le §. II, le moyen de trouver les équations dont α & β sont les racines; ainsi il n'y aura qu'à chercher les racines réelles de ces équations, & l'on aura la valeur de toutes les racines imaginaires de l'équation proposée.

21. Pour faciliter les substitutions (art. 18) de $p + \frac{1}{y}$ au lieu de x, de $q + \frac{1}{z}$ au lieu de y etc. il est bon de remarquer que les coëfficiens de la transformée (b) peuvent se déduire immédiatement de ceux de l'équation (a) en cette sorte

$$A' = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + Dp^{m-3} + \text{etc.}$$
$$B' = mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} + \text{etc.}$$
$$C' = \frac{m(m-1)}{2}Ap^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Bp^{m-3} + \text{etc.}$$

etc.

On aura de même ceux de la transformée (c) par ceux de la transformée (b) en mettant dans les formules précédentes q à la place de p, A'', B'',

B'', C'' etc. à la place de A', B', C', etc. & A', B', C' etc. à la place de A, B, C etc.; & ainsi de suite.

De là il est évident que le premier coëfficient A', ou A'' etc. ne sera jamais nul à moins que le nombre p, ou q etc. ne soit une racine exacte, auquel cas nous avons vu que la fraction continue se termine à ce nombre (art. 18). En effet, si $A' = 0$, ou $A'' = 0$ etc., on aura $y = \infty$, ou $z = \infty$, donc $x = p$, ou $y = q$ etc.

22. Soient donc p, q, r, s, t, etc. les valeurs entieres approchées des équations (a), (b), (c) etc. en sorte que l'on ait $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$, $z = r + \frac{1}{u}$ etc. & substituant successivement ces valeurs dans celle de x, on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

Ainsi la valeur de x, c'est à dire de la racine cherchée, sera exprimée par une fraction continue. Or on sait que ces sortes de fractions donnent toujours l'expression la plus simple, & en même tems la plus exacte qu'il est possible, d'un nombre quelconque soit rationel ou irrationel.

M. Huygens paroit être le premier qui ait remarqué cette propriété des fractions continues, & qui en ait fait usage pour trouver les fractions les plus simples, & en même tems les plus approchantes d'une fraction quelconque donnée (voyez son traité de *Automato planetario*).

Plusieurs habiles Géometres ont ensuite développé davantage cette théorie, & en ont fait différentes applications ingénieuses & utiles; mais on n'avoit pas encore pensé, ce me semble, à s'en servir dans la résolution des équations.

23. Maintenant, si on réduit les fractions continues

$$\frac{p}{1}, \quad p + \frac{1}{q}, \quad p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}} \quad \text{etc.}$$

en

en fractions ordinaires, on aura en faisant

$$\begin{array}{ll} \alpha = p, & \alpha' = 1 \\ \beta = q\alpha + 1, & \beta' = q\alpha' = q \\ \gamma = r\beta + \alpha, & \gamma' = r\beta' + \alpha' \\ \delta = s\gamma + \beta, & \delta' = s\gamma' + \beta' \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

on aura, dis-je, cette suite de fractions particulieres

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\beta}{\beta'}, \quad \frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \frac{\delta}{\delta'} \quad \text{etc.}$$

lesquelles seront nécessairement convergentes vers la vraie valeur de x, & dont la premiere sera plus petite que cette valeur, la seconde sera plus grande, la troisieme plus petite, & ainsi de suite; de sorte que la valeur cherchée se trouvera toujours entre deux fractions consécutives quelconques; c'est ce qu'il est aisé de déduire de la nature même de la fraction continue, d'où celles-ci sont tirées.

Or il est facile de voir que les valeurs de α, β, γ etc. & α', β', γ' etc. sont toujours telles que $\beta\alpha' - \alpha\beta' = 1$, $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1$, $\delta\gamma' - \gamma\delta' = 1$ etc.; d'où il s'ensuit

1°. Que ces fractions sont déjà réduites à leurs moindres termes; car, si γ, & γ', par exemple, avoient un commun diviseur autre que l'unité, il faudroit, en vertu de l'équation $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1$, que l'unité fût aussi divisible par ce même diviseur.

2°. Qu'on aura $\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'\beta'}$, $\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\beta'\gamma'}$, $\frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'}$ etc. de sorte que les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ etc. ne peuvent jamais différer de la vraie valeur de x que d'une quantité respectivement moindre que $\frac{1}{\alpha'\beta'}$, $\frac{1}{\beta'\gamma'}$, $\frac{1}{\gamma'\delta'}$ etc.; d'où il sera facile de juger de la quantité de l'approximation.

En

En général, puisque $\beta' > \alpha'$, $\gamma' > \beta'$ etc. on aura $\frac{1}{\alpha'^2} > \frac{1}{\alpha'\beta'}$, $\frac{1}{\beta'^2} > \frac{1}{\beta'\gamma'}$ etc. d'où l'on voit que l'erreur de chaque fraction sera toujours moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la même fraction.

3°. Que chaque fraction approchera de la valeur de x, non seulement plus que ne fait aucune des fractions précédentes, mais aussi plus que ne pourroit faire aucune autre fraction quelconque qui auroit un moindre dénominateur. En effet, si la fraction $\frac{\mu}{\mu'}$, par exemple, approchoit plus que la fraction $\frac{\gamma}{\gamma'}$, γ' étant $> \mu'$, il faudroit que la quantité $\frac{\mu}{\mu'}$ se trouvât entre ces deux $\frac{\gamma}{\gamma'}$ & $\frac{\delta}{\delta'}$; donc $\frac{\mu}{\mu'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{1}{\gamma'\delta'}$, & > 0; donc $\mu\gamma' - \mu'\gamma < \frac{\mu'}{\delta'} < 1$, & > 0; ce qui ne se peut.

24. Les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ etc. peuvent être appellées fractions *principales*, parce qu'elles convergent le plus qu'il est possible vers la valeur cherchée; mais, quand les nombres p, q, r etc. different de l'unité, on peut encore trouver d'autres fractions convergentes vers la même valeur, & qu'on appellera, si l'on veut, fractions *secondaires*.

Par exemple, si r est > 1, on peut entre les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$ & $\frac{\gamma}{\gamma'}$ qui sont toutes deux moindres que la valeur de x, insérer autant de fractions secondaires qu'il y a d'unités dans $r - 1$, en mettant successivement 1, 2, 3 etc. $r - 1$ au lieu de r. De cette maniere, à cause de $\gamma = r\beta + \alpha$, & $\gamma' = r\beta' + \alpha'$, on aura cette suite de fractions

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\quad \frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'},\quad \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'},\quad \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}\ \text{etc.}\quad \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}$$

dont les deux extremes ſont les deux fractions *principales* $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, & dont les intermédiaires ſont des fractions *ſecondaires*.

Or, ſi on prend la différence entre deux fractions conſécutives quelconques de cette ſuite, comme entre $\frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}$ & $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, on trouvera $\frac{1}{(2\beta'+\alpha')(3\beta'+\alpha')}$, de ſorte que cette différence ſera toujours poſitive, & ira en diminuant d'une fraction à l'autre; d'où il s'enſuit que, comme la derniere fraction $\frac{\gamma}{\gamma'}$ eſt moindre que la vraie valeur de la fraction continue, les fractions dont il s'agit ſeront toutes plus petites que cette valeur, & ſeront en même tems convergentes vers cette même valeur.

On fera le même raiſonnement par rapport à toutes les autres fractions principales, & ſi on ajoute à ces fractions les deux fractions $\frac{0}{1}$, & $\frac{1}{0}$, dont la premiere eſt toujours plus petite, & dont la ſeconde eſt plus grande que toute quantité donnée, on pourra former deux ſéries de fractions convergentes vers la valeur cherchée, dont l'une contiendra toutes les fractions plus petites que cette valeur, & dont l'autre contiendra toutes les fractions plus grandes que la même valeur.

Fractions plus petites.

$$\frac{0}{1},\quad \frac{1}{1},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{3}{1}\ \text{etc.}\quad \frac{p}{1}\ \cdots\ \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)$$

$$\frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'},\quad \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'},\quad \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}\ \text{etc.}\quad \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}\ \cdots\ \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)$$

$$\frac{\delta+\gamma}{\delta'+\gamma'},\quad \frac{2\delta+\gamma}{2\delta'+\gamma'},\quad \frac{3\delta+\gamma}{3\delta'+\gamma'}\ \text{etc.}\quad \frac{t\delta+\gamma}{t\delta'+\gamma'}\ \cdots\ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$$

etc.

Fractions plus grandes.

$$\frac{1}{0},\quad \frac{\alpha\ +\ 1}{\alpha'\ +\ 1},\quad \frac{2\alpha\ +\ 1}{2\alpha'\ +\ 1},\quad \frac{3\alpha\ +\ 1}{3\alpha'\ +\ 1}\ \text{etc.}\quad \frac{q\alpha+1}{q\alpha'+1}\cdots\left(\frac{\beta}{\beta'}\right)$$

$$\frac{\gamma\ +\ \beta}{\gamma'\ +\ \beta'},\quad \frac{2\gamma\ +\ \beta}{2\gamma'\ +\ \beta'},\quad \frac{3\gamma\ +\ \beta}{3\gamma'\ +\ \beta'}\ \text{etc.}\quad \frac{s\gamma+\beta}{s\gamma'+\beta'}\cdots\left(\frac{\delta}{\delta'}\right)$$

etc.

Quant à la nature de ces fractions, il est facile de prouver, comme nous l'avons fait par rapport aux fractions principales, 1°. que chacune de ces fractions sera déjà réduite à ses moindres termes; d'où il s'ensuit que comme les numérateurs & les dénominateurs vont en augmentant, ces fractions se trouveront toujours exprimées par des termes plus grands à mesure qu'elles s'éloigneront du commencement de la série. 2°. Que chaque fraction de la premiere série approchera de la valeur de x plus qu'aucune autre fraction quelconque, qui seroit moindre que cette valeur, & qui auroit un dénominateur plus petit que celui de la même fraction; & que, de même, chaque fraction de la seconde série approchera plus de la valeur de x que ne pourroit faire toute autre fraction qui seroit plus grande que cette valeur, & qui auroit un dénominateur plus petit que celui de la même fraction.

En effet, s'il y avoit une fraction comme $\frac{\mu}{\mu'}$ plus petite que la valeur de x, & en même tems plus approchante de cette valeur que la fraction $\frac{3\beta\ +\ \alpha}{3\beta'\ +\ \alpha'}$, par exemple, en supposant $3\beta' + \alpha' > \mu'$, il faudroit (à cause que la fraction $\frac{\beta}{\beta'}$ est plus grande que la valeur dont il s'agit) que la quantité $\frac{\mu}{\mu'}$ se trouvât entre les deux quantités $\frac{3\beta\ +\ \alpha}{3\beta'\ +\ \alpha'}$ & $\frac{\beta}{\beta'}$; donc la quantité $\frac{\mu}{\mu'} - \frac{3\beta\ +\ \alpha}{3\beta'\ +\ \alpha'}$ devroit être

$$< \frac{\beta}{\beta'} - \frac{3\beta + \alpha}{3\beta' + \alpha'} < \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\beta'(3\beta' + \alpha')} < \frac{1}{\beta'(3\beta' + \alpha')};$$

donc il faudroit que $\mu(3\beta' + \alpha') - \mu'(3\beta + \alpha)$ fût $<$ $\frac{\mu'}{3\beta' + \alpha'} < 1$; ce qui ne ſe peut.

Au reſte, il peut arriver qu'une fraction d'une ſérie n'approche pas ſi près qu'une autre de l'autre ſérie, quoique conçue en termes moins ſimples; mais cela n'arrive jamais quand la fraction qui a le plus grand dénominateur eſt une fraction principale (art. 23).

§. IV.

Application des méthodes précédentes à quelques exemples.

25. Je prendrai pour premier exemple l'équation que Newton a réſolue par ſa méthode, ſavoir

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Je commence par chercher par les formules de l'art. 8 l'équation en v qui réſulte de cette équation; je fais donc $m = 3$, $A = 0$, $B = -2$, $C = 5$; j'aurai $n = \frac{3.2}{2} = 3$, $A1 = 0$, $A2 = 4$, $A3 = 15$, $A4 = 8$, $A5 = 50$, $A6 = 91$; donc $a1 = 12$, $a2 = 72$, $a3 = -1497$, & de là $a = 12$, $b = 36$, $c = -643$; de ſorte que l'équation cherchée ſera

$$v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0.$$

Or, puiſque cette équation n'a pas les ſignes alternativement poſitifs & négatifs, j'en conclus ſur le champ que l'équation propoſée a néceſſairement deux racines imaginaires & par conſéquent une ſeule réelle (art. 16).

Ainſi les nombres à ſubſtituer à la place de x ſeront les nombres naturels 0, 1, 2, 3 etc. (art. 6).

Je

Je ſuppoſe d'abord x poſitif, & je cherche la limite des valeurs de x par les méthodes de l'art. 12, je trouve $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} < 3$; ainſi 3 ſera la limite cherchée en nombres entiers, de ſorte qu'il ſuffira de faire ſucceſſivement $x = 0, 1, 2, 3$; ce qui donnera ces réſultats $-5, -6, -1, 16$; d'où l'on voit que la racine réelle de l'équation propoſée ſera entre les nombres 2 & 3; & qu'ainſi 2 ſera la valeur entiere la plus approchée de cette racine (art. 2).

Je fais maintenant, ſuivant la méthode du §. III, $x = 2 + \frac{1}{y}$, j'ai, en ſubſtituant & ordonnant les termes par rapport à y, l'équation

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$$

dans laquelle j'ai changé les ſignes pour rendre le premier terme poſitif.

Cette équation aura donc néceſſairement une ſeule racine plus grande que l'unité (art. 19), de ſorte que, pour en trouver la valeur approchée, il n'y aura qu'à ſubſtituer les nombres 0, 1, 2, 3 etc. juſqu'à ce que l'on trouve deux ſubſtitutions conſécutives qui donnent des réſultats de ſigne contraire.

Pour ne pas faire beaucoup de ſubſtitutions inutiles, je remarque qu'en faiſant $y = 0$, j'ai un réſultat négatif, & qu'en faiſant $y = 10$, le réſultat eſt encore négatif; je commence donc par le nombre 10, & je fais ſucceſſivement $y = 10, 11$, etc. je trouve d'abord les réſultats -61, 54 etc.; d'où je conclus que la valeur approchée de y eſt 10; donc $q = 10$.

Je fais donc $y = 10 + \frac{1}{z}$, j'aurai l'équation

$$61z^3 - 94z^2 - 20z + 1 = 0$$

& ſuppoſant ſucceſſivement $z = 1, 2$, etc. j'aurai les réſultats -54, 71 etc.; donc $r = 1$.

Je

Je fais encore $z = 1 + \frac{1}{u}$, j'aurai

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$$

& supposant $u = 1, 2$ etc. j'aurai les résultats -71, 293 etc.; donc $s = 1$; & ainsi de suite.

En continuant de cette maniere on trouvera les nombres 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12 etc. de sorte que la racine cherchée sera exprimée par cette fraction continue

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

d'où l'on tirera les fractions (art. 23)

$\frac{2}{1}$, $\frac{21}{10}$, $\frac{23}{11}$, $\frac{44}{21}$, $\frac{111}{53}$, $\frac{155}{74}$, $\frac{576}{275}$, $\frac{731}{349}$, $\frac{1307}{624}$, $\frac{16415}{7837}$ etc.

lesquelles seront alternativement plus petites & plus grandes que la valeur de x.

La derniere fraction $\frac{16415}{7837}$ est plus grande que la racine cherchée; mais l'erreur sera moindre que $\frac{1}{(7837)^2}$ (art. 23 n°. 2), c'est à dire, moindre que 0,0000000163; donc, si on réduit la fraction $\frac{16415}{7837}$ en fraction décimale, elle sera exacte jusqu'à la 7eme décimale; or en faisant la division on trouve 2,0945514865 - - -; ainsi la racine cherchée sera entre les nombres 2,09455149, & 2,09455147.

Newton a trouvé par sa méthode la fraction 2,09455147 (voyez sa Méthode des suites infinies), d'où l'on voit que cette méthode donne dans ce cas un résultat fort exact; mais on auroit tort de se promettre toujours une pareille exactitude.

26. Quant aux deux autres racines de la même équation nous avons déjà vû qu'elles doivent être imaginaires; néanmoins, si on vouloit en trouver la valeur, on le pourroit par la méthode de l'art. 17.

Pour cela on reprendra l'équation en v trouvée ci-dessus, & en y changeant v en $-w$, on aura

$$w^3 + 12w^2 - 36w - 643 = 0$$

& il ne s'agira plus que de chercher une racine réelle & positive de cette équation. Or, puisqu'elle a son dernier terme négatif, elle aura nécessairement une telle racine, dont on pourra trouver la valeur entiere la plus approchée par la substitution successive des nombres naturels 0, 1, 2, 3 etc. (art. 3). En effet, en faisant $w = 6$, on aura le résultat -211, & en faisant $w = 7$, on aura $+40$; ainsi la valeur entiere la plus approchée de la racine positive de cette équation sera 6.

On fera donc maintenant $w = 6 + \frac{1}{u}$, & en substituant, on aura, après avoir changé les signes,

$$211u^3 - 216u^2 - 30u - 1 = 0.$$

Faisant successivement $u = 0, 1, 2$ etc. on aura les résultats -1, -36, $+53$; donc 1 sera la valeur entiere approchée de u.

On fera donc $u = 1 + \frac{1}{x}$, & l'on aura en substituant & changeant les signes,

$$36x^3 - 171x^2 - 417x - 211 = 0.$$

En faisant successivement $x = 0, 1, 2$ etc. on trouvera des résultats négatifs jusqu'à la supposition de $x = 7$, qui donne 9218 pour résultat, de sorte que 6 sera la valeur entiere approchée de x.

On fera donc $x = 6 + \frac{1}{y}$ etc.

De

De cette maniere on approchera de plus en plus de la valeur de w, laquelle ſera exprimée par cette fraction continue

$$w = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{etc.}}}$$

doù l'on tire les fractions particulieres

$$\frac{6}{1}, \quad \frac{7}{1}, \quad \frac{48}{7} \quad \text{etc.}$$

Connoiſſant ainſi w, on aura (art. 17) $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$; ainſi on connoitra β.

On ſubſtituera maintenant $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, à la place de x dans l'équation propoſée, & faiſant deux équations ſéparées des termes tout réels, & de ceux qui ſont affectés de $\sqrt{-1}$ on aura les deux équations

$$\alpha^3 - (3\beta^2 + 2)\alpha - 5 = 0$$
$$3\alpha^2 - \beta^2 - 2 = 0.$$

On cherchera le plus grand commun diviſeur de ces deux équations, & on pouſſera ſeulement la diviſion juſqu'à ce que l'on arrive à un reſte où α ne ſe trouve qu'à la premiere puiſſance (art. cité); ce reſte ſera $-\frac{8\beta^2 + 4}{3}\alpha - 5$, lequel étant fait $= 0$ donnera

$$\alpha = -\frac{15}{4(2\beta^2 + 1)}.$$

Ainſi on aura la valeur des deux racines imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, & $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ de l'équation propoſée.

27. Prenons pour ſecond exemple l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

On aura encore ici $m = 3$, & par conſéquent $n = 3$; enſuite $A = 0$, $B = -7$, $C = -7$; d'où $A1 = 0$, $A2 = 14$,

 A3

A3 = − 21, A4 = 98, A5 = − 245, A6 = 833; & de là $a1 = 42$, $a2 = 882$, $a3 = 18669$, & enfin $a = 42$, $b = 441$, $c = 49$; de ſorte que l'équation en v ſera

$$v^3 - 42v^2 + 441v - 49 = 0.$$

Puiſque les ſignes de cette équation ſont alternatifs, c'eſt une marque que la propoſée peut avoir toutes ſes racines réelles (art. 16), & comme d'ailleurs cette équation n'eſt point diviſible par v, il s'enſuit que l'équation en x n'aura point de racines égales (art. 15).

On fera maintenant (art. 11) $v = \frac{1}{y}$, & ordonnant l'équation par rapport à y, on aura

$$y^3 - 9y^2 + \tfrac{42}{49}y - \tfrac{1}{49} = 0.$$

Le plus grand coëfficient négatif étant 9, on pourroit prendre $l = 10$ (art. 12), mais on peut trouver une limite plus proche en cherchant le plus petit nombre entier qui rendra poſitives ces trois quantités

$$l^3 - 9l^2 + \tfrac{42}{49}l - \tfrac{1}{49}$$
$$3l^2 - 18l + \tfrac{42}{49}$$
$$3l - 9$$

& on trouvera que $l = 9$ ſatisfait à ces conditions, de ſorte qu'on aura $k = 3$ (art. 11), & par conſéquent $\Delta = \frac{1}{3}$.

On mettra donc (art. 13 n°. 2) dans l'équation propoſée, $\frac{x}{3}$ à la place de x, ce qui la réduira à celle-ci

$$x^3 - 63x + 189 = 0$$

dans laquelle il n'y aura plus qu'à ſubſtituer les nombres naturels 0, 1, 2, etc. à la place de x. Or, ſuivant la méthode de l'art. 13 (n°. 3), on trouve que la ſérie des réſultats ne contient que deux variations de ſignes leſquelles répondent à $x = 4, 5, 6$; de ſorte que l'équation propoſée

posée n'aura que deux racines positives, lesquelles tomberont l'une entre les nombres $\frac{4}{3}$ & $\frac{5}{3}$, & l'autre entre les nombres $\frac{5}{3}$ & $\frac{6}{3}$; d'où l'on voit que la valeur entiere la plus approchée de l'une & de l'autre sera 1 (art. 2).

Faisons maintenant x négatif pour avoir aussi les racines négatives (art. 4), & l'équation se changera en

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

laquelle ayant son dernier terme négatif aura sûrement une racine positive (art. 3), & il est clair qu'elle n'en aura qu'une seule, puisque nous avons déjà trouvé les deux autres; ainsi on pourra d'abord trouver la valeur entiere approchée de cette racine en substituant à la place de x les nombres 0, 1, 2, etc. jusqu'à ce que l'on rencontre deux substitutions qui donnent des résultats de signe contraire (art. 3); or on trouve que ces substitutions sont $x = 3$, & $x = 4$; de sorte que 3 sera la valeur entiere la plus approchée de x dans l'équation précédente, & par conséquent de $-x$ dans la proposée.

Ayant ainsi trouvé que l'équation a trois racines réelles, deux positives, & une négative, & ayant trouvé en même tems leurs valeurs entieres approchées, on pourra approcher autant qu'on voudra de la vraie valeur de chacune d'elles par la méthode du §. III.

Considérons d'abord les racines positives, & faisons dans l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$, $x = 1 + \frac{1}{y}$, elle deviendra celle-ci

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0$$

laquelle, à cause que 1 est la valeur approchée de deux racines, aura nécessairement (art. 19 n°. 2) deux racines plus grandes que l'unité.

J'essaye d'abord si je peux trouver les valeurs approchées de ces deux racines par la substitution des nombres entiers 0, 1, 2 etc. & comme il n'y a que le terme $4y^2$ de négatif, il suffira (art. 13 n°. 1) de pousser

ser les substitutions jusqu'à ce que l'on ait $y^3 = $ ou $> 4y^2$; c'est à dire jusqu'à $y = 4$; or, en faisant $y = 0, 1, 2, 3, 4$, j'ai les résultats $1, 1, -1, 1, 13$; d'où je conclus que les racines cherchées sont l'une entre les nombres 1 & 2, & l'autre entre les nombres 2 & 3; de sorte que les valeurs approchées de y seront 1 & 2.

On fera donc 1°. $y = 1 + \frac{1}{z}$, & l'on aura

$$z^3 - 2z^2 - z + 1$$

équation qui n'aura plus qu'une racine réelle plus grande que l'unité (art. 19 n°. 2); ainsi on supposera successivement $z = 1, 2$ etc. jusqu'à ce que l'on trouve deux substitutions consécutives qui donnent des résultats de signe contraire; or on trouve que $z = 2$ donne -1, & $z = 3$ donne $+7$; donc 2 sera la valeur entiere approchée de z.

On fera donc $z = 2 + \frac{1}{u}$ & substituant l'on aura en changeant les signes

$$u^3 + 3u^2 - 4u - 1 = 0.$$

On supposera de même $u = 1, 2$ etc. & l'on trouvera que la valeur entiere approchée de u sera 1.

On fera $u = 1 + \frac{1}{w}$, & ainsi de suite.

2°. On fera $y = 2 + \frac{1}{z}$ & substituant dans l'équation précédente en y, on aura après avoir changé les signes

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$$

cette équation n'aura, comme la précédente en z, qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité; de sorte qu'il n'y aura qu'à faire $z = 1$, 2 etc.

2 etc. ce qui donne les résultats -1, 5, d'où l'on conclut que 1 est la valeur entiere approchée de z.

On fera donc $z = 1 + \frac{1}{u}$, & l'on aura, en changeant les signes,

$$u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0$$

d'où l'on trouvera, de la même maniere que ci-dessus, que la valeur entiere approchée de u sera 4.

Ainsi on fera $u = 4 + \frac{1}{w}$; & ainsi de suite.

Donc les deux racines positives de l'équation proposée seront

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{etc.}}}}$$

D'où l'on tirera, si l'on veut, des fractions convergentes, comme dans l'exemple précédent (art. 23, & 24).

Pour trouver maintenant la valeur approchée de la racine négative, on reprendra l'équation

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

dans laquelle on a déjà trouvé que la valeur entiere approchée est 3; ainsi on fera $x = 3 + \frac{1}{y}$, ce qui donnera en changeant les signes

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0$$

&

& comme cette équation ne peut avoir qu'une seule racine réelle plus grande que 1 (art. 19 n°. 2), on en trouvera la valeur approchée en faisant $y = 1, 2$ etc. jusqu'à ce que l'on rencontre deux résultats consécutifs de signe contraire, ce qui arrivera lorsque $y = 20, 21$; de sorte que la valeur dont il s'agit sera 20.

On fera donc $y = 20 + \frac{1}{u}$ etc.

De cette maniere la racine négative de l'équation proposée sera

$$x = -3 - \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}$$



SO-

SOLUTION GÉNÉRALE ET ABSOLUE
DU
PROBLEME DE TROIS CORPS
MOYENNANT DES SUITES INFINIES.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

Le probleme dont il s'agit dans ce Mémoire feroit fans contredit tout auffi fameux que celui de la quadrature du cercle, s'il avoit été connu depuis le tems des anciens Géometres Grecs, & fi ce qui en fait le fujet étoit autant à la portée de tout le monde que l'eft la figure d'un cercle. Cette double différence diminue fa célébrité, mais elle fait en échange, que tandis que la quadrature du cercle fait l'objet des recherches des plus ignorans, le probleme des trois corps n'occupe que ceux qui font le plus verfés dans les calculs, & qui, fans fe repaître, comme les premiers, de quelque folution fautive & illufoire, fe bornent à accufer le calcul intégral du peu de fuccès de leurs recherches. Ils fe défiftent de la quadrature du cercle, & je crois qu'ils fe défifteroient également du probleme des trois corps, fi on pouvoit leur démontrer que ces deux problemes doivent, à cet égard, être rangés dans une même claffe. Il me femble que c'eft par cet examen qu'il faut commencer. Tâchons donc de parler raifon fur ce qu'il faut trouver, avant qu'on puiffe dire que le probleme de trois corps eft réfolu.

§. 2. D'abord je remarque qu'il ne s'agit pas des formules différentielles. Celles par où il faut commencer, & qui font du fecond degré, fe trouvent fans peine, non feulement pour trois corps

 mais

mais pour un ſyſteme d'autant de corps qu'on voudra. Enſuite il ne ſuffit pas de tirer de ces formules quelques autres, qui ne donnent que la loi de la conſervation des forces vives, ou celle des aires proportionelles au tems, ou quelque autre loi ſemblable, qui, pour s'étendre ſur tout le ſyſteme, nous laiſſe abſolument ignorer le mouvement de chaque corps en particulier. Enfin, quand même on parviendroit à déterminer ſéparément la viteſſe de chaque corps par les diſtances, il y auroit encore plus d'un pas à faire pour parvenir à la ſolution complette, qui demande que *la poſition des corps, leurs viteſſes & leurs directions étant données pour un certain moment, on puiſſe aſſigner la poſition, les viteſſes & les directions pour un autre moment quelconque donné.* Cette queſtion eſt la principale. Elle touche immédiatement à l'uſage qu'on veut faire du probleme, & toutes les autres queſtions s'y réduiſent aiſément.

§. 3. Mais cette queſtion eſt-elle réſoluble? On dira ſans doute qu'elle l'eſt, parce que non ſeulement le probleme eſt déterminé, mais parce que les formules différentielles, deſquelles la ſolution dépend, ſont trouvées, de ſorte qu'il ne s'agit que d'en chercher les intégrales. Mais quelles intégrales? Veut-on que ce ſoient des formules finies? Je démontrerai qu'il n'y en a point, & que toutes celles qu'on pourra encore trouver ne ſuffiſent pas pour rendre la ſolution complette. Tout ce qu'il y aura à faire, revient donc à ce qu'on a fait par rapport à la quadrature du cercle, c'eſt d'avoir recours à des ſuites infinies; & la queſtion ſe réduit à en trouver qui ſoient convergentes & traitables. Voilà en quoi ces deux problemes, quoique différemment fameux, ſe reſſemblent parfaitement.

§. 4. Je le répete, *la ſolution n'eſt complette & abſolue, que lorſque toutes les circonſtances du ſyſteme peuvent être déterminées directement pour un moment quelconque, en n'employant que le tems écoulé depuis le moment qu'on a fait ſervir de baſe dans le calcul, & qui par là tient lieu d'époque.* Car, à conſidérer les formules différentielles & la façon dont elles ſemblent devoir être traitées, il paroit que, quand même

me elles ſeroient intégrables à tous égards, on trouveroit plus facilement les viteſſes exprimées par les diſtances, qu'on ne trouveroit le tems exprimé par les viteſſes ou par les diſtances, & qu'encore le tems ſe trouveroit plus facilement par les autres circonſtances, que ces circonſtances ne ſe trouveroient par le tems. C'eſt cependant ce dernier but qu'on doit ſe propoſer, parce que c'eſt celui que l'uſage du probleme demande. On ſait qu'il en eſt de même dans le cas où on ne conſidere que deux corps. Depuis Kepler, la grande queſtion étoit toujours de trouver *directement*, non l'anomalie moyenne par la vraie ou par les diſtances, mais *l'anomalie vraie par la moyenne*, *qui repréſente le tems*. Queſtion, qui n'a été réſolue & qui ne le ſera que par des ſuites infinies, par des approximations, par des interpolations, ou par d'autres manieres indirectes.

§. 5. En viendra-t-on mieux à bout, lorſqu'au lieu de deux corps on en ſuppoſe trois ou pluſieurs? Je réponds d'abord ce que tout Géometre répondra, qu'il n'eſt gueres probable. Mais ſuppoſons, par exemple, pour le cas de trois corps, toutes les intégrations des formules différentielles faites. Que les intégrales ayent une forme quelconque, mais qu'elles ſoient réduites en ſorte qu'elles expriment la poſition des corps par le tems. Que dans ces formules la maſſe d'un des trois corps ſoit faite $= 0$, de même que les autres coëfficiens qui s'y rapportent. Il eſt clair que par là elles ſeront ſimplifiées de beaucoup; peut-être même que pluſieurs termes & quantités tranſcendantes diſparoitront. Mais voyons ce qui reſte. Les formules ainſi ſimplifiées ſeront pour le cas de deux corps. Elles exprimeront la poſition de ces deux corps par le tems, c'eſt à dire les diſtances & les anomalies vraies par les moyennes; c'eſt à dire, encore que ces formules ſeront des ſuites infinies, & qui plus eſt, des ſuites infinies ſimplifiées. Remettons maintenant le troiſieme corps, & il eſt clair que tous les termes qu'on avoit anéantis, ſe remettront auſſi, & que non ſeulement les formules qui expriment la poſition des trois corps par le tems, ſeront des ſuites, mais même des ſuites beaucoup

 plus

plus compliquées que celles qui dans le cas de deux corps expriment leur position par le tems, ou l'anomalie vraie par la moyenne. Il ne sera pas difficile d'appliquer ce même raisonnement à un systeme d'un nombre de corps quelconque. La position de ces corps ne pourra être exprimée par le tems, si ce n'est par des suites infinies, qui seront d'autant plus compliquées, que le nombre des corps sera plus grand.

§. 6. Tournons maintenant le cas du probleme, & sans avoir égard à ce qui en rend la solution complette & absolue, supposons une solution telle, qu'elle détermine les distances par les angles, ou les angles par les distances. Il est clair qu'une semblable solution aboutit uniquement à nous faire connoitre la nature des courbes que les corps parcourent. C'est ainsi p. ex. qu'on sait, que lorsqu'il n'y a que deux corps dont le centre commun de gravité est en repos, ces corps parcourent des sections coniques. Mais quelles seront les courbes, ou les orbites, lorsqu'il y a trois ou plusieurs corps? On prévoit bien que ce pourront être des courbes à double courbure, & que le probleme, proposé dans sa plus grande universalité, doit s'étendre jusques sur les cas les plus compliqués. Or on ne sauroit disconvenir que les courbes à double courbure ne soient encore peu connues. Il n'en étoit pas de même des sections coniques pour le cas de deux corps. On en connoissoit un grand nombre des plus belles propriétés, bien longtems avant de savoir qu'on pouvoit en faire usage dans l'Astronomie théorique. Mais il s'en faut de beaucoup qu'on trouve les mêmes avantages par rapport au probleme de trois corps. Car, quand on pourroit parvenir à trouver des équations qui nous fassent connoitre la nature des orbites, quelle apparence y a-t-il que ces orbites seront des courbes connues depuis long tems, tandis que ce que nous connoissons des courbes à double courbure se réduit à fort peu de chose, & qu'il n'y en a peut-être aucune, qui pour être mieux connue où plus intéressante ait mérité un nom.

§. 7. A considérer les formules différentielles par où le calcul commence, la différentielle du tems, ou pour mieux dire, le quarré

ré de cette différentielle se trouve dans toutes d'une même façon, & il est très facile de l'en faire disparoitre. Par là les formules sont réduites en sorte qu'elles ne renferment plus d'autres variables que celles qui servent à déterminer la nature des courbes. Par là encore le probleme cesse, pour ainsi dire, d'être mécanique ou astronomique, & devient un probleme de pure Géométrie. Mais ce n'est pas qu'il en devienne d'autant plus résoluble. Et il n'est pas difficile de prévoir combien la solution générale doit être compliquée. Car l'orbite de chaque corps se détermine par l'état initial de tout le systeme. Cet état étant donné ou pris dans sa plus grande généralité, il s'agit de trouver pour l'orbite de chaque corps une équation qui exprime les ordonnées par les abscisses, ou les distances par les angles. Mais la même généralité de la solution demande qu'à chaque abscisse il réponde un nombre indéfini d'ordonnées, ou qu'à chaque angle il réponde un nombre indéfini de distances. La raison en est, que la solution générale doit comprendre encore ces cas où l'orbite de chaque corps tourne & s'entortille, pour ainsi dire, une infinité de fois autour du centre commun de gravité, sans jamais rentrer en elle-même & sans se perdre par une excursion à l'infini. Tel est à peu près le cas de la cycloïde à double courbure que les Satellites décrivent autour du Soleil, ou du centre commun de gravité du Systeme Solaire. Il est vrai qu'on peut imaginer des formules assez simples, qui satisfont à cette condition. Peut-être en trouvera-t-on aussi, qui satisfont en même tems à la loi de la gravitation, ou de l'attraction mutuelle des corps du systeme, mais qui, pour ne présenter que des cas particuliers, n'auront pas toute l'universalité que la solution du probleme demande.

§. 8. Si cependant on pouvoit parvenir à des formules véritablement universelles, & calculer ou construire les orbites pour un état initial du systeme quelconque donné, alors le probleme des trois corps seroit résolu à peu près autant que l'est celui de deux corps. Car supposons, ce qui peut toujours se faire, que le centre commun de gravité soit immobile, & soient les orbites construites. Je dis que, le lieu

 d'un

d'un corps étant donné, on trouvera assez facilement celui des deux autres. Car, en tirant par le lieu du corps donné & par le centre commun de gravité une ligne droite, cette ligne passera par le centre commun de gravité des deux autres corps, & ce centre se trouvera moyennant le rapport des masses. Ensuite il ne s'agit que de tirer par ce centre une ligne droite, qui, en passant par les orbites des deux autres corps, soit coupée par ces orbites en raison réciproque des masses des corps, ce qui ne pouvant communément se faire que d'une seule façon, donnera les lieux des deux autres corps qu'il s'agissoit de chercher. Si donc on prend sur l'orbite du premier corps encore un autre point, on trouvera également les lieux répondans des deux autres corps; & la loi générale des aires proportionelles au tems, donnera le tems que le systeme aura employé pour parvenir du premier état au second, du moins dans le cas où les trois orbites se trouvent dans un même plan. Mais, quand cette façon de procéder seroit universellement praticable, il s'en faut de beaucoup que nous connoissions assez les orbites pour pouvoir les construire; & d'ailleurs la question, *de déterminer la position des corps par le tems*, ne pourroit par là être résolue que fort indirectement. Voyons donc, comment, en employant des suites infinies, nous pourrons parvenir à la solution directe qu'il s'agit de trouver.

§. 9. Comme à cet égard je ne me propose dans ce Mémoire que de faire voir la méthode qui conduit à ce but, je me bornerai d'abord à l'appliquer à un cas moins compliqué. Mais je l'appliquerai de façon qu'on voie que cette méthode est généralement applicable, non seulement à un systeme d'un nombre de corps quelconque mais encore sous une loi de gravitation quelconque. Le cas que j'examinerai est celui où les trois corps qui s'attirent mutuellement, se trouvent & se meuvent en un même ligne droite. Je choisis ce cas, afin de débarrasser le calcul de la pluralité des dimensions, qui, sans rendre le calcul plus difficile, le rendroient plus prolixe, au préjudice de la clarté que demande l'explication d'une méthode. J'ajoute que ce même

même cas, tout simple qu'il est, pourra selon toute apparence être celui auquel les autres plus composés se réduisent, du moins à l'égard de tout ce qui regarde la loi de la conservation des forces vives; & je suis d'autant plus porté à croire une semblable réduction possible qu'elle a également & très généralement lieu dans le cas de deux corps, comme je l'ai fait voir dans un Traité intitulé: *Insigniores orbitæ cometarum proprietates*.

§. 10. Soient donc

$$\underset{B}{\overset{x}{\cdot}}\!\!-\!\!-\!\!-\underset{C}{\overset{y}{\cdot}}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\underset{G}{\cdot}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\underset{A}{\overset{z}{\cdot}}$$

les trois corps placés en ligne droite, & en même tems leurs masses A, B, C. Qu'on prenne sur la même ligne un point quelconque G, afin d'y rapporter les distances. Le point G pourra, si l'on veut, être le centre commun de gravité, & en ce cas chaque distance se détermine par les deux autres. Soient les distances

$$AG = z$$
$$CG = y$$
$$BG = x$$

& en désignant par g la gravité absolue, on aura pour un tems τ quelconque les trois formules différentielles

$$-ddz = \left(\frac{C}{(y+z)^2} + \frac{B}{(x+z)^2}\right) g\, d\tau^2$$
$$-ddy = \left(\frac{A}{(y+z)^2} - \frac{B}{(x-y)^2}\right) g\, d\tau^2$$
$$-ddx = \left(\frac{A}{(x+z)^2} + \frac{C}{(x-y)^2}\right) g\, d\tau^2.$$

§. 11. Comme dans ces formules il y a trois sortes d'unités, qui sont celle du tems, celle des masses & celle des distances, on voit bien que deux de ces unités peuvent toujours être prises à volonté, & que la troisieme se détermine en ce que ces formules doivent être des équations. Posons donc

g C

$$gC = M$$
$$gB = N$$
$$gA = P$$

& il ſera

$$-\,ddz : d\tau^2 = \frac{M}{(y+z)^2} + \frac{N}{(x+z)^2}$$

$$-\,ddy : d\tau^2 = \frac{P}{(y+z)^2} - \frac{N}{(x-y)^2}$$

$$-\,ddx : d\tau^2 = \frac{P}{(x+z)^2} + \frac{M}{(x-y)^2}.$$

§. 12. Ces formules ainſi trouvées, il s'agit d'exprimer chacune des diſtances x, y, z par le tems τ. J'ai fait voir ci-deſſus, que cela ne pourra ſe faire que par des ſuites infinies. Il eſt donc clair que la façon la plus courte qui y conduiſe ſera la meilleure. Commençons donc par déterminer quelle ſera la forme de ces ſuites. Comme elles doivent exprimer les diſtances par le tems τ, il eſt clair qu'elles procéderont ſuivant quelques dimenſions de τ. Or je dis

I°. Que le premier terme doit être une quantité conſtante, qui dénote la diſtance initiale qui a lieu pour le tems $\tau = 0$.

II°. Que le ſecond terme doit être le tems τ multiplié par un coëfficient qui dénote la viteſſe initiale de chaque corps, & qui ſera poſitif quand le corps s'éloigne du point G, lorſqu'il eſt $\tau = 0$.

III°. Que le troiſieme terme doit être le quarré de τ multiplié par un coëfficient qui exprime l'effet de la gravité ou de la chûte initiale de chaque corps vers les deux autres corps.

On voit par là, que les ſuites qu'il s'agit de trouver procedent ſuivant toutes les dimenſions du tems τ, que les coëfficiens de deux premiers termes de chaque ſuite ſont donnés par l'état initial du ſyſteme, que les coëfficiens des troiſiemes termes ſe définiſſent par la gravitation mutuelle des trois corps, & partant, comme ceux de tous les termes ſuivans, par les formules différentielles.

§. 13.

§. 13. Faisant donc

$$z = a + b\tau + c\tau^2 + d\tau^3 + e\tau^4 + \text{etc.}$$
$$y = \alpha + \beta\tau + \gamma\tau^2 + \delta\tau^3 + \varepsilon\tau^4 + \text{etc.}$$
$$x = A + B\tau + C\tau^2 + D\tau^3 + E\tau^4 + \text{etc.}$$

& par ce que je viens de dire

a, α, A seront les distances initiales,
b, β, B les vitesses initiales,
c, γ, C les chutes initiales.

Afin donc de déterminer les coëfficiens suivans, il ne s'agira que de substituer ces suites, comme étant la valeur des distances x, y, z dans les formules différentielles, en posant $d\tau$ constante. Pour cet effet nous aurons d'abord

$$ddz = d\tau^2\,(2c + 6d\tau + 12e\tau^2 + \text{etc.})$$
$$ddy = d\tau^2\,(2\gamma + 6\delta\tau + 12\varepsilon\tau^2 + \text{etc.})$$
$$ddx = d\tau^2\,(2C + 6D\tau + 12E\tau^2 + \text{etc.})$$

Faisons encore pour abréger

$$\frac{1}{\alpha + a} = m \qquad \beta + b = q$$
$$\frac{1}{a + A} = n \qquad b + B = r$$
$$\frac{1}{A - \alpha} = p \qquad B - \beta = s$$

& il sera

$$(z+y) = \frac{1}{m}(1 + mq\tau + m(c+\gamma)\tau^2 + m(d+\delta)\tau^3 + m(e+\varepsilon)\tau^4 + \text{etc.})$$
$$(x+z) = \frac{1}{n}(1 + nr\tau + n(C+c)\tau^2 + n(D+d)\tau^3 + n(E+e)\tau^4 + \text{etc.})$$
$$(x-y) = \frac{1}{p}(1 + ps\tau + p(C-\gamma)\tau^2 + p(D-\delta)\tau^3 + p(E-\varepsilon)\tau^4 + \text{etc.})$$

 d'où

d'où l'on tire

$$\begin{array}{rl}\frac{1}{(z+y)^2} = m^2 - 2m^3 q\tau - 2m^3(c+\gamma)\tau^2 - 2m^3(d+\delta)\tau^3 - 2m^3(e+\varepsilon)\tau^4 - \text{etc.}\\ + 3m^4q^2\tau^2 + 6m^4q(c+\gamma)\tau^3 + 6m^4q(d+\delta)\tau^4\\ - 4m^5q^3\tau^3 + 3m^4(c+\gamma)^2\tau^4\\ - 12m^5(c+\gamma)\tau^4\\ + 5m^6q^4\tau^4\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}\frac{1}{(z+x)^2} = n^2 - 2n^3 r\tau - 2n^3(C+c)\tau^2 - 2n^3(D+d)\tau^3 - 2n^3(E+e)\tau^4 - \text{etc.}\\ + 3n^4r^2\tau^2 + 6n^4r(C+c)\tau^3 + 6n^4r(D+d)\tau^4\\ - 4n^5r^3\tau^3 + 3n^4(C+c)^2\tau^4\\ - 12n^5(C+c)\tau^4\\ + 5n^6r^4\tau^4\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}\frac{1}{(x-y)^2} = p^2 - 2p^3 s\tau - 2p^3(C-\gamma)\tau^2 - 2p^3(D-\delta)\tau^3 - 2p^3(E-\varepsilon)\tau^4 - \text{etc.}\\ + 3p^4s^2\tau^2 + 6ps(C-\gamma)\tau^3 + 6p^4s(D-\delta)\tau^4\\ - 4p^5s^3\tau^3 + 3p^4(C-\gamma)\tau^4\\ - 12p^5(C-\gamma)\tau^4\\ + 5p^6s^4\tau^4.\end{array}$$

§. 14. Substituant donc ces valeurs dans les formules différentielles, & égalant les termes, on aura les équations suivantes pour les coëfficiens

$$\begin{array}{ll|ll} -2c = Mm^2 + Nn^2 & & +6d = 2Mm^3q + 2Nn^3r\\ -2\gamma = Pm^2 - Np^2 & & +6\delta = 2Pm^3q - 2Np^3s\\ -2C = Pn^2 - Mp^2 & & +6D = 2Pn^3r + 2Mp^3s\end{array}$$

$$\begin{array}{l} -12e = 3Mm^4q^2 - 2m^3(c+\gamma)M + 3Nn^4r^2 - 2Nn^3(C+c)\\ -12\varepsilon = 3Pm^4q^2 - 2m^3(c+\gamma)P - 3Np^4s^2 - 2Np^3(C-\gamma)\\ -12E = 3Pn^4r^2 - 2n^3(C+c)P + 3Mp^4s^2 - 2Mp^3(C-\gamma)\\ \text{etc.}\end{array}$$

Voilà donc de quelle maniere les coëfficiens des suites proposées se déterminent très directement & comme d'eux-mêmes.

§. 15.

§. 15. Mais, comme j'ai rapporté ce cas particulier du probleme de trois corps, afin de le faire servir d'exemple pour tous les autres cas, il conviendra de faire encore là-dessus quelques remarques générales. La premiere qui s'offre assez naturellement, c'est que le tems τ pouvant être pris aussi grand que l'on voudra, les suites trouvées ne seront pas convergentes pour une quantité τ quelconque. On ne pourra donc calculer les distances x, y, z, que pour des tems τ assez petits pour que les suites trouvées soient encore suffisamment convergentes. Ce n'est pas cependant que par-là ces suites cessent d'être d'usage. Car toute la différence qu'il y a, c'est qu'il faut calculer par intervalles. Qu'on prenne p. ex. un tems t suffisamment petit, & on trouvera les distances x, y, z répondantes. On trouvera de plus les vitesses moyennant les mêmes suites différentiées,

$$dz : dt = b + 2ct + 3dt^2 + 4et^3 + \text{etc.}$$
$$dy : dt = \beta + 2\gamma t + 3\delta t^2 + 4\varepsilon t^3 + \text{etc.}$$
$$dx : dt = B + 2Ct + 3Dt^2 + 4Et^3 + \text{etc.}$$

Ces nouvelles distances & vitesses étant trouvées, on les substituera aux précédentes a, α, A; b, β, B, & par-là on déterminera de nouveau les coëfficiens, afin de pouvoir ensuite déterminer l'état du systeme tel qu'il sera après un second intervalle du tems. C'est ainsi qu'on pourra continuer autant qu'il sera nécessaire pour parvenir jusqu'au moment qu'on s'étoit proposé de calculer.

§. 16. La seconde remarque qui s'offre à faire, c'est que lorsqu'un des trois corps est assez petit pour n'avoir point d'action sensible sur les deux autres, sa masse pourra être faite $= 0$, ce qui abrégera de beaucoup la détermination des coëfficiens. Elle sera pareillement fort abrégée, lorsque dans l'état initial du systeme les trois corps sont en repos; car alors les vitesses initiales b, β, B, de même que leurs sommes ou différences q, r, s, sont $= 0$, ce qui fera encore disparoitre les coëfficiens d, δ, D, & généralement tous ceux des dimensions impaires de τ.

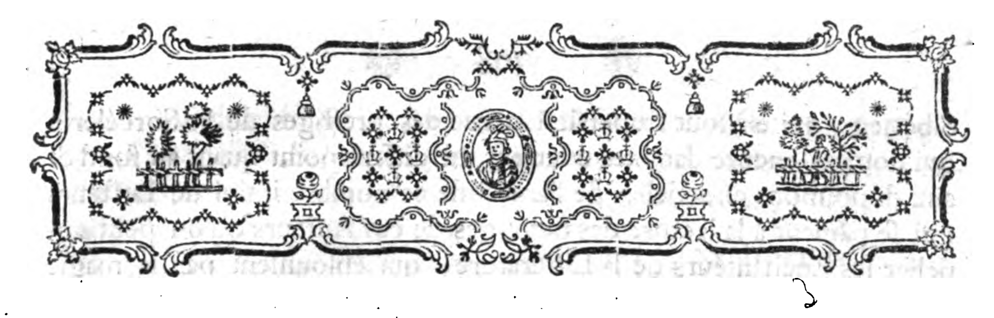
§. 17. Tout que je viens de dire aura encore lieu dans les cas où les trois corps ne ſont ni dans une même ligne droite ni dans un même plan. Le calcul n'en ſera ni plus difficile ni plus compliqué, mais bien plus prolixe. Car dans ce dernier cas le mouvement des trois corps doit être décompoſé ſuivant les trois dimenſions de l'eſpace. Par-là au lieu des trois ſuites que nous avons introduites dans le calcul, on y en introduira neuf, ce qui naturellement triplera tout au moins la prolixité du calcul.

§. 18. Il y a cependant des cas où on pourra l'abréger conſidérablement, & ce ſont préciſément ceux qui ont tant fait ſouhaiter la ſolution du probleme de trois corps. Suppoſons, par exemple, les maſſes des trois corps aſſez diſproportionnées pour qu'il n'y ait que le plus petit qui ſoit altéré par le moyen dans le mouvement qu'il auroit autour du grand, ſi le corps mitoyen étoit ſans action. C'eſt le cas d'une Comete troublée dans ſon orbite par l'action de Jupiter. Dans ce cas, le plan de l'orbite de Jupiter ſera mis pour baſe, & le nombre des neuf ſuites que la ſolution générale demande, ſe réduit à cinq. Car il n'en faudra aucune pour le Soleil. Il n'en faudra que deux pour Jupiter, & ces deux ſuites & leurs coëfficiens ſe déterminent indépendamment de la Comete, de ſorte qu'il ne s'agit que de déterminer les coëfficiens des trois ſuites, qui doivent exprimer les abſciſſes & les ordonnées de l'orbite de la Comete. De cette maniere le calcul ne ſera gueres plus long que celui que je viens de donner pour trois corps qui ſe meuvent dans une même ligne droite.

Mé-

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.



CONSIDÉRATIONS

SUR

CE QU'ON PEUT REGARDER AUJOURD'HUI COMME LE BUT PRINCIPAL DES ACADÉMIES, ET COMME LEUR EFFET LE PLUS AVANTAGEUX.

PAR MR. FORMEY. (*)

Il est aiſé d'enviſager ſous divers points de vue les objets de quelque importance: cela réſulte naturellement de la diverſité des parties qui entrent dans leur compoſition, & de la multitude des rélations qu'ils embraſſent. Comme avec cela chacun a ſa façon de voir, qui varie dans chaque individu, & qui varie d'autant plus que ceux qui conſiderent les choſes ont d'étendue, de pénétration ou de profondeur, dans l'eſprit; de là vient qu'on voit éclorre ſans ceſſe tant d'aſſertions différentes ſur les mêmes choſes, & que ceux qui les produiſent, trouvent les moyens de les juſtifier, ou du moins de les pallier. Quand cela va trop loin, on donne dans les propoſitions hazardées, dans les paradoxes; & ce n'eſt pas le moyen le moins propre à captiver l'attention, à ſe procurer des approbateurs: les hommes ont toujours eu du goût pour ceux qui leur cauſoient de l'étonnement, de la ſurpriſe, & ce goût n'a jamais été plus répandu que dans notre ſiecle. Le Lapon, le Si-

(*) Lû dans l'Aſſemblée publique du 29 Janvier, 1767.

Sibérien, qui est tout stupéfait à la vue des prestiges de la Sorcélerie qui domine encore dans ces contrées, ne differe point quant au fond & aux dispositions essentielles de l'ame, de ce nombre infini de Lecteurs qui se pâment à la lecture des ouvrages de ces Auteurs qu'on peut appeller les Enchanteurs de la Littérature, qui éblouissent par la magie de leur style, qui en imposent par leur ton fatidique.

Suivant ces observations préliminaires, la simple lecture du titre de ce Discours, n'a pû faire comprendre à quoi je le destine, en déterminer exactement l'objet. Il est probable même que la plûpart de ceux qui m'écoutent, ont roulé & roulent encore dans leur esprit, chacun sa conjecture propre, sur ce que j'ai en vue, sur ce que j'ai voulu exprimer, en annonçant des *Considérations sur ce qu'on peut regarder aujourd'hui comme le but principal des Académies, & comme leur effet le plus avantageux*. De sorte que, si, au lieu de me suivre dans cette discussion, chacun partoit de son point de vue, & composoit un Discours d'après ses propres idées, nous verrions ce qu'on voit tous les jours & ce qu'on a toujours vu, autant de routes différentes se tracer, & aboutir à autant de termes; entre lesquels il y auroit sans doute de l'analogie, mais sans identité, ni même sans un grand degré de ressemblance.

C'est ainsi non seulement que plusieurs Orateurs ou plusieurs Poëtes traitent différemment un même sujet, mais que les faits, & même les vérités, qui paroissent, pour ainsi dire, immodifiables, ne laissent pas de recevoir l'empreinte la plus marquée du tour d'esprit de ceux qui les manient. Le même Héros présenté par divers Historiens offre des traits qui varient plus que ceux du pinceau de divers Peintres, ou du ciseau de divers Sculpteurs, qui voudroient exprimer son image. Si vous en doutez, comparez les Plutarque, les Tite-Live, les Salluste, les Tacite, les Suetone, les Vellejus Paterculus; ou parmi les modernes, les Vertot, les Rollin, les Voltaire, les Duclos, les Raynal, les Coyer: & voyez si, chez les premiers, Alexandre, César, Pompée, Auguste, Caligula même & Neron, chez les autres, Char-

Charles-Quint, Elizabeth, Louis XI, Henri IV, Cromwel & Richelieu, Charles XII & Pierre I, ne sont pas jettés dans des moules si différens, que quelquefois on est tenté de les méconnoitre. (*)

Il en est des vérités comme des faits: à comparer la maniere différente dont les Philosophes les exposent, on les trouve si dissemblables qu'on est dérouté, & jetté dans le plus grand embarras. Je n'en citerai qu'un exemple, mais récent & frappant. Qu'on lise Locke sur les idées & sur tout ce qui concerne l'Entendement humain, on admirera sans doute la beauté de son génie & la sagacité de ses recherches. Mais qu'on prenne ensuite l'ouvrage posthume de Leibnitz, qui a été publié depuis trois ou quatre ans; qu'on suive les observations, les critiques séveres, mais solides, qui mettent au creuset la doctrine du Philosophe Anglois, & le plus souvent la détruisent; on sera surpris que la vérité elle-même puisse avoir, pour ainsi dire, deux visages, sans compter ceux que d'autres lui ont donnés, sans y joindre les masques innombrables sous lesquels on l'a déguisée.

J'en reviens donc à ce que je disois; je pense que vous ne prévoyez pas dans ce moment, ni ne pouvez même prévoir, de quoi j'ai dessein de vous entretenir. Mon projet n'est pas cependant de vous éblouir, ni de vous surprendre par quelcun de ces tours de force auxquels on se plaît tant aujourd'hui. Je vous proposerai mon idée avec une parfaite simplicité, après vous avoir conduits par la route qui m'y a fait arriver. Vous jugerez en dernier ressort, si la route est bonne & l'idée juste.

Sans remonter à l'origine du mot d'*Académie*, & à ses diverses acceptions dans l'Histoire philosophique des Grecs & des Romains; & après avoir écarté le sens équivoque qui fait qu'aujourd'hui on donne quel-

(*) On pourroit généraliser le jugement particulier que Strabon, Liv. XI. porte de ceux qui ont écrit l'Histoire d'Alexandre: *Plerisque veritus, qui de Alexandro scripserunt, credere non est satis tutum.*

quelquefois aux Universités le nom d'Académies: j'entens par celles-ci les Sociétés ou Compagnies de gens de lettres, établies pour la culture & l'avancement des Sciences. Je n'y comprens pas les Académies qu'on nomme des Arts; à plus forte raison celles qui ont pour objet les exercices du corps. Ces établissemens entreroient plutôt dans la notion des Universités, &, entant qu'Ecoles, peuvent en être regardés comme des dépendances. Et quant aux Belles-Lettres, soit qu'on les joigne aux Sciences, ou qu'on en fasse un objet séparé & le partage d'une Académie distincte de celle des Sciences, je les restrains à leurs parties théorétiques & didactiques; j'en exclus tout ce qui ne sert qu'à des amplifications & à l'ornement des sujets, sans contribuer à l'étendue & à la netteté de nos connoissances.

Je ne ferai pas remonter fort haut la naissance des Académies, telles que je viens de les définir. Quand on auroit la complaisance de qualifier ainsi la Société de gens de lettres que Charlemagne établit par le conseil d'Alcuin, je n'y verrois qu'une ombre & une ébauche très imparfaite des Académies modernes. Je sais que ce Prince fit choix des plus beaux Génies de son Empire, & qu'il ne dédaigna pas d'être leur Confrere. C'est assurément tout ce qu'il pouvoit faire; mais, ce qui étoit impossible pour lui, c'étoit de créer des objets propres à occuper une Académie, & de rendre ses Académiciens capables de les traiter. Aussi que faisoient-ils? Ils choisissoient quelque ancien Auteur, le lisoient, & rendoient compte de leurs lectures, chacun prenant le nom de l'Auteur qu'il affectionnoit le plus. *Alcuin* choisit celui de *Flaccus* par goût pour *Horace*; un jeune Seigneur, nommé *Angilbert*, prit celui d'*Homere*; *Adelard*, Evêque de Corbie, se nomma *Augustin*; *Riculphe*, Archevêque de Mayence, *Dametas*; & l'Empereur lui-même *David*. Or faites-vous une idée des Conférences académiques que pouvoient avoir ensemble Homere & Horace, S. Augustin & David; car pour Dametas, je n'ai pas l'honneur de le connoître. Aussi les siecles de fer & de plomb succéderent-ils à ces fausses lueurs de savoir.

Je

Je ne puis m'empêcher de vous produire un échantillon du ton qui régnoit alors dans les conversations des Savans, appellés à la Cour, où ils avoient l'honneur d'approcher des plus grands Princes, de vivre familierement avec eux, & de leur faire passer, de l'aveu de ces Princes mêmes, les meilleurs momens de la vie. Conrad III, Empereur d'Allemagne, mort à la Diete de Bamberg, le 13 de Fevrier, 1152, avoit des connoissances & du goût pour les Lettres. Pierre Diacre, Moine du Mont-Cassin, lui dédia un Ouvrage qu'il avoit fait sur les abbréviations, fort en usage dans l'ancienne écriture; & dans sa Dédicace, il exalte beaucoup les soins que ce Prince se donnoit pour former une Bibliotheque, & pour rassembler en particulier tout ce qui regardoit les Livres Sacrés. On s'entretenoit beaucoup de Littérature à sa table. L'Abbé *Guibald*, qui y occupoit une place distinguée, & comme Savant, & comme Homme d'Etat, rendoit compte d'une de ces conversations à un de ses correspondans, (*ad Manegoldum*, *Magistrum Scholæ*,) & voici ses propres termes. *Mirabatur Dominus noster*, *Conradus Rex*, *quæ a literatis vestris dicebantur*, *& probari non posse hominem esse asinum*, *ajebat. Dicebam ei hoc in rerum natura non posse fieri*, *sed ex concessione indeterminata nascens a vero mendacium falsa conclusione adstringi. Cum non intelligeret*, *ridiculo eum sophismate adortus sum. Unum*, *inquam*, *habetis oculum? quod cum dedisset*, *duos*, *inquam*, *oculos habetis? quod cum absolute annuisset: unus*, *inquam*, *& duo tres sunt; ergo tres oculos habetis. Captus verbi cavillatione jurabat*, *se tantum duos habere; multis tamen & his similibus determinare doctus*, *jucundam vitam dicebat habere litteratos.* Quelcun pourroit-il bien évaluer à quelle distance l'esprit humain étoit alors du point auquel nous le voyons parvenu?

Transportons-nous donc tout d'un coup à une Epoque plus lumineuse; mais n'insistons pas sur celle du renouvellement des Lettres, lorsque les Grecs chassés de Constantinople se répandirent dans l'Occident, où ils ne firent que des éleves semblables à eux, des Critiques & des Littérateurs. Ce qu'on appelloit alors Philosophie, en étoit

les vrayes antipodes. Un exemple pourra tenir ici lieu de tous les autres. (*) C'eſt celui de ce Pic de la Mirandole qui fit tant de bruit dans ſon ſiecle, & qui certainement ne le méritoit gueres. C'étoit un homme à qui la lecture des Scholaſtiques, & peut-être auſſi les louanges des flatteurs qui ne manquent jamais aux Grands, avoient gâté l'eſprit. Il croyoit être inſtruit & pouvoir répondre *de omni re ſcibili.* Faut-il d'autre titre pour avoir droit d'être logé aux petites maiſons? Il vouloit réfuter l'Alcoran ſans ſavoir l'Arabe. Il vouloit accorder Platon & Ariſtote; Saint Thomas & Scot; apprécier toutes les Sectes, toutes les Religions; concilier tous les Théologiens & tous les Philoſophes. Cela finit par vouloir de Prince devenir Moine. Belle péroraiſon & digne de l'exorde!

Paſſons donc à l'Epoque du véritable rétabliſſement des Sciences, de la renaiſſance, ou pour dire l'exacte vérité, de la naiſſance de la Philoſophie, qui me paroit être ſortie du cerveau de Deſcartes, comme Pallas de celui de Jupiter. Oui, c'eſt ce grand homme qui a appris aux mortels à penſer, à raiſonner, à ſe dégager de l'orniere fangeuſe où des Maîtres auſſi durs qu'imbécilles les trainoient, pour entrer dans la route du Vrai, & y marcher à l'aide de leurs propres forces, de leur ſeul génie. Je ſuis diſpenſé de m'étendre ici ſur cette révolution, la plus intéreſſante, à mon avis, qui ſoit jamais arrivée. Vous avez ſans doute lû la plûpart des Eloges de Deſcartes qui ont paru depuis peu, & ſurtout celui dont l'Auteur n'auroit été récompenſé qu'à demi, ſi l'Académie qui avoit partagé le prix, ne venoit de le dédommager de ce partage, en lui donnant la préférence ſur ſes compétiteurs à la place d'Académicien; gain pour cette Compagnie qui ſera une perte pour le Public, à qui il étoit plus avantageux de voir M. Thomas comme Athlete dans la lice, qu'aſſis parmi les Juges.

Mais c'eſt de Deſcartes qu'il s'agit; & je ne fais point de difficulté de dire qu'il eſt le véritable pere des Académies, parce qu'il eſt inconteſtablement le pere de la ſaine Philoſophie & de l'eſprit philoſo-

phi-

(*) *Longueruana* p. 214.

phique. Il eſt à la vérité dans le cas de ces Docteurs dont il vaut mieux ſuivre les préceptes que d'imiter la conduite; mais je ne parle auſſi que des préceptes, & je maintiens que leur prix & leur efficace ſont d'une évidence inconteſtable. Ecoutez M. Thomas: c'eſt à lui qu'il appartient de décrire dignement la grande influence de ce puiſſant génie ſur les eſprits & ſur les ſiecles. „C'eſt ici, dit-il, le vrai triomphe „de Deſcartes. C'eſt là ſa grandeur. Il n'eſt plus; mais ſon eſprit „vit encore. Cet eſprit eſt immortel, il ſe répand de Nation en Na„tion & de ſiecle en ſiecle. Il reſpire à Paris, à Londres, à Berlin, „à Leipſig, à Florence. Il pénétre à Petersbourg; il pénétrera un „jour juſques dans ces climats où le genre humain eſt encore ignorant „& avili: peut-être qu'il fera le tour de l'Univers.“

Je vais plus loin encore; & je dis que les erreurs, les écarts de Deſcartes ont mieux conduit à l'érection des Académies que ſa méthode & ſes maximes de raiſonnement. D'abord l'admiration qu'il excita, la reconnoiſſance pour ſes bienfaits ſignalés, firent qu'on l'écouta comme un Oracle, qu'on lui accorda cette confiance aveugle qu'il étoit venu bannir de l'eſprit humain. On devint Cartéſien comme on avoit été Péripatéticien; peut-être auſſi parce qu'on avoit encore le pli de la ſujettion, le caractere ſervile: à peu près comme les Réformateurs ont été intolérans parce qu'ils ſortoient du ſein d'une Egliſe intolérante. Mais peu à peu les yeux s'ouvrirent; on comprit que Deſcartes pouvoit ſe tromper; on vit qu'il s'étoit trompé effectivement: & je date de là une ſeconde révolution, entée, pour ainſi dire, ſur la premiere, qui n'auroit pas eu lieu ſans doute ſi la premiere n'avoit précédé, mais qui ne laiſſe pas d'être beaucoup plus importante, & la ſeule déciſive; celle par laquelle tout bon eſprit, tout vrai Philoſophe, ne porte plus le nom d'aucun Maître, d'aucune Secte; mais, après avoir ſuffiſamment examiné, mûrement comparé, toutes les doctrines, en adopte une, parce qu'il la trouve vraye, ou s'en forme une en réuniſſant ce qu'il a trouvé de ſolide dans le cours de toutes ſes études, & par la voye de ſes propres recherches.

Quand je dis que les choses sont ainsi, un scrupule m'arrête; & je devrois plutôt dire qu'on les croit sur ce pied, qu'on s'en flatte & qu'on s'en vante, comme de tant d'autres prérogatives, dans lesquelles il entre plus d'illusion que de réalité. Non, l'affranchissement de l'esprit humain n'est rien moins que décidé: le nombre de ceux qui aiment à voir de leurs propres yeux, à faire usage de leur esprit & de leur raison, demeure toujours le plus petit. S'il n'y a plus de Cartésiens, on a vu depuis eux des Newtoniens, des Leibnitiens, des Wolfiens même; & qui sait ce que l'on verra encore! Mais il suffit qu'il y ait eu depuis Descartes ce qui n'avoit pas existé avant lui, un certain nombre de Génies supérieurs, qui ont défriché & mis en valeur des portions incultes du domaine philosophique; domaine qui s'étend & se fertilise de jour en jour, sans qu'il y ait personne qui puisse, ni qui ose, s'y arroger aucun droit despotique. Je dirois presque qu'on y voit à présent l'image du Gouvernement féodal, sans y en rencontrer les inconvéniens. Chacun est Seigneur suzerain de ses propres découvertes; & le titre authentique de cette propriété se transmet aux races futures. Rien de plus encourageant que cette forme de gouvernement; la Vérité seule regne: c'est aux pieds de son Thrône qu'on porte toutes les conquêtes, qu'on dépose tous les trésors: elle en regle la distribution, elle décide de la mouvance de tous les fiefs.

Il n'y a donc point d'homme à présent, qui, après avoir acquis les connoissances préalables nécessaires, ne puisse travailler pour soi en fait de Philosophie, & recueillir immédiatement le fruit de son travail. La Sagesse n'habite plus le Lycée, ni le Portique, encore moins ces Ecoles poudreuses, où, pendant si longtems, le fantôme qui avoit usurpé son nom & sa dignité, transforma son sceptre en une vraye marotte. Elle est dans le cabinet de chaque Philosophe; elle s'y plaît à proportion de l'application qu'on lui consacre, & des progrès qu'on y fait. N'existât-il qu'un seul de ces Cabinets, il seroit le Palais de la Philosophie, le Sanctuaire de la Vérité. Quelle douceur! quelles délices! au prix de l'aridité & de la tyrannie de tout ce qu'on nommoit autrefois étude & science!

Cependant les hommes aiment les associations, soit par le goût naturel & général qu'ils ont pour la société, soit par la connoissance du profit qu'on peut retirer des forces réunies & des travaux combinés. De là tous les Etats, toutes les villes, les bourgades, les hameaux; de là les Corps & les Compagnies, qui, de tout tems, ont formé des entreprises de concert. Celle de cultiver ainsi les Sciences n'est pas de premiere nécessité; & l'on peut jouir des principaux agrémens de la vie sans la former, ni même sans en avoir l'idée, comme le prouve l'expérience de la plûpart des tems & des lieux. Cependant, dès que l'esprit humain est développé jusqu'à un certain point, & a fait certains progrès, il a ses besoins & ses plaisirs à part; il lui faut des alimens dont l'usage devient presque indispensable; & il cherche avec empressement les moyens de se les procurer. On a cru en trouver un fort convenable, en faisant un dépôt commun des connoissances acquises par un certain nombre de personnes, qui se rendent des services réciproques dans cette acquisition. Depuis un siecle, à dater de l'origine de la Société Royale de Londres, l'une de celles, selon moi, qui ont le plutôt saisi & le mieux suivi le véritable objet de ces établissemens; vous savez mieux que moi, Messieurs, tout ce qui s'est fait, c'est à dire, à la lettre plus qu'on n'avoit fait en quarante siecles que comprend à peu près l'Histoire philosophique. De grands Princes ont beaucoup contribué à ces rapides progrès & à ces glorieux succès, par leur protection & par toutes sortes d'encouragemens. Nous en avons un à notre tête qui a plus fait encore, en y joignant son exemple; de sorte que, s'il n'étoit pas notre Protecteur, il seroit Académicien né, le premier de nos Confreres.

Je ferois scrupule de répandre des ombres sur ce riant tableau, & de montrer, comme il ne me feroit que trop aisé de le faire, qu'il s'en faut bien que les Académies ayent, ni au dedans l'agrément, ni au dehors l'utilité, qu'on pourroit s'en promettre. Au fonds les causes que j'en alléguerois, sont moins dans les Académies mêmes, que dans les hommes, dans le cœur humain. La concorde & l'union sont ra-

res:

res : elles supposent une franchise, une cordialité, des sentimens qui n'existerent jamais dans la plûpart des individus, & que l'envie & la jalousie, l'orgueil & l'interêt, étouffent plus ou moins dans les autres. Il faudroit d'ailleurs, pour que des Académiciens se prêtassent mutuellement tous les secours qu'ils peuvent & doivent se fournir, qu'au lieu de ces lectures, rarement intéressantes, ou qui ne le sont jamais que pour le plus petit nombre des assistans, & cela en supposant qu'ils y prêtent une attention dont à peine sauve-t-on quelquefois les apparences ; il faudroit que chaque discours n'offrît rien qui ne pût être saisi, au moins dans ses résultats, par ceux qui l'entendent, & qu'ensuite on fît sur ce qui a été lû des remarques judicieuses & décentes. Mais, à parler franchement, il n'y a presque point de Savans qui sachent exercer la critique, & il y en a moins encore qui sachent la soutenir. Je me rappelle à ce sujet une anecdote que je tiens de M. de Maupertuis. L'Abbé Gedoyn, connu par ses belles Traductions, demanda à l'Académie Françoise la permission de lui lire dans ses Assemblées ordinaires celle de Quintilien à laquelle il travailloit, & pria qu'on lui fît part des remarques qui se présenteroient. Il commença en effet ; mais il ne put aller au delà de la seconde lecture, en partie excédé par les observations vétilleuses de ses Confreres, en partie trop vif & trop sensible pour savoir se rendre de bonne grace toutes les fois que le cas l'exigeoit. Je ne vois point de remede à ces inconvéniens, parce que je n'ai point de secret pour refondre l'homme.

Mais j'abrege ; & laissant l'homme tel qu'il est, je me livre à une idée de spéculation, qui est permise dans toutes les especes du genre auquel mon sujet appartient. Je suppose les Académies aussi parfaites qu'elles pourroient l'être, composées de Membres éclairés, judicieux, impartiaux, unis ensemble par les liens de l'estime & de l'amitié ; & je demande, quel est le plus grand avantage qui puisse résulter de leurs efforts réunis ? C'est toujours ma Question originaire. Je distingue ; & comme dans l'énoncé de cette question, j'ai ajouté le mot d'*actuel* à celui d'*avantage*, je remonte d'abord au premier bien

que

que les Académies étoient appellées à faire dans leur institution même, au siecle où elles ont été fondées: & ce siecle, comme nous l'avons insinué, ne remonte pas plus haut que le précédent.

L'ennemi qu'elles avoient en tête, & dont la défaite faisoit la matiere de leurs triomphes, c'étoit l'ignorance. Mais quelle ignorance! Je saisis de nouveau ici deux points de vue. D'abord celui de l'ignorance privative, de cet état dans lequel on ne sçait rien, parce qu'on ne veut rien savoir, & qu'on méprise les sciences. Qu'on se rappelle quels ont été les préjugés à cet égard; nous les avons vûs, je parle de ceux d'entre nous dont la carriere est à son déclin, nous les avons vûs encore assez fortement enracinés; & je ne sai si on peut les regarder comme pleinement détruits. Le savoir étant regardé comme synonyme de la pédanterie, tous ceux qui aspiroient à quelque genre de distinction, auroient cru s'avilir, contracter une espece de rouille, de crasse, en devenant érudits, en se mettant au fait des notions de la Grammaire, de la Logique, de tout ce qu'on enseigne dans les Colleges, dans les Universités. Les Nobles ne connoissoient point de dérogeance plus marquée que celle de savoir quelque chose. Les Militaires enchérissoient sur eux: à leur avis on ne pouvoit bien manier l'épée qu'en foulant aux pieds la plume. Le Connêtable Anne de Montmorenci, qui a fait une si grande figure sous plusieurs Regnes, l'un des plus illustres personnages de cette Maison qui se glorifie du titre de premier Baron Chrêtien, étoit un Cacique, ou pis encore, un vrai Chef de Sauvages, dur, barbare, ignorant jusqu'à avoir peine à signer son nom. Le sexe n'auroit fourni alors à Moliere, ni Précieuses ridicules, ni Femmes savantes: il avoit des graces, il avoit du génie, cela ne lui a jamais manqué; mais il n'avoit point de connoissances proprement dites. J'en atteste les Cours de Catherine de Médicis, de Henri IV, de Louis XIII, & même de Louis XIV. Dans celles-ci Mesdames de Sévigné & de Maintenon ne peuvent être regardées que comme des femmes prodigieusement spirituelles; & Madame Des-Houlieres, la Comtesse de la Suze, & quelques autres qui ont excellé en

en divers genres de Poésies délicates & galantes, ne changent rien à ma these. Quelcune s'émancipoit-elle au delà de ces bornes? Boileau, quoiqu'injuste dans les traits de satyre qu'il a décochés à ce sujet, & même d'une ignorance grossiere dont je prens aussi acte, ne laissoit pas de se monter au ton du siecle en voulant imprimer du ridicule à la Dame que Roberval fréquentoit. Il reste peut-être à décider, s'il n'auroit pas mieux valu, & ne vaudroit pas mieux encore par rapport au sexe, qu'il fût demeuré en deçà par rapport au savoir que d'aller au delà de certaines bornes, qu'on peut regarder comme circonscrites par l'esprit, le goût, la finesse du sentiment, l'élégance du style, le langage des passions, l'expression du cœur. Pour l'ordinaire la délicatesse des organes n'en permet pas davantage; les agrémens de la société, les besoins de la vie, le bien des familles, en exigent encore moins.

Ne dissimulons rien. Louis XIV l'objet de tant d'admirations, la matiere de tant d'éloges, l'Apollon & l'Auguste de son siecle, avoit un grand sens, mais il ne savoit rien de rien. Son frere, Philippe Duc d'Orléans, parloit perpétuellement sans rien dire. Il n'a jamais eu au monde de Livre que ses Heures, que le Jay, son Maître de Chapelle, & en même tems son Bibliothécaire portoit dans sa poche. Colbert, ce grand Ministre, n'étoit pas plus Mécene que son Maître étoit Auguste. Il étoit guidé dans ses distributions par des sots, ou par sa vanité qui se sentoit flattée de se faire louer à trois cens lieues de lui. Les Tallemans, les Chapelains, les Cassagnes, les Boyers & les le Clerc étoient ses illustres. Son Abbé Gallois n'estimoit que le Grec. Son Bibliothécaire Baluze n'excelloit qu'à lire de vieux parchemins. Tous ces gens-là ne cherchoient qu'à faire valoir leurs amis. Pendant ce tems des Savans du premier ordre mouroient de faim; Patru, le Dictateur de l'Eloquence Françoise, le Fevre de Saumur, le plus habile Littérateur & Critique de son tems, Bouillaud & Auzoot aussi versés dans les Mathématiques & dans la Physique qu'on pouvoit l'être alors, & bien d'autres. N'avois-je pas raison, Messieurs, de vous dire d'entrée que les mêmes objets offrent des points de vue bien diffé-

différens, & ſouvent bien oppoſés. J'avoue cependant que l'ignorance diminuoit alors à vue d'œil, & qu'en paſſant par des nuances & des dégradations inſenſibles, elle tendoit au ſavoir.

Recherchons à préſent d'où venoit cet éloignement pour la ſcience, cet attachement à l'ignorance privative. Changez de poſition, & vous trouverez la raiſon du fait dans ce que je crois pouvoir nommer l'ignorance poſitive, dans le faux ſavoir. Les ſubtilités, les obſcurités, les puérilités de toutes les doctrines, ſans en excepter la plus ſainte de toutes, ou même en la regardant comme la plus radicalement viciée, avoient tellement dégoûté le reſte des humains de l'étude qu'on ne peut bonnement leur en faire un reproche. Ouvrez les Livres du Maître des ſentences & de tous les Docteurs de la même trempe; & voyez ſi de pareils Ouvrages ne tomboient pas néceſſairement des mains de ceux qui y jettoient les yeux, & ne leur inſpiroient pas même une ſorte de frayeur. Suivant le Poëte Satyrique, l'homme eſt bien au deſſous de l'âne; mais le docteur étoit alors fort au deſſous de l'homme. Cela me rappelle la plaiſanterie du Libraire Hollandois, qui, faiſant la Table d'un Boileau, y mit: DOCTEUR. Voyez ANE.

Dans le grand nombre il y avoit ſans contredit quelques Docteurs eſtimables; mais je ne puis mieux faire ſentir la différence que le tems mettoit entr'eux qu'en comparant deux hommes qui ſe touchent, & dont l'un a ſuccédé immédiatement à l'autre; ce ſont les deux premiers Sécretaires de l'Académie des Sciences de Paris, Mrs. du Hamel & de Fontenelle. M. du Hamel étoit certainement ce qu'on pouvoit être de mieux de ſon tems: encore faut-il remarquer qu'il avoit vu l'aurore du jour Cartéſien, & qu'il avoit ſû en profiter. Mais quelle différence de lui à M. de Fontelle, inondé, pour ainſi dire, de tout l'éclat d'un ſiecle de lumiere, & y rayonnant lui-même avec la plus grande force, quoiqu'avec la petite tache d'être mort Cartéſien, peut-être parce que, ſans le ſavoir, & quoique l'Avocat, le Héraut des modernes, il étoit encore un peu ancien.

Dans cette fermentation des eſprits, de quoi s'agiſſoit-il? D'inſpirer aux uns le goût du vrai ſavoir, & de porter les autres, choſe bien plus difficile! à l'abjuration du faux ſavoir. Après le flambeau allumé & préſenté par Deſcartes, rien n'étoit plus propre à produire ces heureux effets, & ne les a mieux produits en effet, que l'établiſſement des Académies. Quand on a vu des gens d'élite, parmi leſquels il n'a pas tardé de s'en trouver de très diſtingués par leur naiſſance & par leurs dignités, ſe dévouer à l'étude; & ſans prendre ni robe, ni bonnet, ſans aller s'enrouer ſur les bancs d'aucune Ecole, s'abſorber dans les ſciences, dans celles en particulier, qui, vers la fin du ſiecle paſſé, acquirent par un jet imprévu, ſi je puis m'exprimer ainſi, tant de hauteur; quand on les a vûs en faire leurs délices, y chercher leur gloire; on a d'abord eu peine à en croire ſes yeux, mais de l'étonnement on a bientôt paſſé à l'admiration, de l'admiration à l'imitation: & je ſerois tenté de craindre qu'on ne ſe ſoit jetté, ou qu'on ne vienne à ſe jetter, dans l'extrémité oppoſée. Les places d'Académicien ſont devenues des brevets d'honneur, qui figurent avec ceux des Maréchaux & des Miniſtres, qui ſont même recherchés, nous en avons un ſouvenir bien récent & bien gracieux, par des Princes, par des Héros, que la Renommée exalte, que la Gloire couronne.

Quelle révolution, Meſſieurs! Et ne ſommes-nous pas excuſables de l'enviſager avec quelque complaiſance? L'ignorance n'a plus d'autre partage que le mépris & la honte: le faux ſçavoir d'autre azyle que ces contrées où le ſyſteme monachal le protege. Partout ailleurs, juſqu'aux glaces du Pole, les Académies ſont des Capitales des ſciences dont on ne croit pas que les Capitales des Empires doivent ou même puiſſent être dépourvues. Il me ſemble déjà les voir traverſer le détroit tant cherché & à la découverte duquel il ſemble qu'on touche, celui qui ſépare l'Europe de l'Amérique, & procurer à notre Globe un avantage, dont le Soleil lui-même, quoique pere du jour, ne ſauroit le faire jouir, c'eſt d'avoir ſes deux Hémiſpheres éclairés à la fois.

Que

Que reste-t-il donc à faire aux Académies? Quelle est leur tâche actuelle, leur but principal, & leur effet le plus avantageux dans les circonstances où nous nous trouvons? C'est ce que je devrois vous dire à présent, Messieurs; si ce discours n'avoit peut-être été déjà trop long, & ne vous avoit privés du plaisir d'en entendre d'autres plus propres à captiver votre attention. Permettez-moi donc de m'arrêter, en vous promettant un second Discours pour l'Assemblée publique prochaine, si la Providence le permet: & que celui-ci finisse par les vœux dont ces murs doivent retentir dans le jour solemnel que nous célébrons.

Que FRÉDERIC vive! Que sa gloire aille toujours en croissant! Que son Académie se rende de plus en plus digne de la célébrer!



SUR

L'USAGE

DU

PRINCIPE DE LA RAISON SUFFISANTE DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS.

PAR M. BÉGUELIN. (*)

I.

J'ai montré dans un Mémoire précédent que la doctrine des probabilités étoit uniquement fondée sur le principe de la raison suffisante; il ne feroit donc pas surprenant que les Mathématiciens ne fussent pas d'accord entr'eux dans la solution des problemes qui ont la probabilité pour objet; leurs calculs sont de vérité nécessaire, mais la nature du sujet auquel ils les appliquent ne l'est pas. Les vérités contingentes ne peuvent être démontrées qu'en partant d'une supposition; & quelque plausible qu'une supposition soit, elle n'en exclut pas nécessairement d'autres, qui peuvent servir de base à d'autres calculs, & donner par conséquent des résultats différents.

Un illustre Auteur, Géometre & Philosophe à la fois, a publié depuis peu sur le Calcul des probabilités, des doutes & des questions bien dignes d'être approfondies; il insinue cependant qu'un grand Géometre ne les a pas jugées telles; le fait ne m'est point connu, & j'ignore également ce qui pourroit fonder ici la diversité de sentiment entre deux Géometres de cet ordre. D'ailleurs il me conviendroit mal d'entreprendre la décision de cette dispute; je dois dire avec Palémon:

Non nostrum inter vos tantas componere lites.

Ce

(*) Lû à l'Académie le 14 Janvier 1768.

Ce que je me propoſe ici, c'eſt ſimplement d'eſſaïer juſqu'où les principes métaphyſiques peuvent aider à éclaircir les doutes, & à réſoudre les queſtions propoſées ſur le Calcul des Probabilités.

II. Pour éviter toute ambiguité ſur ce ſujet, diſtinguons d'abord la poſſibilité d'un événement de ſa probabilité. Toute combinaiſon qui n'implique pas contradiction eſt poſſible, & comme on ne ſauroit impliquer à demi, toutes les combinaiſons poſſibles ſont également poſſibles; ce n'eſt qu'improprement qu'on diroit d'un événement poſſible, qu'il eſt plus ou moins poſſible qu'un autre; il n'y a point de milieu, ni de degrés à concevoir, entre ce qui peut exiſter, & ce qui répugne à l'exiſtence.

Mais la ſimple poſſibilité ne ſuffit pas pour donner l'exiſtence à un événement; il faut de plus qu'il y ait une raiſon ſuffiſante qui détermine l'événement à être plutôt celui qu'il eſt, qu'un des autres également poſſibles: & c'eſt ici que commence la probabilité.

III. Dans un événement quelconque, il y a encore trois choſes à diſtinguer qui peuvent être confondues. 1°. ſa néceſſité; 2°. ſa probabilité, & 3°. ſon actualité. Chacune de ces trois choſes a ſa raiſon ſuffiſante; mais il n'y a que celle de la ſeconde qui ſoit à proprement parler le fondement du calcul des probabilités. La raiſon ſuffiſante de la néceſſité d'un événement, c'eſt l'impoſſibilité de l'événement contraire: s'il n'y a que des billets noirs dans la roue de fortune, il eſt néceſſaire que le billet qui ſortira ſoit noir. La raiſon ſuffiſante de la probabilité d'un événement, c'eſt la préponderance des raiſons de s'attendre à cet événement ſur celles de s'attendre à l'événement contraire; s'il y a dans la roue quatre vingt dix neuf billets blancs, & un ſeul billet noir; il y a quatre vingt dix neuf raiſons contre une de s'attendre que le billet qu'on tirera au hazard ſera blanc. Enfin la raiſon ſuffiſante de l'actualité d'un événement, c'eſt le concours actuel des cauſes phyſiques & mécaniques capables d'amener

ner

ner cet événement-là. Or, comme on ſuppoſe non ſeulement que l'exiſtence de ce concours de cauſes ne dépend pas de nôtre volonté, mais de plus que nous ne ſaurions le démêler lors même qu'il exiſte, il eſt évident que nous ne connoiſſons point la raiſon ſuffiſante de l'exiſtence d'un événement qu'on nomme fortuit; & qu'il peut par conſéquent être contraire à celui que nous avions une raiſon ſuffiſante d'attendre, c. à d. de regarder comme le plus probable. Mais il eſt évident auſſi que l'oppoſition entre l'événement & le calcul qui l'annonçoit, n'affoiblit point la ſolidité des principes du calcul. Ces principes ne conduiſent qu'à déterminer quel eſt l'événement le plus probable, abſtraction faite des cauſes phyſiques & mécaniques imperceptibles qui doivent concourir à déterminer ſon exiſtence.

IV. Si le calcul des probabilités n'eſt pas fondé ſur les cauſes phyſiques qui amenent l'événement, il ne l'eſt pas non plus ſur les caprices du hazard qu'on imagine préſider à la naiſſance des événemens d'une certaine eſpece. Les biſarreries du hazard ne ſauroient donner la moindre priſe au calcul, & le plus habile analyſte ne pourra jamais dire, ni ce que le ſort produira, ni même ce qu'il eſt probable qu'il voudra produire; il y a une répugnance parfaite entre l'idée du hazard & celle de la probabilité; la derniere ſuppoſe quelque principe fixe, l'autre exclut tout principe. On peut prédire infailliblement l'effet d'un agent mécanique ſoumis à des loix immuables; on peut prévoir probablement l'action d'un être intelligent qui ſuit les loix de ſa nature; mais on ne devinera jamais avec le moindre degré de vraiſemblance l'opération d'un être qui ne ſeroit dirigé par aucune eſpece de loi, ni phyſique, ni morale, ni néceſſaire, ni contingente. (*) Le Calcul des probabilités prend donc un milieu entre l'arbitraire fortuit, & la néceſſité phyſique; il décide quel ſera l'événement, non entant qu'il eſt dirigé par le hazard, non entant qu'il eſt déterminé par les cauſes méca-

(*) - - - - - - - *Incerta hæc ſi tu poſtules*
Ratione certa facere, nihilo plus agas,
Quam ſi des operam, ut cum ratione inſanias. TER. EUNUCH.

mécaniques, mais en le supposant prescrit par les loix de la convenance, par l'équité d'un juge impartial. Si entre cent cas possibles, & également probables, il n'y en a qu'un qui me fasse gagner cent Ecus, & quatre vingt dix neuf qui ne me feront rien gagner, il y a 99. à parier contre 1. que je ne gagnerai pas. Pourquoi dit-on dans ce cas-ci, que la probabilité que j'ai de gagner vaut précisément un Ecu tandis qu'il est très possible que je gagne cent écus, & qu'il est absolument impossible que j'en gagne un? C'est qu'on ne calcule pas ce que le hazard fera, mais ce qu'il devroit faire s'il distribuoit ses faveurs avec une exacte impartialité.

V. Après ces éclaircissemens préliminaires, la premiere question qui se présente à résoudre, c'est de savoir *si les évènemens simmétriques & réguliers, attribués au hazard, sont (toutes choses d'ailleurs égales) aussi probables que les évènemens qui n'ont ni ordre ni régularité, & au cas qu'ils aient le même degré de probabilité, d'où vient que leur régularité nous frappe, & qu'ils nous paroissent si singuliers?*

Choisissons d'abord un exemple propre à éclaircir ce sujet:

Je jette sur la table six dez, A, B, C, D, E, F. Il y a précisément 46656 combinaisons possibles; ainsi, quelque combinaison que j'amene, il y avoit 46655 à parier contre 1, qu'elle ne viendroit pas au premier coup. Mais comme malgré cette probabilité qui semble exclure successivement chaque combinaison particuliere, il faut nécessairement qu'il en vienne une, si j'amene par ex. la combinaison A 2, B 5, C 3, D 4, E 3, F 1, personne n'en marquera la moindre surprise, si au contraire j'amene au premier coup rafle de six, ou de cinq, etc. on se récriera sur la singularité du cas. Il y a plus, c'est que si l'on jette ces six dez 46656 fois de suite, il y a une raison suffisante de s'attendre que chaque combinaison particuliere paroitra une fois en 46656 coups; & j'avoue que je ne vois rien qui doive exclure les rafles de leur droit d'être compris dans cette probabilité. Cependant il est certain que le coup quel qu'il soit qui les aménera paroitra toujours extraordinaire, tandis que leur exclusion n'étonnera jamais.

Il y a deux raisons, ce me semble, qui doivent faire paroitre un coup de rafle plus singulier que toute autre combinaison. L'une est tirée de la parfaite régularité qui distingue ce cas. Les dez sont mêlés au hazard, & jettés de même. La régularité suppose le contraire du hazard, un choix, un arrangement, une raison suffisante. Trouver dans une production du hazard un effet semblable à celui qu'on auroit pû attendre d'un dessein prémédité, c'est un événement auquel on n'est pas préparé, il doit frapper par sa singularité, & paroitre moins probable par conséquent que d'autres qui sans avoir un plus haut degré de probabilité n'ont rien de singulier.

La seconde raison qui doit faire trouver plus étrange la combinaison où tous les dez présentent la même face, que toute autre combinaison déterminée, c'est que celle-ci étant irréguliere n'a rien qui la rende remarquable, rien qui fixe l'attention. Elle n'offre aucun caractere marqué qui la fasse distinguer d'un grand nombre d'autres combinaisons également irrégulieres; or le nombre de celles-ci étant sans contredit le plus grand, le coup qui aménera l'une des combinaisons irrégulieres, confondu avec tous les autres coups semblables, doit paroitre un événement fort commun, auquel on avoit tout lieu de s'attendre, d'où il arrive naturellement qu'un événement contraire semblera très singulier. Six dez donnent 6^6. combinaisons différentes; dont il n'y en a que 6 d'exactement régulieres, toutes les autres au nombre de $6^6 - 6$. s'écartent plus ou moins de la régularité; il n'est donc pas étonnant que le coup qui améneroit rafle de six paroisse plus singulier que celui qui améneroit la combinaison A 2, B 5; C 3, D 4, E 3, F 1; puisque cette combinaison ressemble à 46649 autres, au lieu que le coup de rafle de six, n'admet que 5 autres coups semblables. Par conséquent, si l'on ne s'apperçoit pas de la détermination individuelle, on jugera le coup qui amene 2; 5; 3; 4; 3; 1. plus probable, sept mille sept cent soixante & quinze fois, & autant de fois moins singulier, que le coup qui améneroit 6; 6; 6; 6; 6; 6.

Sup-

Supposons néanmoins qu'on fasse réellement attention aux nombres déterminés 2; 5; 3; 4; 3; 1; le cas qui les aménera doit cependant paroitre beaucoup moins singulier que celui qui donneroit tous les *six*, parce que pourvu qu'on voie des nombres de points différens sur les dez, on ne s'avise gueres d'examiner scrupuleusement à quel dé précisément chaque nombre appartient. Or six dez peuvent donner cette même combinaison 2; 5; 3; 4; 3; 1; en sept cent vingt manieres différentes, il doit donc paroitre même en faisant attention à l'espece déterminée d'irrégularité, que les cas qui l'amenent sont sept cent vingt fois moins singuliers que le cas unique de rafle de six.

VI. Les mêmes raisons qui font que les combinaisons régulieres attribuées au hazard causent de la surprise, nous font également trouver étranges les combinaisons où l'on n'apperçoit ni ordre ni régularité, lorsque ces combinaisons sont attribuées à la volonté d'un Etre intelligent. Entre toutes les combinaisons possibles, un Etre sage ne choisira pas une de celles qui composent l'espece la plus nombreuse, par la seule considération que cette classe est la plus nombreuse. Il choisira la combinaison qui répond le plus exactement à son plan, fût elle unique en son espece, comme elle est nécessairement unique par sa détermination individuelle. Les orbites des planetes de notre Soleil, par exemple, pouvoient sans doute avoir entr'elles des inclinaisons bien différentes de celles que l'auteur de l'Univers leur a assignées. Mais celles-ci étant le résultat de son choix libre, on peut assûrer sans témérité que c'étoit la combinaison la plus convenable au plan le plus parfait; & qu'il y a dans ce plan une raison suffisante de l'arrangement actuel de ces orbites. Il y auroit peut-être de la témérité à entreprendre de déterminer précisément cette raison. Mais il est très permis d'imaginer si l'on peut la cause finale la plus satisfaisante, pourvu qu'on ne prétende pas décider peremptoirement, qu'elle a dû être l'unique motif de l'arrangement actuel. On a effectivement réussi à en trouver des raisons très plausibles, & pour ne parler que de l'Ouvrage le plus

nouveau que je connoisse sur ce sujet, le savant auteur des Lettres Cosmologiques a montré avec beaucoup de sagacité, que l'arrangement préféré étoit le plus propre de tous à rassembler & à faire tourner sans embarras autour d'un même Soleil, le plus grand nombre possible de planetes à orbites circulaires & allongées.

VII. De ce que nous venons de dire dans les deux articles précédens, je crois que l'on peut conclure légitimement; 1°. que la régularité ou l'irrégularité d'une combinaison individuelle déterminée, n'ajoute, & n'ôte rien à sa probabilité réelle. 2°. que la combinaison la plus simmétrique paroitra néanmoins la plus singuliere, la plus inattendue, & la moins probable de toutes, lorsqu'elle sera produite par le concours fortuit de causes purement mécaniques. 3°. Que d'un autre côté cette même combinaison paroitra la plus naturelle, & la plus probable de toutes, si on la regarde comme l'effet du choix libre d'un Etre intelligent. 4°. que dans cette derniere supposition on est autorisé à rechercher la raison suffisante de l'actualité d'un événement, parce qu'il doit avoir une cause finale; & enfin 5°. qu'on ne doit point chercher de raison à l'existence d'un événement qu'on attribue au hazard, puisqu'il n'y a point ici de causes finales à découvrir, & que les causes physiques sont trop compliquées, & trop cachées pour qu'on puisse les démêler.

VIII. Jusqu'ici il n'a été question que du cas d'une combinaison unique, dont l'existence exclut celle de toute autre combinaison également possible. Mais on propose une autre question plus difficile à discuter: c'est que *lorsqu'un même événement est déjà arrivé une ou plusieurs fois de suite, on demande si cet événement conserve autant de probabilité pour sa future existence, que l'événement contraire qui avec une égale probabilité primitive n'est point arrivé encore.* Il n'est pas nécessaire d'avertir que la question concerne les événemens fortuits, ou du moins ceux qu'on estime tels faute de connoitre les causes qui les produisent. Car dès qu'il s'agiroit d'événemens amenés par une cause mécanique constante, ou d'événemens dirigés par la volonté d'un Etre intel-

intelligent, il est évident que ces événemens doivent se succéder sans variation aussi longtems que leurs causes finales & mécaniques n'auront pas changé; & que si ces causes sont connues on pourra prédire à coup sûr le retour du même effet. Les événemens fortuits ont également leur cause déterminée, mais dans l'impossibilité où nous sommes de l'appercevoir, tout ce que nous pouvons faire c'est d'examiner s'il est probable que le même concours de circonstances qui a amené une fois ou deux un événement, subsistera assez longtems invariable pour reproduire ce même événement une troisieme & une quatrieme fois. Or si l'on accorde, comme il semble qu'on n'en sauroit douter, que tout événement dépend d'un grand nombre de causes séparées qui concourent à le déterminer, & que ces causes n'ont entr'elles aucune connexion nécessaire; si l'on considere de plus que la nature entiere, par sa propre activité, passe continuellement d'un état à un autre état, on reconnoitra sans peine qu'il n'est pas probable que le même concours de circonstances dont la réunion accidentelle avoit amené un événement, revienne plusieurs fois de suite sans la moindre altération; & puisque toute altération dans l'assemblage des causes, peut produire une diversité dans l'effet qui en résulte, il paroit probable qu'un événement produit par le concours accidentel de diverses causes partiales ne sera pas le même plusieurs fois de suite. Il semble donc que lorsqu'il est question d'un événement répété, la probabilité de son retour doit être en raison composée de la probabilité absolue de cet événement, & de la probabilité des causes combinées qui peuvent le ramener.

IX. Pour éclaircir davantage la question, supposons une loterie de deux seuls billets, l'un blanc, l'autre noir; qu'on ne tire qu'un billet à chaque tirage, & que le billet sorti rentre chaque fois dans la roue pour le tirage suivant. Si le billet qui sortira est blanc, je perds ma mise; s'il est noir, l'entrepreneur de la lotterie m'en paie le double. Il est évident qu'au premier tirage la probabilité est égale de part & d'autre & que nous jouons au pair.

Mais après le premier tirage, on demande, si ce coup doit influer sur le suivant quant au calcul des probabilités, ou si l'on doit considérer chaque nouveau tirage comme un acte isolé qui n'a nulle connexion ni avec ceux qui l'ont précédé ni avec ceux qui le suivront. Il y a des raisons spécieuses pour l'une & pour l'autre opinion. En effet l'on peut dire d'un côté que par la rentrée du billet sorti tout se retrouve dans l'état primitif; qu'on n'est pas plus fondé à combiner le tirage qui a immédiatement précédé avec celui qui va suivre, qu'un tirage quelconque qui auroit précédé celui-ci de plusieurs siécles; ou qu'un tirage qui auroit été fait à cent lieues d'ici sur un plan semblable; qu'avant de procéder au premier tirage on auroit été aussi bien en droit de supposer, & d'imaginer un nombre quelconque de tirages antérieurs à ce premier, lesquels ne changeroient néanmoins rien par rapport à celui-ci, ni dans l'événement, ni dans sa probabilité; en un mot que chaque tirage est évidemment un acte unique, indépendant, sans rélation quelconque à tout autre, & dont par conséquent la probabilité demeure invariablement déterminée par le rapport du nombre des billets gagnants, aux billets perdants.

En adoptant ce principe, les lots seroient ici constamment le double de la mise; & comme je suis obligé, pour me racquitter des pertes faites aux tirages précédents, de doubler la mise à chaque nouveau tirage, si la premiere a été de demi-Ecu, on aura la table suivante.

Tirage.	Mise.	Lot.
1er	$\frac{1}{2}$	1
2d	1	2
3e	2	4
4e	4	8.
⋮	⋮	⋮
t^e	$\frac{2^t}{4}$	$\frac{2^t}{2}$.

Quel-

Quelque plausible que soit cette opinion, il en résulte néanmoins une conséquence qui tend à la réfuter invinciblement, c'est que tôt ou tard l'entrepreneur de la lotterie seroit la duppe de ce calcul. Le joueur se racquitte de tous les tirages malheureux par un seul tirage qui lui sera favorable, tandis qu'au contraire cent & mille tirages favorables à l'entrepreneur ne le mettent jamais à couvert de perdre en un seul coup l'avantage de tous ces tirages heureux. Où seroit ici l'égalité qui doit être entre la condition des intéressés? Il n'y a qu'un seul cas qui puisse compenser le désavantage de l'entrepreneur, mais ce cas est étranger au calcul des probabilités; c'est que le joueur doublant la mise à chaque tirage, peut se trouver au bout d'un certain nombre de tirages malheureux hors d'état de soutenir la gageure; qu'il peut être dans l'impuissance de continuer le jeu faute d'argent pour une mise ultérieure, au lieu que l'entrepreneur ne risque jamais du sien que la valeur de la premiere mise: mais cette considération, très importante pour les intéressés, ne sauroit influer sur l'exactitude du calcul abstrait des probabilités.

X. Les partisans de l'opinion que je viens d'examiner diront peut-être que le désavantage de l'entrepreneur n'est réel que dans la supposition que les tirages continuent à l'infini, ou du moins à la volonté du joueur; mais que si le nombre des tirages a été fixé d'avance, la probabilité sera égale de part & d'autre, puisque si l'entrepreneur risque plus de perdre par la répétition des tirages, il risque aussi de gagner une somme proportionnée à cette répétition. Mais ne seroit-ce pas là reconnoitre tacitement une connexion entre la suite des tirages, & avouer en quelque façon qu'ils influent les uns sur les autres, & qu'il n'est pas présumable qu'un grand nombre de tirages successifs puisse donner constamment l'avantage d'un même côté? Car si à chaque tirage il y avoit également à parier *un* contre *un*, que le billet qui sortira sera un billet blanc, il devroit être très indifférent à l'entrepreneur que le nombre des tirages fût limité d'avance, ou qu'il ne le fût pas.

XI.

XI. Voïons donc aussi ce qu'on peut dire en faveur du sentiment qui établit une connexion entre les tirages successifs, & quelle seroit la nouvelle probabilité qui en résulteroit. Quand on réfléchit sur le principe de ce calcul on ne trouve rien qui empêche de l'appliquer aussi bien aux événemens successifs, qu'aux événemens simultanés. En effet ce principe n'est que le rapport des raisons suffisantes pour ou contre un événement. Supposons que d'une roue où l'on aura mêlé 500 billets blancs, avec autant de billets noirs, on en tire à la fois deux, au hazard. Il y a précisement autant de raison de s'attendre que tous les deux seront blancs, que d'espérer que tous les deux seront noirs. Mais les deux billets ne sauroient être à la fois blancs & noirs; il y a donc une raison suffisante de penser que l'un des deux sera un billet blanc, & l'autre un billet noir. Le même raisonnement aura lieu si l'on en tire à la fois 4; 6; 8; ou tel nombre pair que l'on voudra; la probabilité restera toujours que la moitié des billets sortis sera d'une espece, & l'autre moitié de l'autre espece. Or je demande s'il y a quelque différence capable d'altérer cette probabilité, soit que l'on tire par exemple douze billets à la fois par un acte simultané, ou que l'on tire ces douze billets deux à deux, en six actes successifs? Je dis en six fois, car si on les tiroit en douze coups, la probabilité pour l'alternation des deux especes seroit encore renforcée, par la considération qu'il resteroit dans la roue, après le premier tirage, un billet de plus, de la couleur opposée à celle qui viendroit de sortir.

Mais si l'on accorde que la probabilité est la même, soit que l'on tire à la fois ces douze billets, soit qu'on en fasse douze tirages successifs, l'on accorde aussi que la probabilité est que sur 12 tirages, il y en aura six qui donneront des billets blancs, & six autres qui en donneront des noirs; & par la même raison la probabilité voudra que sur deux tirages, les especes alternent; & cela, soit que les billets sortis rentrent, ou qu'ils ne rentrent plus. Mais dans ce dernier cas la probabilité pour l'alternation augmente en raison du rapport numérique des billets restants de chaque espece.

XII.

XII. Pour déterminer la loi de cette probabilité, on peut faire différentes ſuppoſitions; la plus naturelle c'eſt de conſidérer chaque eſpece comme réuniſſant les droits de tous les individus qui la compoſent, & chaque individu comme aiant un droit égal à ſortir; ſa prétention s'éteint par ſa ſortie, & ſubſiſte auſſi longtems qu'il ne ſortira pas; ſi les eſpeces contiennent un nombre égal d'individus, elles ſont dans le cas de ceux-ci, pour l'égalité des prétentions. Si, par exemple, on fait deux tirages, une eſpece a le même droit que l'autre, de ſortir au premier & au ſecond coup. Mais celle qui ſort au premier tirage, n'a plus pour ainſi dire qu'une raiſon de prétendre à ſortir, au lieu que l'autre conſerve ſes deux degrés de prétention; il y a donc ici 2 à parier contre 1, que l'eſpece qui n'eſt pas ſortie au premier tirage, ſortira au ſecond.

Par la même raiſon, ſi les trois premiers tirages ont amené la même eſpece, il y auroit 4 à parier contre 1, que l'autre eſpece ſortira au quatrieme tirage, & en général tant qu'il y aura dans la roue autant de billets d'une eſpece que de l'autre; ſi l'on en fait ſortir un nombre quelconque t, ſoit à la fois, ou en t tirages ſucceſſifs, & qu'ils ſoient tous d'une même eſpece, il y a à parier $t + 1$ contre 1, que le billet ſuivant ſera de l'autre eſpece.

XIII. Si les billets ſortis ne rentrent plus pour concourir au tirage ſuivant, il réſulte de cette condition une nouvelle probabilité pour l'alternation des eſpeces.

Que le nombre de billets de chacune des deux eſpeces A, & B, ait d'abord été $= n$, qu'on ait déjà fait un certain nombre de tirages $= t$, & que tous les billets ſortis aient été de l'eſpece A, leur nombre reſtant ſera $= n - t$, & celui des B ſera encore $= n$. On demande la probabilité qu'il y a que dans le tirage ſuivant $t + 1$, on verra ſortir un billet de l'eſpece B?

Si l'on ne fait nulle attention aux tirages précédens, & qu'on ne conſidere que le nombre des billets reſtans, la probabilité pour l'eſpe-

l'eſpece B ſera $= \frac{n}{2n - t}$, & pour l'eſpece A elle ſera $= \frac{n - t}{2n - t}$; ainſi il y auroit à parier n contre $n - t$, que l'eſpece B ſortira au prochain tirage.

Mais, ſi l'on a égard à ce que chaque eſpece avoit d'abord $t + 1$ prétentions à ſortir en $t + 1$ tirages, que l'eſpece B a conſervé tous ſes droits, & que l'eſpece A n'a plus qu'un ſeul degré de prétention ſur le $t + 1^{me}$ tirage, il y auroit encore à parier $t + 1$ contre 1, que l'eſpece B ſortira à ce tirage-là: & par conſéquent, ſi l'on combine ces deux probabilités, il y aura à parier pour l'eſpece B, $nt + n$ contre $n - t$.

Il eſt remarquable que ce qui n'eſt que probabilité lorſqu'il s'agit d'eſpeces, devient néceſſité lorſque les eſpeces ſont réduites à l'individu; ſi $n = 1$ & $t = 1$, il y a à parier 1. contre 0. que B ſortira au ſecond tirage.

Il paroit que, dans le cas que je ſuppoſe ici, ſavoir que les billets ſortis ne rentrent pas, la combinaiſon des probabilités que je propoſe doit être admiſe. Car les événemens ſucceſſifs doivent alterner par la même probabilité qui fait préſumer qu'un événement multiple ſimultané ſera composé d'événemens ſimples alternans. Mais, lorſque les billets ſortis ne rentrent pas, la raiſon pour l'alternation augmente à meſure que les cas qui pouvoient l'empêcher diminuent: cette probabilité augmente même au point, que lorſque la diminution des cas contraires va juſqu'à les anéantir, l'alternation, ou plutôt le paſſage d'une eſpece à l'autre, devient néceſſaire, au lieu d'être ſimplement probable. Je dis le *paſſage*, plutôt que l'*alternation*, parce que celle-ci renferme l'idée d'un retour prochain à la premiere eſpece; retour qui n'eſt plus poſſible lorſque tous les cas qui pouvoient amener cette eſpece-là ſont épuiſés, ce qui arrive lorſque l'on a $t = n$, ou $n - t = 0$

XIV.

XIV. De ce qui a été dit à l'article XII. dans la ſuppoſition que le billet ſorti rentre à chaque tirage ſuivant, il réſulte que, ſi le nombre des tirages étoit cenſé infini, il y auroit auſſi l'infini à parier contre l'unité que l'on n'aura pas toujours tiré le billet blanc; par conſéquent, dans le Probleme que M. *Nicolas Bernoulli* avoit propoſé à M. de *Montmort*, Paul pariant que Pierre aménera *pile*, pourroit dans toutes les regles, je ne dis pas de la prudence, mais de la probabilité, parier une ſomme infinie ſi la choſe étoit faiſable, contre un ſeul écu, que tôt ou tard *pile* ſera amené.

XV. Ce probleme connu a embaraſſé les Mathématiciens par la difficulté que ſa ſolution fait naître. Voici à quoi il ſe réduit ſi on le ramene à notre lotterie perpétuelle, compoſée ſeulement de deux billets, l'un blanc & l'autre noir. Pierre permet à Paul de tirer un billet; & s'engage de lui donner autant de demi-écus, qu'en exprime le nombre 1 doublé autant de fois qu'il aura fallu de tirages pour amener le billet noir. Si, par exemple, ce billet ne ſort qu'au douzieme tirage, Paul recevra $\frac{2^{12}}{2} = 2^{11} = 2048$ Ecus, & en général s'il ne ſort qu'au tirage t, Pierre promet la ſomme de 2^{t-1} Ecus, ſomme qui ſera énorme, ſi t eſt un nombre un peu conſidérable.

Il ſemble d'abord par l'énoncé de ce Probleme, & c'eſt ce qui a paru ſingulier à de célebres Géometres, que la fortune de Paul eſt aſſurée, & qu'il a l'eſpérance de recevoir une ſomme immenſe: en effet, par le calcul ordinaire des probabilités, on trouve que la ſomme des eſpérances de Paul eſt exprimée en Ecus par cette ſérie

$$\tfrac{1}{2}t \times \tfrac{2}{2} + \tfrac{1}{4}t \times \tfrac{4}{2} + \tfrac{1}{8}t \times \tfrac{8}{2} + \cdots + \tfrac{1}{i}t \times \frac{i}{2} = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}t \text{ etc.} = \tfrac{1}{2}tt \text{ Ecus.}$$

Mais, comme entre tous les tirages, dont on ſuppoſe ici que le nombre eſt $= t$, il n'y a qu'un cas qui faſſe gagner Paul, ſon eſpérance moïenne ſe réduit à la ſomme de $\frac{tt}{2t} = \frac{1}{2}t$ Ecus. Il pourroit donc eſpérer une ſomme infinie, ſi le nombre t des tirages alloit à l'infini avant

que le billet noir sortît. Cependant on tombe assez généralement d'accord qu'il y auroit de la folie à lui donner pour cette espérance au delà d'une vingtaine d'écus.

Voïons donc, en supposant nos principes, quelle seroit la somme qu'on pourroit raisonnablement offrir à Paul pour son espérance.

A' chaque tirage t prêt à se faire, la somme promise par Pierre est $= 2^{t-1}$ Ecus, & la probabilité pour *blanc* & *noir* étant supposée égale, l'espérance de Paul à cette somme est $= \frac{2^{t-1}}{2} = 2^{t-2}$. Mais nous avons vû (article XII.) que, si le billet noir n'étoit pas sorti dans les $t - 1$, tirages précédens, il y avoit à parier t contre 1, qu'il sortiroit au tirage t. Donc, par la même raison, avant tout tirage il y avoit à parier $t - 1$ contre 1, que le billet noir sortiroit avant le tirage t; $t - 2$ contre 1, qu'il sortiroit avant le tirage $t - 1$; $t - 3$ contre 1 qu'il sortiroit avant le tirage $t - 2$, & ainsi de suite. En sorte qu'en combinant ces gageures il y auroit à parier $1 \times 2 \times 3$ (----) $(t - 1)$ contre 1, que Paul ne réalisera pas l'espérance 2^{t-2} écus; son espérance à cette somme ne lui vaudroit donc que :

$$2^{t-2} \times \frac{1}{1.2.3\,(---)\,(t-1)+1} \text{ Ecus.}$$

On peut, en développant cette formule, trouver la valeur de l'espérance $= e$ de Paul à chaque prix 2^{t-1}; pour le nombre de tirages dont on sera convenu d'avance

$t = 1$ donne $e = \frac{1}{2} \times \frac{1}{0+1}$ - - - $= \frac{1}{2}$ Ecu

$t = 2$ - - $e = 1 \times \frac{1}{1+1}$ - - - $= \frac{1}{2}$ - -

$t = 3$ - - $e = 2 \times \frac{1}{1.2+1}$ - - - $= \frac{2}{3}$ - -

$t = 4$ donne $e = 2.2 \times \dfrac{1}{1.2.3+1}$ - - - $= \frac{4}{7}$ Ecu

$t = 5$ - - $e = 2.2.2 \times \dfrac{1}{1.2.3.4+1}$ - - $= \frac{8}{25}$ - -

$t = 6$ - - - $e = \dfrac{2.2.2.2}{1.2.3.4.5+1}$ - - $= \frac{16}{121}$ - -

$t = 7$ - - - $e = \dfrac{2.2.2.2.2}{1.2.3.4.5.6+1}$ - - $= \frac{32}{721}$ - -

etc. etc.

D'où l'on voit que la ſérie qui exprimeroit la valeur totale de l'eſpérance de Paul, en ſuppoſant que les tirages ſoient illimités, ou pouſſés à l'infini, ſeroit:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2+1} + \frac{2.2}{2.3+1} + \frac{2.2.2}{2.3.4+1} + \frac{2.2.2.2}{2.3.4.5+1} + \text{etc. à l'infini.}$$

Or il eſt évident qu'après les trois premiers termes de cette ſérie la valeur de chacun des ſuivans diminue de plus en plus; puiſque chaque terme qui accede a pour nouveau facteur la fraction $\frac{2}{t-1}$, dont le numérateur reſte conſtant, tandis que le dénominateur augmente uniformément juſqu'à l'infini. Le vingtieme terme, par exemple, qui répond au vingtieme tirage, ne vaudra plus que $\dfrac{2^{18}}{1.2.3 \cdots 19+1} = \dfrac{1}{462972000000}$ d'un écu. Ainſi, quoique la ſérie qui exprime la ſomme des eſpérances de Paul, aille réellement à l'infini, ſans qu'aucun terme ceſſe d'être réel & poſitif, cette ſomme eſt néanmoins ſi peu conſidérable que la valeur du 20e terme n'eſt déjà plus qu'une partie infiniment petite d'un écu, & qu'on peut négliger ſans erreur tous les termes au delà des huit ou dix premiers. La ſomme des eſpérances de Paul ſe réduiroit donc à $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{8}{25} + \frac{16}{121} + \frac{32}{721}$

$\frac{32}{720} + \frac{64}{5040} + \frac{16}{5040} + \frac{32}{5040} + \text{etc.} = \frac{12367}{5040} = 2{,}454$ Ecus, de ſorte qu'elle n'iroit pas au delà de $2\frac{1}{2}$ Ecus; & que ce ſeroit auſſi tout ce qu'on pourroit raiſonnablement lui offrir pour une prétention qui ſembloit d'abord n'avoir point de bornes.

XVI. On a encore énoncé ce probleme ſingulier d'une autre façon, qui ne differe cependant point de la premiere quant au calcul. On ſuppoſe que Pierre & Paul veulent jouer au pair, & dans cette ſuppoſition on demande quel eſt l'enjeu que Paul doit mettre en commençant la partie. Le calcul des probabilités détermine cet enjeu à $\frac{1}{2}t$ Ecus; c. à d. que Paul doit mettre au jeu autant de demi-écus qu'on aura fixé de coups pour chaque partie. Or, ſi au lieu de déterminer d'avance le nombre des coups, on étoit convenu de ne finir la partie que lorſque l'on amenera *pile*, ou lorſque le billet noir ſortira, comme il n'implique pas contradiction que ce billet ne ſorte point, l'enjeu de Paul ſelon ce calcul devroit être une ſomme infinie de demi-écus, puiſqu'abſolument parlant il n'eſt pas impoſſible que le nombre des tirages t aille au delà de tout nombre limité. On ſent bien qu'il ſeroit abſurde en tout ſens d'impoſer à Paul un tel enjeu, & il n'eſt pas moins vrai que toutes les formules que les Mathématiciens ont données juſqu'ici l'exigent, dès qu'on ne les limite pas par des conditions entierement étrangeres au probleme, telles que ſont la conſidération des facultés de Pierre, celle de la fortune de Paul, ou celle des bornes que ſa modération peut mettre à ſa cupidité. Ce n'eſt pas tout encore: nous venons de voir que l'eſpérance raiſonnable de Paul ne va pas à 3 Ecus; il auroit donc tort de riſquer à ce jeu une plus forte ſomme; d'un autre côté nous avons vû (art. XIV.) qu'il pourroit haſarder à un jeu pareil une ſomme infinie contre un ſeul écu, & enfin on voit par l'article IX. que l'avantage ſeroit encore du côté de Paul quand, pour gagner les mêmes lots que Pierre lui offre ici, il riſqueroit, quel que ſoit le nombre de tirages t, je ne dis plus autant de demi-écus que t contient d'unités, mais autant qu'en contient le nombre incomparablement plus grand $2^{t-1} - 1$.

XVII.

XVII. Pour éclaircir ces paradoxes, je crois qu'il suffit de faire attention à la nature des cas. Quand on demande, dans le probleme en question, quel doit être l'enjeu, ou l'espérance de Paul, on ne demande pas quelle est la somme qu'il n'impliquera pas contradiction que Paul gagne; cette question n'est pas du ressort de la probabilité; mais on demande simplement quelle est la somme que Paul peut raisonnablement se flatter de gagner. Or il n'y a nulle raison de s'attendre que le billet noir ne viendra qu'au bout d'un nombre infini de tirages; il n'y a donc aucune raison d'exiger de Paul un enjeu d'une valeur infinie. Il y a très peu de raison de s'attendre que ce billet ne sortira qu'au 10ᵉ tirage, & beaucoup moins encore qu'il ne sortira qu'au vingtieme. Paul auroit donc très peu de raison de hazarder un enjeu de *cinq* Ecus, & beaucoup moins encore d'en risquer un de *dix*. Le calcul mathématique donne bien exactement la proportion entre l'enjeu & les prix correspondans, pour tel nombre de tirages qu'on voudra depuis zéro jusqu'à l'infini; c'est tout ce qu'on demandoit de ce calcul, & plus même qu'on ne demandoit; mais, si l'on veut savoir combien de tirages il y aura probablement avant que le billet noir sorte, c'est un nouveau probleme, qui demande un autre calcul, & c'est cet autre calcul que je viens de tenter; si on l'admet, il en résultera que Paul ne doit pas s'attendre à plus de cinq tirages, & qu'il ne doit risquer par conséquent qu'un enjeu de 2 Ecus & demi.

Mais pourquoi ne devroit-il risquer qu'un si petit enjeu, puisqu'il peut parier une somme infinie contre un écu, que le billet noir sortira tôt ou tard (XIV)? C'est précisément parce qu'il y a à parier l'infini contre l'unité qu'il ne faudra pas un nombre infini de tirages pour amener le billet noir, que Paul doit s'attendre à le voir sortir avant le sixieme tirage; & qu'ainsi son enjeu doit être proportionné au nombre de tirages qu'il peut raisonnablement prévoir; s'il hazardoit un enjeu de 20 Ecus, & que le billet noir sortît au premier, second, troisieme ou quatrieme tirage, il auroit risqué contre toute vraisemblance 19, 18, 16, 12 ou 4 Ecus, sur la simple possibilité, qui devient de plus en plus moins probable, de gagner au 6ᵉ tirage, 12 Ecus, au 7ᵉ, 44 etc.

La

La même considération leve la difficulté qui semble résulter de la comparaison des deux cas des art. IX. & XV. Dans le premier de ces cas, Paul, avons-nous dit, peut risquer par ex. avec avantage $31\frac{1}{2}$ Ecus, dans l'espérance d'en recevoir 32, & dans le second cas, nous trouvons qu'il auroit grand tort de risquer ces $31\frac{1}{2}$ Ecus, pour en gagner plus de 4 trillions. Mais la diversité des deux cas est sensible: dans le premier, Paul a déjà perdu *cinq* tirages consécutifs, il ne hazarde actuellement que 16 Ecus contre 32 à jeu égal, & avec la certitude morale que le billet noir ne sauroit plus beaucoup tarder à venir. Dans le second cas au contraire, aucun tirage n'a encore précédé, la même certitude morale doit faire présumer à Paul que le billet noir sortira dans l'un des premiers tirages, qui ne lui rembourseront pas son enjeu.

XVIII. Je suis cependant bien éloigné de regarder l'estimation de l'enjeu de Paul, telle que le calcul de l'article XV. la donne, comme une vérité démontrée; je crois au contraire que le probleme en question souffre autant de solutions différentes qu'il y a de diverses manieres d'envisager les probabilités. Toute solution qui n'admet rien d'impossible ou d'absurde, peut être bonne, ou du moins n'est pas susceptible d'une réfutation démonstrative. Les deux solutions extrêmes sont, celle qui donne un enjeu croissant jusqu'à devenir infiniment grand, & celle qui fixeroit l'enjeu constant à un demi-écu; elles doivent être exclues toutes deux, l'une parce que Paul risqueroit probablement plus que Pierre; l'autre parce que Pierre risqueroit vraisemblablement plus que Paul. La solution la plus recevable sera celle où le gain moïen qui doit toujours être égal de part & d'autre, sera aussi accompagné d'une vraisemblance égale pour l'un & l'autre des joueurs; & c'est de ce genre, si je ne me trompe, que sont les solutions suivantes.

XIX. 1. Chaque prix particulier proposé par Pierre, combiné avec sa probabilité, est réduit à la valeur du premier prix: c'est de quoi les Mathématiciens conviennent. Le premier prix est d'un écu, & l'espérance de Paul à ce prix vaut précisément un demi-écu; ainsi l'on peut

peut dire que l'espérance à chacun des autres prix particuliers ne vaut pas davantage; & puisque Paul ne sauroit gagner qu'un seul prix, il semble que son espérance, ou ce qui revient au même son enjeu, ne doit pas excéder ce demi-écu, soit que le nombre des tirages ait été fixé à un seul ou à plusieurs, ou qu'il n'ait point été limité au commencement du jeu. Mais, d'un autre côté, plus il y aura de tirages, plus il y a de probabilité que Paul remportera ce prix, dont la valeur *absolue* ou *réduite*, est d'un Ecu. Si l'on joue à un seul tirage, il y a à parier *un* contre *un* qu'il le gagnera; ainsi son enjeu est $e = 1 \times \frac{1}{2}$ Ecu: si l'on joue en cent mille coups, l'enjeu seroit donc par la même raison $e = 1 \times \frac{100000}{100001}$ écus; & si le nombre des coups est illimité, il y a l'infini à parier contre 1, que Paul remportera le prix. Ainsi l'enjeu en ce cas-là devroit être $e = 1 \times \frac{\infty}{\infty + 1} = 1$ Ecu; la valeur de l'enjeu varieroit donc à l'infini entre les deux valeurs extrêmes $\frac{1}{2}$ & 1, & la formule qui exprime ces valeurs en général seroit $e = 1 \times \frac{t}{t+1} = \frac{t}{t+1}$.

Mais, à le prendre ainsi, Pierre ne pourroit jamais gagner, lorsque le nombre des coups est illimité, tandis que Paul est à peu près sûr de gagner $\frac{t}{t+1}$ Ecus. Il faut donc, pour jouer au pair, que Pierre ait une probabilité égale d'en gagner autant. Or il y a précisément autant de probabilité pour le premier coup que pour tous les autres ensemble; ainsi, en doublant l'enjeu de Paul, il y aura autant de probabilité que Pierre gagnera $\frac{2t}{t+1} - \frac{t}{t+1} = \frac{t}{t+1}$, qu'il y en a qu'il ne le gagnera pas. Donc la formule de l'Enjeu de Paul devroit être: $e = \frac{2t}{t+1}$, lorsque le nombre des coups est illimité; ou toutes les fois qu'étant limité, la valeur de $\frac{2t}{t+1}$ sera plus

peti-

petite que celle de $\frac{1}{2}t$, qui est la formule générale des Géometres. A ce calcul la valeur des divers enjeux varieroit depuis son *minimum* ½ Ecu, jusqu'à son *maximum* 2 Ecus, dans l'ordre suivant:

$$\tfrac{1}{2};\ 1;\ \tfrac{3}{2};\ \tfrac{8}{5};\ \tfrac{10}{6};\ \tfrac{12}{7};\ \tfrac{14}{8};\ \tfrac{16}{9};\ \tfrac{18}{10};\ \tfrac{20}{11};\ \cdots\ \frac{2\infty}{\infty+1}.$$

XX. 2. Un simple raisonnement métaphysique semble conduire à la même solution. Le hazard ne s'astreint ni à l'ordre, ni aux formules: mais le calcul des probabilités suppose tacitement, comme nous l'avons observé (art. IV.) que le hazard distribue ses faveurs avec une équité impartiale. Or, au jeu de *croix* & *pile*, l'arbitre le plus équitable seroit bien embarassé de décider pour *croix* ou *pile* au premier coup; abstraction faite des circonstances étrangeres, il se trouveroit exactement dans le cas de la liberté d'indifférence, & choisiroit celui des deux qui s'offriroit le premier à l'esprit; mais au coup suivant l'embarras cesseroit; *pile* succéderoit indubitablement à *croix*; & par conséquent le jeu se termineroit infailliblement au deuxieme coup, s'il n'avoit pas fini au premier. La plus grande valeur de l'enjeu doit donc être celle du second prix = 2 Ecus, & sa plus petite valeur la moitié du premier prix = ½ Ecu; ce qui pour un nombre de coups illimité revient à la formule que nous venons de trouver $e = \frac{2t}{t+1}$.

XXI. 3. On parviendra, sinon à la même formule, du moins aux mêmes valeurs extrêmes de l'enjeu, par une autre considération qui paroit assez plausible.

Quand les Géometres ont calculé l'enjeu de Paul, pour un tirage quelconque t, ils ont trouvé cet enjeu égal à $\frac{1}{2}t$, en disant: l'espérance de Paul au plus grand prix p est moins probable deux fois que l'espérance au prix précédent $p - 1$; celle-ci est à son tour deux fois moins probable que l'espérance au prix $p - 2$, & ainsi de suite, en descendant jusqu'au premier prix = 1 Ecu. Or l'espérance à ce prix 1 est = ½, donc celle au prix particulier p est $= p \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$\times (\cdot\ \cdot\ \cdot) = \frac{p}{2^t}$. Mais p vaut 2^{t-1} écus, donc l'espérance à ce prix vaut $\frac{2^{t-1}}{2^t} = \frac{1}{2}$ Ecu, & par conséquent l'espérance à tous les prix jusqu'à p inclusivement vaut $\frac{1}{2}t$ Ecus. Il est évident que dans ce calcul les Géometres ne se contentent pas d'estimer la probabilité sur les combinaisons absolument possibles, mais sur les plus probables, & que cette probabilité elle-même est évaluée non sur le nombre absolu des cas possibles, mais sur l'ordre le mieux réglé qu'on suppose régner dans leur existence respective. Car, comme le célebre Auteur des Doutes l'a très bien observé, il n'y a pour chaque prix $p = 2^{t-1}$ que $t + 1$ cas possibles, dont un seul feroit gagner ce prix à Paul, un seul lui feroit perdre son enjeu, & les autres au nombre de $t - 1$, lui feront gagner quelque prix inférieur: l'espérance de Paul au prix p sera donc exprimée par la probabilité $\frac{1}{t+1}$; ainsi la suite des espérances en rétrogradant seroit $\frac{2^{t-1}}{t+1}$; $\frac{2^{t-2}}{t}$; $\frac{2^{t-3}}{t-1}$; - - - - $\frac{2^0}{t-t+2}$, ou dans l'ordre naturel, $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{16}{6}$ etc. & l'on auroit la formule $e = \frac{2^{t-1}}{t+1}$, ce qui est bien différent de $e = \frac{1}{2}t$.

Or la même raison qui a fait fixer l'enjeu à $\frac{1}{2}t$, & non à $\frac{2^{t-1}}{t+1}$, prouve, ce me semble, que cette valeur $\frac{1}{2}t$ demande encore une seconde réduction pour être généralement applicable, puisqu'il est plus probable que *croix* ne sera pas amené, vingt, trente, cinquante, mille, cent mille fois de suite, qu'il n'est vraisemblable qu'on l'aménera autant de fois. On sait que l'arrangement successif ou simultané d'individus de deux especes différentes peut varier en autant de manieres, qu'il y a d'unités dans le nombre 2 élevé à la puissance qui exprime la quantité des choses que l'on veut arranger. Si, par exemple, d'une roue qui con-

contient plusieurs billets blancs & noirs, on en tire *douze*, à la fois ou l'un après l'autre, il est certain qu'ils peuvent sortir en 2^{12} ordres différens, & que de ce grand nombre d'arrangemens divers, il n'y en a qu'un seul, sur 4096, qui puisse amener douze billets noirs. Il y a donc à parier $2^t - 1$ contre 1, que cette combinaison n'arrivera pas lorsqu'on tirera un nombre t de billets, soit qu'on les tire à la fois ou en t tirages de suite. Or la probabilité que le jeu continuera jusqu'au tirage t est égale à la probabilité d'amener *croix* $t - 1$ fois de suite, & cette probabilité, comme nous venons de le dire, n'est que $\frac{1}{2^{t-1}}$. Il semble donc que l'espérance estimée $\frac{1}{2}$ Ecu de gagner le plus haut prix qui répond au nombre de coups t, doit encore être affoiblie par la probabilité qu'il y a de pousser le jeu jusqu'à ce nombre de coups t, ce qui changeroit la valeur constante de cette espérance sur chaque prix en une valeur moindre & variable $= \frac{1}{2^{t-1}}$ Ecus, pour tous les cas où $\frac{1}{2^{t-1}}$ est plus petit que $\frac{1}{2}t$, & par conséquent l'enjeu pour un nombre illimité de prix, seroit:

$$e = \frac{1}{2^{t-1}} + \frac{1}{2^{t-2}} + \frac{1}{2^{t-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{t-t}} = \frac{1+2+4+\cdots+2^{t-1}}{2^{t-1}} = \frac{2^t - 1}{2^{t-1}}.$$

De sorte que l'enjeu approcheroit toujours plus de la valeur de 2 Ecus à mesure que le nombre des coups augmente, sans néanmoins arriver à cette valeur que lorsqu'on supposera le nombre des coups, ou illimité, ou infini. En effet, le moindre enjeu étant $= \frac{1}{2}$ Ecu, les accroissemens successifs de cet enjeu sont exprimés par la série infinie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^{\infty}} = 1\frac{1}{2}$, & les enjeux eux-mêmes pour un nombre de coups fixé d'avance, seront

$\frac{1}{2}$; 1; $1\frac{1}{2}$; $\frac{15}{8}$; $\frac{31}{16}$; $\frac{63}{32}$; etc.

XXII. 4. Les Géometres dans la formule connue $e = \frac{1}{2}t$ tiennent à la vérité déjà compte du peu de probabilité qu'il y a que le

nom-

nombre des coups puisse aller bien loin; c'est ce qui réduit chaque prix particulier, quoique croissant dans la progression géométrique, à n'entrer que pour la valeur d'un demi-écu dans la somme moïenne qui constitue l'espérance & l'enjeu de Paul. La question revient donc à demander si cette premiere réduction suffit, ou si la nature du sujet en exige encore une seconde. Or il paroit que l'espérance à chaque prix particulier doit être modifiée par deux raisons différentes, l'une c'est que la moitié des cas possibles est absorbée au premier coup, le quart au second coup, la huitieme au troisieme coup; etc, l'autre raison c'est que la vraisemblance des cas possibles restans diminue aussi à mesure que le nombre des coups est supposé plus grand. On peut en effet représenter les sommes que Pierre offre par les ordonnées d'une courbe logarithmique dont l'axe exprimeroit le nombre total des coups. Le calcul des Mathématiciens a réduit la valeur moïenne de ces sommes, ou l'espérance de Paul, à un parallélogramme qui a pour hauteur la moitié de la premiere ordonnée, & pour base l'axe entier de la courbe. Mais par cette réduction le centre de figure, ou, si je puis m'exprimer ainsi, le centre des espérances change continuellement de place, & s'avance enfin jusqu'à répondre au milieu de l'axe prolongé à l'infini; il y tombe tout aussi près du dernier prix auquel il n'y a nulle apparence d'arriver, que du premier prix qui a la plus grande probabilité par devers soi. C'est à peu près comme si, en tirant au blanc, on se contentoit de doubler le prix à mesure qu'on éloigneroit le but, & qu'on exigeât du tireur de proportionner sa gageure à la distance. Il est évident qu'au delà d'une certaine portée à laquelle le tireur pourroit se flatter d'atteindre, la proportion deviendroit de plus en plus désavantageuse pour lui. Il paroit donc qu'il faut conserver la figure logarithmique, rapprocher le centre des espérances de l'origine de l'axe, & faire en sorte que quel que soit le nombre des coups, ce centre reste toujours entre les deux premieres divisions de l'axe; c. à d. qu'en laissant à l'axe toute sa longueur, il faut décrire dans le parallélogramme une nouvelle logarithmique, dont la plus grande ordonnée soit vers l'origine de l'axe, tandis que les autres décroissent à l'infini; ou, ce qui revient au mê-

me, il n'y a qu'à prendre à contresens la premiere logarithmique, & puisque le premier prix est infiniment plus assuré que le dernier, regarder la plus grande ordonnée comme celle qui représente l'unité, & toutes les autres comme des fractions décroissantes à l'infini.

En envisageant le problème sous ce point de vue, on observera que le centre des espérances passe d'un terme de la série, ou d'une ordonnée, à l'autre, en s'éloignant de son premier point, toutes les fois que le nombre des coups t est doublé. Si $t = 4$, l'enjeu $\frac{1}{2}t = 2$ Écus répond à la seconde ordonnée, ou au deuxieme terme de la suite des prix; si $t = 8$, l'espérance est reculée au 3me prix; si $t = 16$, elle tombe sur le quatrieme, & ainsi de suite. Pour la fixer au commencement du second terme, où la probabilité est la même des deux côtés de la série, il faut nécessairement tenir compte de la différence qu'il y a entre la valeur d'une espérance reculée, & celle d'une espérance prochaine. Soit donc $t = 2^n$, le centre de l'espérance $\frac{1}{2}t$ tombera sur le prix 2^{n-1} qui est le $n^{ième}$ terme de la série; la probabilité d'y atteindre sera par conséquent $= \frac{1}{2^{n-1}}$, tandis que la probabilité d'atteindre au prix 2, qui répond au centre fixe des espérances, est $= \frac{1}{2^{2-1}} = \frac{1}{2}$. On a donc l'analogie inverse:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}t : e, \text{ donc } e = \frac{t}{2^{n-1}} = \frac{2t}{t} = 2 \text{ Ecus.}$$

Valeur qui aura lieu, quel que soit le nombre des tirages, pourvû que $\frac{1}{2^{2-1}}$ ne soit pas plus petit que $\frac{1}{2^{n-1}}$, ou, ce qui revient au même, que e ne se trouve pas plus grand que $\frac{1}{2}t$; ou enfin, dès que t est un nombre au dessus de 3, & que par conséquent la formule ordinaire feroit avancer le centre des espérances au delà de son point fixe.

A' ce

A ce compte les diverfes valeurs de l'enjeu feroient:

en *un* coup	e	=	$\frac{1}{2}t$	=	$\frac{1}{2}$ Ecu
en *deux* coups	e	=	$\frac{1}{2}t$	=	1 Ecu
en *trois* coups	e	=	$\frac{1}{2}t$	=	$1\frac{1}{2}$ Ecu
en *quatre* coups & au delà à l'infini	e	=	$\frac{2t}{t}$	=	2 Ecus.

Mais, comme il fuffit que le centre des efpérances ne paffe pas du fecond au troifieme terme, il n'y a point de raifon fuffifante de le fuppofer entierement immobile, puifqu'en effet il ne fauroit l'être dans les premiers coups, & qu'à mefure que leur nombre augmente, l'efpérance acquiert quelque petit degré d'intenfité ultérieure; il paroit donc plus naturel de lui laiffer la latitude qui réfulte de l'efpace logarithmique entre la feconde & la troifieme ordonnée; & l'enjeu repréfenté par l'efpace logarithmique fera $e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$ etc. à l'infini, ou, ce qui revient au même $e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} +$ etc. précifément comme la folution de l'article XXI. l'a donné.

XXIII. On trouvera peut-être étrange que l'enjeu de Paul foit fi modique, tandis que Pierre rifque de fi énormes fommes. Je crois en effet que perfonne ne voudroit s'engager à paier ces prix pour un nombre illimité de coups, contre un enjeu de deux Ecus, ou de deux écus & demi: il y auroit cependant beaucoup moins de rifque fans doute à s'y engager, qu'il n'y en auroit à paier d'avance un enjeu exorbitant pour n'attraper probablement en échange qu'un prix d'un écu ou de deux. Mais, comme la probabilité ne décide pas de l'événement, il y auroit de l'imprudence de hazarder de fortes fommes fur la probabilité la plus exactement calculée; car d'ailleurs il eft aifé de prouver que dans toutes les regles de la vraifemblance Pierre peut rifquer tous les prix du problème, contre un enjeu de 2 Ecus. En effet, que le premier prix foit un écu, le fecond 2 écus, le troifieme x^{III}, le quatrieme x^{IV}, le cinquieme x^{V}, & ainfi de fuite à l'infini. Il eft évident que *pile* venant au premier coup, Pierre gagne *un* Ecu; fi c'eft au fecond,

il ne

il ne gagne ni ne perd; si c'est au troisieme, il perd $x^{III} - 2$; au quatrieme $x^{IV} - 2$, & ainsi de suite à l'infini.

Or, de l'aveu des Mathématiciens, la probabilité de gagner au premier coup est $= \frac{1}{2}$. Celle de perdre au 3e est $= \frac{1}{8}$, au 4e elle est $= \frac{1}{16}$ etc. ainsi en proportionant la perte probable au gain probable, on aura:

$$\frac{x^{III} - 2}{8} = 1 \times \frac{1}{2}, \quad \text{ou } x^{III} - 2 = 4 \text{ Ecus}$$

$$\frac{x^{IV} - 2}{16} = 1 \times \frac{1}{2}, \quad \text{ou } x^{IV} - 2 = 8$$

$$\frac{x^{V} - 2}{32} = 1 \times \frac{1}{2}, \quad \text{ou } x^{V} - 2 = 16$$

etc. etc.

d'où l'on voit que l'enjeu ne doit pas même aller jusqu'à 2 Ecus, si l'on ne suppose le nombre des coups, ou infini, ou du moins illimité.

XXIV. 5. Cette considération peut conduire à une sixieme solution. Puisque la partie doit être égale, il faut que l'espérance de Pierre compense le risque auquel il s'expose. Or, comme chaque coup consideré séparément peut également amener *croix* ou *pile*, & que le premier coup amenant pile, exclut tous les autres coups, il est évident que la probabilité de terminer le jeu au premier coup, est aussi grande que celle de le terminer par l'un de tous les coups suivans, pris ensemble. Il faut donc, (NB. dès que l'on joue sur plus d'un coup,) que l'enjeu $= e$ soit plus grand que le prix que Pierre promet si pile est amené au premier coup. Par ce moïen Pierre aura une probabilité $= \frac{1}{2}$ de gagner l'excédent de l'enjeu sur le premier prix, savoir $e - 1$ Ecus; joint à l'espérance plus ou moins reculée qu'aucun coup n'aménera pile. Egalant donc le gain que Pierre peut faire, multiplié par la probabilité de gagner, à la somme qu'il peut perdre combinée avec la probabilité de perdre cette somme, on aura l'équation suivante:

(e —

$$(e - 1) \times \tfrac{1}{2} + e \times \frac{1}{2^n} = (2^{n-1} - e) \times \frac{1}{2^n}$$

Equation d'où l'on doit tirer la valeur de l'enjeu e.

Or il y a ici par la nature du ſujet trois cas à diſtinguer :

1°. lorſque $n = 1$, c. à d. qu'on eſt convenu de ne jouer qu'en un ſeul coup, le premier terme $\frac{e - 1}{2}$ n'a plus lieu, car il repréſente ici le cas où Pierre perdroit, où il améneroit pile ; cas qui eſt exprimé par le ſecond membre de l'équation $\frac{2^{n-1} - e}{2^n}$. Il faut donc ou ſupprimer $\frac{e-1}{2}$, & alors l'équation donne $e \times \frac{1}{2^n} = (2^{n-1} - e) \times \frac{1}{2^n}$, donc $e = \frac{1}{2}$ Ecu ; ou il faut ſupprimer le ſecond membre de l'équation ; & l'on aura la ſomme du gain & de la perte, $(e - 1)\,\frac{1}{2} + e \times \frac{1}{2^n} = 0$, ce qui donne également $e = \frac{1}{2}$ Ecu.

2°. Lorſque $n = \infty$, c'eſt à dire que le nombre des coups eſt illimité, le terme $e \times \frac{1}{2^n}$ devient infiniment petit ; par conſéquent l'équation donne pour ce cas-ci : $(e - 1)\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc $e = 2$ Ecus.

3°. Entre ces deux valeurs extremes de l'enjeu, l'équation donnera pour tel nombre déterminé de coups que l'on voudra au deſſus de 1 la formule générale : $e = \frac{2^n}{2^{n-1} + 2}$. Ainſi l'on aura les valeurs de l'enjeu comme ſuit :

nombre des coups	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	- - -	∞
Valeur de l'enjeu en Ecus	$\frac{1}{2}$.	1.	$\frac{4}{3}$.	$\frac{8}{5}$.	$\frac{16}{9}$.	$\frac{32}{17}$.	$\frac{64}{33}$	- - -	2.

XXV. On pourroit objecter contre cette solution que, dans le premier membre de l'équation, on fait entrer deux espérances de Pierre, dont il ne peut néanmoins jamais réaliser qu'une; car si *pile* vient au premier coup, l'espérance $e \times \frac{1}{2^n}$ n'a plus lieu; & si celle-ci a lieu, le premier coup n'a pas amené pile. Mais il faut considérer que, pour déterminer le plus grand & le plus petit enjeu, nous avons effectivement fait évanouir celle des deux espérances qui ne sauroit se réaliser, en réduisant l'équation, lorsque $n = 1$ à $e \times \frac{1}{2^n} = (2^{n-1} - e)\frac{1}{2^n}$ & lorsque $n = \infty$ à $(e - 1)\frac{1}{2} = (2^{n-1} - e)\frac{1}{2^n}$. Or il seroit absurde qu'entre ces deux cas extremes, l'enjeu fût plus grand, qu'il ne l'est lorsque le nombre des coups & des prix est censé infini; c'est pourtant ce qui arriveroit si l'on vouloit prendre la valeur moïenne des deux espérances, & en former l'équation $\left((e - 1)\frac{1}{2} + e \times \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2} = (2^{n-1} - e)\frac{1}{2^n}$, ce qui donneroit $e = (2^{n+2}\frac{1}{2})\left(\frac{1}{2^{n+1} + 12}\right)$; valeur qui excéderoit 2 Ecus, dès que le nombre des coups iroit au delà de 3; quoique même ici l'enjeu le plus fort ne seroit que de trois Ecus, pour un nombre infini de coups.

Excepté les deux cas extremes, chacune des deux espérances concourt à modifier la valeur de l'enjeu, on n'en sauroit exclure aucune; mais ces espérances elles-mêmes sont à leur tour déterminées par la valeur de l'enjeu, & varient avec le nombre des coups; comme la table suivante l'indique.

Nombre des coups	- - - -	1.	2.	3.	4.	5.	n	- -	∞
Valeur de l'espérance	$\frac{e-1}{2}$ - -	$-\frac{1}{4}$.	0.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{3}{10}$.	$\frac{7}{18}$.	$\frac{2^{n-2}-1}{2^{n-1}+2}$	- - -	$\frac{1}{2}$
Valeur de l'espérance	$e \times \frac{1}{2^n}$ - -	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{18}$.	$\frac{1}{2^{n-1}+2}$	- - -	0.

 Ces

Ces deux espérances ont une valeur égale dans le cas qui donne $2^{n-2} - 1 = 1$, c. à d. lorsqu'on joue en trois coups; mais comme l'espérance $e \times \frac{1}{2^n}$ entre doublement dans la détermination de l'enjeu, tandis que l'espérance $(e - 1) \times \frac{1}{2}$ n'y entre qu'une fois, il n'y a aucun cas où elles contribuent également à fixer cet enjeu. S'il y avoit un tel cas, ce seroit lorsque la valeur de e donnée par chacune de ces espérances prises seules, seroit la même: il faudroit donc avoir $2^{n-2} = 2^n \times \frac{1}{2^{n-1} + 1}$, ce qui supposeroit $2^{n-1} + 1 = 4$, & par conséquent n égal au nombre rompu $3\frac{1}{2}$.

XXVI. Au reste ce probleme n'aiant rien d'intéressant que la difficulté qui résultoit de sa solution, il suffit, je crois, d'avoir levé cette difficulté sans décider entre les différentes solutions qu'on pourroit imaginer pour fixer la valeur précise de l'enjeu; quoi qu'il en soit de celles que je viens de proposer, il en résultera au moins que l'illustre Auteur des Doutes a eû de très bonnes raisons de rejetter l'enjeu croissant uniformément à l'infini. Je ne voudrois pas néanmoins dire avec lui qu'il est *physiquement impossible* que la même combinaison revienne constamment plus d'un certain nombre de fois; parce que si au coup t, par exemple, la probabilité d'amener encore *croix* étoit nulle, il faudroit non seulement qu'elle eût diminué successivement jusqu'à s'évanouir précisément à ce coup-là, mais il semble qu'il faudroit encore, qu'en prenant un nombre de coups plus grand $t + n$, cette probabilité devînt alors négative, d'où il résulteroit que l'enjeu décroitroit à mesure que le nombre des coups dont l'on seroit convenu excéderoit celui où la probabilité d'amener encore *croix* seroit nulle. Or il est évident que, s'il n'est pas absolument nécessaire que l'enjeu augmente avec le nombre des prix, il est au moins incontestable qu'il ne doit pas diminuer à mesure que ceux-là augmentent.

On

On peut dire à la vérité que la nature du sujet n'admet point de probabilité négative; & que l'impossibilité physique résulte ici des vicissitudes attachées au cours ordinaire de la nature. Mais il me semble que, dès qu'il est question de la simple probabilité & de son calcul, on ne sauroit inférer de l'ordre de la nature que ce que j'en ai inféré (art. VIII.), une nouvelle probabilité, ou tout au plus une certitude morale sur le non-retour des causes physiques & mécaniques d'un événement toujours possible en lui-même, & qui, par cela même qu'il a déjà existé une ou plusieurs fois, ne peut jamais devenir à la rigueur physiquement impossible. J'avoue qu'il est impossible physiquement que l'état des choses reste le même dans un monde où regne un mouvement perpétuel; mais, comme le même événement peut être produit en plusieurs manieres différentes, il me paroit que tout ce qu'on peut légitimement conclure de l'ordre physique, c'est qu'il est moralement impossible, c. à d. infiniment peu probable, qu'un même événement fortuit revienne toujours.



OB-

OBSERVATIONS SUR L'INFLUENCE RÉCIPROQUE DE LA RAISON SUR LE LANGAGE ET DU LANGAGE SUR LA RAISON.

PAR M. SULZER.

Si l'on trouve de très grandes difficultés dans les recherches ſur l'origine du langage, c'eſt que cette queſtion paroit n'admettre aucun point fixe duquel on puiſſe partir. On croit voir, d'un côté, que le langage ſuppoſe une raiſon cultivée juſqu'à un certain point; pendant que, d'un autre côté, l'on ne conçoit point comment la raiſon auroit pû faire des progrès ſans le ſecours d'une langue. Ces deux facultés paroiſſent être en même tems la cauſe & l'effet l'une de l'autre. C'eſt apparemment cette difficulté, d'abord en apparence inſurmontable, qui a fait croire à de grands Philoſophes que, pour expliquer l'origine du langage, il faut recourir à un miracle. On convient cependant qu'en bonne philoſophie il ne faut point recourir à des cauſes ſurnaturelles, juſqu'à ce que l'inſuffiſance des cauſes naturelles ſoit bien démontrée. Le but de ce Mémoire n'eſt pas de traiter cette matiere dans toute ſon étendue, mais d'y répandre quelque jour, ſi cela m'eſt poſſible, par des obſervations réfléchies ſur l'influence réciproque qu'ont ces deux facultés l'une ſur l'autre.

A n'enviſager le langage qu'en gros, il ne paroit préſenter que des arrangemens fort ſimples; des mots dont chacun pris à part eſt le ſigne d'une idée; des énoncés, ou des phraſes ſimples, qui marquent

des rapports fort ſimples entre ces deux idées ; enfin, des propoſitions compoſées de pluſieurs phraſes & qui expriment une ſuite de rapports. Cela eſt parfaitement analogue au calcul algébrique, dans lequel chaque lettre priſe à part marque une quantité, deux lettres jointes ou disjointes, moyennant un ſigne de rapport, font une eſpece d'énoncé ſimple, & enfin, une formule compoſée de pluſieurs lettres, moyennant pluſieurs autres ſignes de rapport, marque une propoſition.

La premiere choſe qui ſe préſente dans les recherches ſur l'origine du langage, ce ſont les mots. *Quelle peut avoir été la marche de l'eſprit pour que l'homme s'aviſât de chercher des ſignes propres à repréſenter des idées, & par quels moyens a-t-il trouvé ces ſignes?* Voilà les deux premieres queſtions ſur leſquelles je ferai quelques obſervations qui, ſi je ne me trompe, ſerviront à faciliter la ſolution de ce probleme.

Il n'eſt pas poſſible de remonter à l'aide de l'hiſtoire juſqu'au crépuſcule de la raiſon, pour y voir les premiers efforts que l'homme a faits pour commencer un langage. Il ne paroît pas même néceſſaire de reprendre les choſes de ſi haut. Ce que fait aujourd'hui l'homme inſtruit, nous fera concevoir ce que faiſoit l'homme brute, privé encore du don de la parole. Les allures de l'eſprit ſont toujours les mêmes ; les langues s'enrichiſſent & ſe perfectionnent probablement par les mêmes opérations qui en ont jetté les premiers fondemens. Il s'agit donc de recueillir exactement ce que l'expérience nous fournit ſur ce ſujet.

On connoît l'hiſtoire de cet aveugle-né auquel une heureuſe opération donna la vue depuis qu'il fut parvenu à l'âge de la raiſon. Lorſqu'il vit pour la premiere fois les divers objets qui étoient placés dans ſa chambre, il n'y diſtingua rien. Il ne fut frappé que de l'*enſemble*, qui lui parut tout d'une piece ; il la prit pour une ſurface unie, diverſement colorée dans ſes parties. Il ne s'aviſa point d'imaginer que ce qu'il voyoit, fût compoſé de divers objets ſéparés les uns des autres,

tres, ni par conséquent, de chercher à les nommer. Ce fait nous présente une image de ce qui se passe dans l'esprit, lorsqu'on voit pour la premiere fois des objets absolument inconnus, & même ce qui s'est passé dans l'esprit de l'homme brute. Ses sens ont été frappés par mille objets, confondus dans une masse homogene, dans laquelle il ne savoit rien distinguer. Or il est évident qu'avant que l'on puisse s'aviser de donner un nom à une chose, il faut la distinguer de la masse totale des perceptions qu'on a & la regarder comme un objet à part, séparé ou distingué des autres. C'est donc en cela que consiste le premier pas que l'homme a du faire pour parvenir à une langue: distinguer, dans ses perceptions, certaines parties comme des êtres séparés ou isolés. Or ce premier pas n'a pû se faire qu'après que l'homme s'est rendu ces objets familiers; car aussi longtems qu'un objet nous est absolument nouveau, on a de la peine à y rien distinguer. Cette marche de l'esprit se montre partout. Ceux qui entendent parler pour la premiere fois une langue qui leur est inconnue, n'y distinguent ni syllabes ni mots. Tout un discours leur paroit un bruit continu, qui n'a point de parties séparées; ce n'est qu'après avoir souvent entendu les mêmes phrases, qu'on parvient à y distinguer les mots. Il en est de même de tous les objets nouveaux. Un homme qui n'a jamais vû aucun ouvrage d'Architecture, verroit un mur posé sur un socle, couronné d'une corniche & orné de pilastres, sans s'aviser d'y distinguer ces choses-là. Si on lui demandoit ce qu'il voit, il répondroit qu'il voit un mur, & un mur qui est tout d'une piece: la nouveauté de l'objet ne lui permettroit pas de remarquer que le socle, la corniche & les pilastres sont des parties du mur, que la pensée peut en séparer. En général, toute idée sur laquelle on n'a pas réflêchi, reste confuse, c'est à dire, telle qu'on n'y distingue rien, quoiqu'elle soit composée de parties qui peuvent être représentées à part. Demandez à la plûpart des hommes qui réflêchissent peu, ce que sont certaines choses qu'ils ont vues mille fois, vous les trouverez fort embarassés à répondre. C'est que, faute d'avoir distingué les parties dont un objet est composé, il ne sont pas en état de décrire cet objet, ou de nommer ses parties, quand même les noms de ces parties leur seroient connus.

Ce

Ce premier pas que l'homme avoit à faire pour inventer un langage, étoit plus ou moins difficile, selon la nature des objets. Une attention légere suffisoit pour quelques uns; l'esprit d'observation & une réflexion soutenue par le génie étoit nécessaire pour d'autres; enfin, il falloit encore pour certains cas que le hazard concourût avec le génie. Il est nécessaire d'entrer ici dans quelque détail sur ces opérations de l'esprit.

La vue est de tous nos sens celui qui nous facilite le plus cette premiere opération de l'esprit par laquelle nous séparons certains objets de la masse confuse de nos perceptions. C'est le seul des sens qui nous laisse appercevoir bien vîte que les objets dont il excite la sensation sont hors de nous. Tous les autres nous cachent l'objet de la sensation, & ne nous font appercevoir que l'effet qu'il fait sur nos organes. La vision se fait par des impressions si foibles qu'on ne sent point l'action de la lumiere sur l'œil; l'attention y est entierement dirigée vers l'objet, & non vers l'organe qui sent, comme dans les autres sensations. D'ailleurs, la sensation de la vue est en elle-même moins homogene que celles des autres sens. Les couleurs se distinguent infiniment mieux les unes des autres que les sons, ou les odeurs; & nous voyons, outre les couleurs, les formes des corps & leur mouvement. Il est donc probable que les objets visibles ont été les premiers que l'homme a distingués & dont il s'est formé des idées claires. Un homme voyant pour la premiere fois la scene de la Nature étalée à ses regards, y a vu un tableau plat, diversement coloré dans ses parties. Mais, outre les couleurs, il y a distingué les formes, & voyant bientôt que quelques parties qu'il avoit commencé à distinguer, changeoient de place, il lui a été facile de les regarder comme des parties séparées. L'oiseau qui d'abord sembloit faire partie de l'arbre sur lequel il étoit perché, s'envola & fit même entendre un son. Très peu d'attention suffisoit pour former de cet oiseau une idée détachée de la masse de la perception totale de la scene visible. C'est ainsi qu'avec un léger effort, l'homme parvint à acquérir des idées sur les choses visibles.

Il fal-

Il falloit plus qu'une simple attention pour saisir les idées des propriétés & des accidens des corps; l'esprit d'observation & de comparaison étoit nécessaire pour cela. On sent bien que l'homme brute, abandonné à soi-même, ne développe cette qualité que dans des occasions extraordinaires. Ce sont ordinairement les sollicitations du besoin qui rendent l'homme ingénieux, en le forçant de diriger toute son attention sur l'objet de ses desirs. C'est cette attention soutenue qui rend les objets familiers. Il est probable que l'homme pressé par la soif, & ne trouvant rien qui le soulageât qu'après nombre de tentatives inutiles, apprit par là à distinguer clairement l'eau de toutes les autres matieres sensibles, en la regardant comme l'élément propre à le soulager dans un besoin aussi pressant.

Un grand nombre d'idées est probablement dû au hazard. La plûpart des idées *rélatives* me paroissent dans ce cas: on ne les auroit peut-être jamais formées, si l'expérience n'avoit amené l'observation de leurs *corrélatifs*. On n'auroit, par exemple, jamais formé l'idée de la *solidité*, si on n'avoit jamais senti des matieres fluides. Il est même très probable qu'il existe bien des propriétés générales des corps dont nous n'avons aucune idée, par la seule raison que leur contraire n'a jamais été observé. Nous sommes à bien des égards dans le cas de cette Dame, qui ne se doutoit point d'un grand défaut qu'avoit son époux, faute d'avoir fréquenté d'autres hommes qui en fussent exempts. Nous sentons bien des choses sans le savoir, parce que la sensation ne cesse jamais. C'est ainsi que tout le long de la journée, on peut entendre un bruit assez fort dont on ne s'apperçoit point à moins qu'on ne se soit bouché les oreilles pendant quelques momens.

C'est donc par les divers moyens dont je viens de parler que l'homme parvint peu à peu à débrouiller le cahos de ses perceptions, & à prendre une connoissance claire de quelques idées en particulier; opération qui devoit nécessairement précéder l'invention des mots, vû que l'on ne peut s'aviser de nommer que les choses dont on a l'idée claire. On voit par là, pour le remarquer en passant, que le nombre

 des

des mots dans une langue ne peut jamais surpasser le nombre des idées claires qu'ont eu tous les individus ensemble de la Nation qui parle cette langue. Et comme il est probable que le nombre des idées claires ne surpasse pas beaucoup celui des mots, il s'ensuit que le nombre des mots d'une langue, joint au nombre de leurs significations dérivées, est la somme de toutes les idées claires que possede la Nation qui parle cette langue.

De ce que nous venons d'observer, on peut encore tirer cette conséquence; que celui qui invente un terme nouveau, ou qui emploie un mot déjà connu dans une nouvelle signification, a enrichi le fond de nos connoissances par une idée neuve. Cela supposé, il ne seroit pas impossible de déterminer de tems en tems le progrès qu'aura fait une Nation dans les connoissances depuis une certaine époque. Il n'y auroit qu'à charger des Littérateurs philosophes de lire tous les ouvrages qu'on y met au jour, pour en extraire tous les termes nouveaux & tous les mots pris dans un nouveau sens, pour lesquels il n'y auroit point de vrais synonymes dans la langue. Ces termes prouveroient que l'esprit s'est enrichi d'autant d'idées neuves. Mais je rentre dans ma route.

Après avoir fait voir comment l'homme a pû parvenir à fixer certaines idées, il s'agit de voir comment il a pû trouver des sons qui puissent servir de signes pour exciter les mêmes idées dans l'esprit des autres. Dans la langue, ces signes ne sont que des sons; & on ne voit pas d'abord comment un son peut être un signe intelligible d'une idée qui ne paroit avoir rien de commun avec ce son. Pour concevoir clairement la marche de l'esprit dans cette invention, il faut commencer par observer qu'il y a quantité d'objets dans la nature qui s'annoncent par des sons. Après que l'homme eut distingué ces objets & qu'il s'en fut formé les idées, il ne pouvoit plus rencontrer de grandes difficultés à les désigner; il n'avoit qu'à imiter les mêmes sons par lesquels ces objets s'annoncent. Car on voit que les organes de la voix sont assez flexibles dans l'homme, & qu'il imite sans difficulté un grand nombre de sons variés.

Il est

Il eſt très probable que les premiers mots dans toutes les langues n'ont été que des ſons imités. On en voit encore les traces dans les langues formées, malgré les grands changemens que ces langues ont ſubis depuis leur origine. Cependant ces ſons naturels n'étant point articulés, ils pouvoient être imités de pluſieurs manieres; & le même ſon naturel pouvoit faire naître plus d'un mot, ſelon le degré de fineſſe des organes de celui qui les imitoit. C'eſt ce qui a produit la diverſité des langues. L'aboyement d'un chien, par exemple, pouvoit être imité par les uns en prononcant avec force la ſyllabe *hou*, pendant que d'autres croyoient l'imiter par le ſon *haou*. Le cri du canard parut aux uns pouvoir être rendu par le mot *ana*, aux autres par le ſon *ant*; & c'eſt delà que vient la double dénomination de cet animal, nommé *anas* en latin & *ant* ou *ent* en allemand. Ajoûtons à cela, que les ſons naturels mêmes varient, & occaſionnent par là une diverſité dans les imitations. On ſçait que le bruit du tonnerre reſſemble tantôt au ſon de la ſyllabe *ton*, tantôt à celui de la ſyllabe *bron*, de ſorte que le mot grec βροντη, *brontai*, pouvoit être le ſigne du tonnerre, tout comme le mot latin *tonitru*, ou le françois *tonnerre*. On peut faire la même remarque ſur le cri du taureau, (qui tantôt reſſemble au mot grec βȣς (*bous*), tantôt au mot allemand *ochs*,) & d'un grand nombre d'autres ſons naturels.

Il me ſemble donc que l'invention des mots par leſquels s'expriment des choſes qui dans la nature s'annoncent par des ſons, n'étoit pas fort difficile, & ne ſurpaſſoit pas les forces de l'homme brute. Or ces premiers élémens d'un vocabulaire une fois poſés, on conçoit comment ils ont pu ſervir à donner une plus grande étendue au premier langage. Toutefois le plus grand nombre de nos idées n'ayant aucun rapport apparent avec le ſon, on peut demander comment l'homme s'eſt aviſé de ſe ſervir d'un ſon pour déſigner une choſe qui n'a aucun rapport immédiat au ſon. C'eſt ce que je vais examiner.

Nous voyons que ceux qui découvrent ou conçoivent des idées neuves, ne créent jamais de ſons pour les exprimer; car ils prennent

 un

un mot déjà connu soit dans leur langue, soit dans une autre, & l'alterent un peu, ou lui donnent un sens nouveau. A plus forte raison pouvons-nous supposer que les premiers hommes, qui n'avoient pas la facilité qu'on auroit aujourd'hui de marquer par des définitions, ou par des descriptions, le sens des termes nouveaux, n'ont jamais pu s'aviser d'exprimer une chose par un signe purement arbitraire. Il faut certainement qu'ils ayent eu des raisons prises dans la nature pour donner tel nom à telle chose. La difficulté de cette question consiste à trouver la liaison naturelle entre les sons & les choses *non-sonores*. Il est infiniment plus facile de sentir comment les choses se sont passées que de décrire clairement la marche de l'esprit dans ces opérations. Quiconque voudra réfléchir sur les métaphores, & même sur tous les tropes qui, dans toutes les langues du monde, font le plus grand nombre des termes, verra combien l'esprit de l'homme est ingénieux à trouver des ressemblances, & quelle est l'étendue de cette faculté qui produit l'association des idées. Ce talent est inné dans l'homme. les peuples les plus grossiers & les plus proches de l'état brute, les hommes même qui sont nés sourds & muets, le possedent. Une attention un peu réfléchie suffit pour le mettre en usage. Il étoit donc aussi l'appanage de l'homme avant que son langage fût formé. Et c'est ce talent commun à tous les hommes qui a donné au langage, très pauvre dans ses commencemens, cette étendue qui l'a rendu propre à exprimer les choses les plus éloignées, non seulement du sens de l'ouïe, mais de toute matiere.

C'est l'imagination qui donne un corps, ou une forme matérielle, à chaque perception claire. Telle est la nature de notre esprit, qu'il fait des efforts continuels pour rendre ses perceptions claires & pour y imprimer des marques propres à les rappeller dans la mémoire. Or, rien n'étant plus clair que nos sensations, & surtout celles qui sont produites par la vision, nous rapportons aux sens, & surtout à la vision, toutes les perceptions intellectuelles. On comprend par là comment l'homme a pu trouver de l'analogie entre les objets qui, dans son

pre-

premier langage, avoient des noms, & d'autres qui semblent d'abord être hors de toute liaison avec les sons; & comment un petit nombre de sons naturels qu'il a imités, a pû donner naissance à un langage qui exprime des choses non-sensibles. Le son que rendent presque tous les chiens quand ils sont irrités, pouvoit se rendre par les syllabes *orr*, *irr*, ou *err*; la colere de l'homme a une analogie manifeste avec cette passion du chien qu'on pouvoit exprimer par les syllabes susdites; d'où sont nés très naturellement les mots *ὀργή*, *ira*, *irrité*, qui marquent la passion de la colere dans l'homme. De là il n'y a eu qu'un pas assez facile à faire pour employer le même mot *ὀργή* à désigner en général toute passion impétueuse. Une telle marche de l'esprit exclut entierement les applications purement arbitraires d'un terme à une signification neuve.

Si l'on avoit conservé les premiers termes radicaux des langues, je crois qu'on pourroit faire voir exactement la marche que l'esprit a suivie pour arriver jusqu'aux significations les plus éloignées du premier sens. Mais, comme le plus grand nombre de ces termes nous manque, vû que les premiers noms ne sont plus connoissables sous les formes qu'on leur a fait prendre après une suite d'altérations qu'ils ont éprouvées, il est très rarement possible de découvrir les liens qui unissent ensemble les diverses significations d'un même terme. Ainsi il est facile de voir comment cet être actif qui fait notre essence a reçu dans la langue françoise le nom d'*ame*. C'est que le même être se nommoit *animus* ou *anima* en latin, que le même mot servoit auparavant à exprimer l'*haleine*, & que cela venoit de ce que, en Grec, le mot *ἄνεμος* signifie le vent. Les liaisons de ces significations sont visibles; mais, faute de savoir l'origine de ce dernier mot, nous ignorons comment on s'avisa de donner au vent le nom d'*ἄνεμος*. Si la langue latine s'étoit perdue, on n'auroit rien compris du tout à la signification du mot *ame*. C'est justement ce qui est arrivé à l'égard d'un très grand nombre de mots qui, de quelques langues absolument perdues, ont été reçus dans d'autres langues.

Remarquons ici que l'histoire étymologique des langues seroit sans contredit la meilleure histoire des progrès de l'esprit humain. Rien ne seroit plus précieux pour un Philosophe que cette histoire. Il y verroit chaque pas que l'homme a fait pour arriver peu à peu à la raison & aux connoissances; il y découvriroit les premiers traits de l'esprit & du génie, les germes du jugement, les premieres découvertes de la raison naissante. Il existe un morceau précieux dans ce genre dans le Recueil des pieces qui ont concouru pour le prix que l'Académie donna en 1759. L'Auteur de cette piece, qui n'est qu'un fragment d'un grand traité sur l'origine des langues, a gardé l'*incognito*, malgré les sollicitations de l'Académie, qui souhaitoit de le connoitre, & qui l'auroit encouragé à pousser plus loin ses profondes recherches. Il seroit à souhaiter qu'on recueillît tout ce qui nous reste de plus certain sur la généalogie des mots. Car les langues s'alterent si considérablement par la succession du tems, qu'on risque de perdre à la fin toutes les origines des mots. On sent bien que je ne parle point ici des travaux des étymologistes ordinaires, qui pour la plûpart sont très frivoles. Les étymologies que j'estime, sont celles qui nous feroient voir les progrès de l'esprit humain conformément aux observations que je viens de faire sur la formation successive des langues.

Je viens de montrer ce que l'esprit & le génie de l'homme brute ont fait pour arriver aux élémens d'une langue; je dois maintenant examiner les avantages que l'esprit a pu tirer du langage, pour faire de plus grands progrès vers la raison cultivée. Mais, comme je n'ai parlé jusqu'ici que de l'invention des noms, je ne regarde encore la langue que comme une *Nomenclature*, comme une simple liste de mots. Je ne parlerai pas même du premier avantage que l'homme tira de son langage, celui de communiquer à d'autres quelques unes de ses idées. Cela est assez évident de soi-même. Je me propose d'examiner en quoi consiste l'avantage que donnent les noms imposés aux choses, rélativement au progrès que l'homme brute devoit faire pour arriver à une raison cultivée. Je me répresente deux hommes dont

dont le génie & l'expérience soient les mêmes, qui ayent le même nombre d'idées claires; avec cette différence entr'eux que l'un possede la faculté de les désigner par des noms, que l'autre en soit privé; & j'examinerai quel seroit l'avantage que celui-là auroit sur celui-ci.

D'abord, je trouve que les noms assurent la possession des idées claires dont un grand nombre s'effaceroit de l'esprit sans leur secours. La mémoire est une faculté fort mécanique; il semble que l'esprit ne se rappelle rien que par le secours de quelque sensation liée à l'idée qu'elle reproduit. L'histoire d'un enfant sauvage trouvé dans les bois, où probablement il avoit été exposé dès sa premiere enfance, nous apprend que la mémoire manque absolument à l'homme qui ne peut fixer ses idées par des signes. On a beaucoup plus de facilité à se rappeller des idées sensibles que des idées abstraites. Sans les mots qui donnent un corps aux idées, on ne se retraceroit que celles des choses sensibles, qui se distinguent bien d'elles-mêmes, comme celles d'un arbre, d'un animal & d'autres choses semblables; toutes les autres idées s'effaceroient de l'esprit sans le secours des mots. Les tons, surtout quand ils sont bien articulés, sont des sensations qu'on se rappelle avec assez de facilité. Toutes les fois donc que nous voyons une chose désignée par un mot, ce mot nous revient en même tems, & nous rappelle que cet objet est un être dont nous avons déjà eu l'idée; ce qui nous engage à répéter, quoique très rapidement, l'opération par laquelle nous sommes parvenus la premiere fois à former l'idée claire de cet objet. D'un autre côté, les sons qui ont déjà frappé l'oreille, reviennent de tems en tems, soit qu'on les entende réellement, soit que quelque son analogue nous les rappellé; alors l'idée qu'on leur avoit associée revient aussi. Chacun sait par sa propre expérience combien il est difficile de se rappeller les idées que l'on ne sait pas encore exprimer; & ceux qui lisent les ouvrages des Philosophes modernes avec l'attention qui est nécessaire pour remarquer les progrès insensibles de l'esprit humain, auront observé que les idées neuves que les inventeurs présentent de tems en tems, ne prennent dans l'esprit du public & ne se répan-

pandent qu'après qu'on a trouvé des termes propres à les fixer. C'est une chose très digne d'être remarquée que la lenteur avec laquelle des branches entieres de nos connoissances s'étendent, avant qu'on soit parvenu à établir le langage propre à ces sortes de vérités. Des connoissances très importantes, clairement développées dans les écrits des Génies inventeurs, restent quelquefois des demi-siecles, en quelque maniere cachés ou indéchiffrables jusqu'à ce qu'un autre Génie vienne former & établir le langage requis pour cela. Alors ce qui étoit comme enséveli dans des mines est produit au grand jour & mis à la portée de tout le monde. C'est le service qu'a rendu le célebre *Wolff* aux vérités que *Leibnitz* avoit vues & proposées.

Cette observation mérite d'être mise dans un plus grand jour. Supposons pour cet effet qu'un grand Architecte entreprenne de répandre la science & le goût de son art chez un peuple auquel cet art fût encore inconnu. Que cet Architecte parle de bâtimens avec toute la clarté imaginable, mais sans se servir des termes de l'art & des expressions propres aux Architectes; qu'il supplée au défaut de ces termes par des descriptions, & même par de bonnes définitions; il est certain qu'il avancera avec une lenteur extreme. Mais qu'au lieu de cette méthode, il commence à rendre familier à ses éleves le langage de son art; alors il parviendra en peu de tems à leur en communiquer aussi la science & le goût. Faisons encore attention à ce qui nous arrive lorsque nous nous mettons à étudier une science nouvelle pour nous. Quelque lumineux que soit l'Auteur que nous avons choisi pour guide, quelques nettes & précises que soyent ses définitions; nous ne saisissons les choses qu'après que le langage propre à ce genre de connoissance nous est devenu familier. Alors tout d'un coup la clarté du jour succede au long & ténébreux crépuscule où nous étions plongés auparavant. Cela prouve suffisamment combien la mémoire & l'imagination gagnent par les noms.

J'ajoute encore une autre observation. C'est que souvent un concours fortuit de plusieurs circonstances nous fait appercevoir une idée

idée neuve & importante. Dans ce cas on est presque sûr de la perdre bientôt après, si l'on ne prend pas la précaution de la marquer par quelque signe. Pour faire revenir la même idée, il faudroit le même concours de circonstances, ce qui n'arrive presque jamais. A-t-on un mot propre pour nous en rappeller les principales, alors, à l'aide de ce mot, elles reviennent toutes, & amenent de nouveau cette idée que nous aurions été fâchés de perdre. Voilà en quoi consiste le premier avantage du langage.

J'observe, en second lieu, que les mots abregent considérablement toutes les opérations de l'esprit, en prenant souvent la place des idées qu'ils représentent, & cela sans aucun danger, pourvu qu'on n'en abuse pas. Dans une foule de cas, les mots ont le même avantage que donnent dans le calcul les caracteres. On sait qu'il seroit impossible de trouver, par le raisonnement, le résultat d'un grand nombre de calculs, c'est à dire que si, au lieu de caracteres, on vouloit toujours raisonner d'après les idées, souvent on ne parviendroit point à la derniere conclusion que l'on cherche. Dans le calcul on opere simplement sur les caracteres, & l'on se contente de les traduire, ou de leur substituer les idées mêmes, lorsque moyennant le mécanisme du calcul les formules sont réduites à une certaine simplicité. C'est ainsi que fort souvent on peut raisonner par les mots, ou signes seuls, sans se rendre compte à tout moment de leur signification; ce qui abrege considérablement le raisonnement & le rend clair en l'abrégeant. Cette observation a été faite par plusieurs Philosophes; & M. *Lambert* l'ayant très bien développée dans son *Organon*, je puis me dispenser d'en parler plus au long. C'est donc en cela que consiste le second avantage du langage, avantage qui est très important.

Un troisieme avantage résulte de ce que les mots conduisent à l'observation ou à la réflexion sur les choses mêmes & fortifient par là l'esprit d'invention. Les mots, ou termes propres à un certain genre, forment pour ce genre ce que les Anciens nommoient les *Topiques*, à l'aide desquels on peut étendre les connoissances de ces objets. Ceux

 qui,

qui, en fait de peinture, possedent tous les termes d'art, sont mieux en état que d'autres de juger si un tableau est conforme ou non à toutes les regles de l'art. On conçoit sans grande difficulté, comment les termes seuls les conduisent dans l'examen d'un morceau de peinture. Cela me dispense d'entrer dans un détail qui ne pourroit être qu'ennuyeux, mais qu'il est utile d'avoir devant les yeux pour saisir l'avantage des termes d'art. Ceux auxquels les termes de l'*Ontologie*, qui expriment les qualités & les rélations communes aux êtres en général, sont familiers, ont beaucoup plus de facilité d'analyser les matieres philosophiques, que ceux qui ignorent ces termes. Plusieurs Philosophes qui affectent un mépris souverain pour l'Ontologie, ignorent combien ils doivent à cette science pour sa nomenclature seule. Une science ne peut jamais pécher par un trop grand nombre de termes; pourvû qu'à chaque terme réponde une notion réelle. Ces mots *pourquoi? quand? comment? par qui? pour qui? rélation*, *essence*, *accident*, etc. occasionnent souvent des recherches qu'on auroit négligées, si la mémoire n'avoit pas fourni ces mots, & si ces mots n'avoient pas rappellé les idées qu'ils expriment. C'est ainsi que le célebre *Linné* a considérablement étendu la Botanique, par cela seul qu'il y a introduit un grand nombre de termes pour désigner les formes, les figures, les situations & les proportions des parties dans les plantes. Muni de la connoissance de ces termes, un Botaniste peut infiniment mieux décrire une plante, pour connoître le genre & l'espece auxquels elle appartient, qu'on ne le pouvoit auparavant. Un très grand nombre de plantes décrites par *Théophraste*, *Dioscoride* & d'autres Anciens, nous reste entierement inconnu par la seule raison que la nomenclature de la Botanique manquoit dans ces tems-là. La connoissance exacte & approfondie de quelque sujet que ce soit dépend donc, en grande partie, de la richesse de la langue dans laquelle on pense. Le degré d'étendue, de clarté & de précision de nos connoissances est toujours égal à celui dans lequel nous savons les communiquer. Tout homme qui, faute de termes & d'expressions, ne sait pas s'expliquer clairement & nettement, ne pense pas non plus avec clarté & netteté.

Car

Car, sans le secours des mots, nous n'avons qu'une connoissance *intuitive* des choses, nous ne sentons que confusément ce qui leur appartient. Les mots qui désignent les parties d'une pensée ou d'une idée, la débrouillent & nous mettent en état de la développer exactement.

Cela mérite une considération particuliere; car c'est par cet endroit qu'une langue bien cultivée fournit une partie des avantages qu'un grand Philosophe a souhaité de procurer aux Sciences par une espece de langue universelle & philosophique. Ces avantages consistent en ce qu'une langue suffisamment riche peut servir, comme de calcul, pour déterminer exactement ce qu'on ne peut estimer qu'à peu près, lorsque cette richesse lui manque. Comme un Mécaniste qui n'est point calculateur connoit à peu près, par estimation, l'effet que doit produire une machine, au lieu que le Géometre qui sait déterminer & marquer par des signes jusqu'aux moindres minuties de toutes les quantités qui entrent comme cause ou effet dans l'action de la machine, en détermine très exactement l'effet total; de même un homme de génie dont la langue est pauvre, sent quelquefois les choses par une espece d'estimation, tandis qu'un Philosophe qui possede une langue riche détermine très exactement ce que l'autre n'avoit vu qu'à peu près. Il y a mille choses dont nous n'avons que des connoissances très imparfaites par le seul défaut des termes. Qui est-ce qui est capable de décrire exactement une physionomie? L'œil seul, combien de choses n'annonce-t-il pas, sans que personne puisse décrire les modifications de cet organe qui produisent ces expressions? Comment décririez-vous à un autre la forme & l'apparence de l'œil vif, ou de l'œil languissant; de l'œil qui marque le désir, la confiance, la crainte, l'embarras? Or tout cela se sent, & personne n'est capable de l'exprimer. Je ne crois pourtant pas que cela soit impossible; il y a cent ans qu'on auroit douté qu'il fût possible de décrire une plante au point de la faire d'abord connoitre à celui qui la verroit pour la premiere fois. Je suis dans l'opinion que, si le génie de l'homme avoit fait autant d'efforts pour connoitre exactement les physionomies, & pour nommer toutes les

fications du visage & de ses parties, qu'on en a faits pour décrire les plantes, on décriroit aujourd'hui les physionomies avec la même exactitude qu'on décrit les plantes. Or c'est par cette facilité de décrire les choses exactement, que le raisonnement peut atteindre à cette évidence & à cette certitude qu'on admire dans les Mathématiques.

Car la véritable raison de l'évidence que l'on regarde souvent comme un privilege exclusif de cette science, vient de ce qu'il n'entre absolument aucune idée dans les raisonnemens des Géometres qui ne soit exprimée par un signe, soit mot, soit caractere. Moyennant cela, on peut être toujours sûr de n'avoir rien négligé & d'avoir eu égard à tout ce qui influe sur les conclusions. Une équation analytique, par exemple, a deux membres que le Géometre juge être égaux, si vous en doutez, il peut vous en convaincre en développant les termes de chaque membre; & ce développement est toujours possible, parceque la plus petite quantité qui entre dans la composition des termes peut être marquée par son signe. Or, par tout où le Philosophe a le même avantage que le Géometre, (ce qui arrive néanmoins rarement,) ses raisonnemens sont aussi évidens & aussi sûrs que ceux du Géometre.

On voit par là de quelle importance est la richesse d'une langue pour l'avancement & la certitude des connoissances, & que c'est avancer ces connoissances & leur certitude que d'inventer des mots. Cela sera plus évident pour ceux qui voudront réfléchir sur l'observation suivante.

Plusieurs grands Géometres qui ont travaillé avant la découverte du calcul infinitésimal, possédoient à peu près les connoissances qui, jointes à la pratique de ce calcul, ont produit de si grandes découvertes dans les Mathématiques. Il ne leur manquoit que les signes & *l'algorithme* du calcul, ou cette espece de langue par laquelle ils auroient exprimé distinctement les mêmes idées qu'ils avoient senties. N'ayant point tenté, ou n'ayant peut-être pas réussi à trouver une méthode convenable pour marquer leurs idées, mille vérités très importantes

leur

leur ont échapé. La même chose est arrivée à plusieurs des anciens Philosophes, qui ont possédé implicitement tout ce qu'il falloit pour parvenir à la certitude de diverses vérités métaphysiques, sans y arriver, faute de savoir poursuivre le raisonnement par la privation des termes propres à fixer leurs idées confuses. Plus on réflêchit sur l'effet du langage, mieux on voit, que la parole est à la raison & aux connoissances en général ce que l'analyse est aux Mathématiques. Cette analogie paroit encore plus clairement dans les parties de l'analyse où cette belle science est encore défectueuse. On sait que la solution de plusieurs problemes n'a pu réussir jusqu'ici que par cette raison seule que la langue analytique est imparfaite, & qu'il reste des formules ou des quantités complexes qu'on ne peut développer faute de termes, ou de signes. Plusieurs découvertes de calcul ne sont au fond que des manieres neuves de désigner les choses connues auparavant. Souvent même une maniere neuve d'exprimer ou de caractériser des choses pour lesquelles on avoit déjà eu des caracteres moins parfaits, amene de très belles découvertes. Par la même raison, une maniere plus heureuse d'exprimer une pensée, peut occasionner ou même opérer de nouvelles découvertes.

Les remarques que je viens de faire, s'étendent sur tous les mots en général, quand même ils ne seroient que des signes purement arbitraires des notions qui leur répondent. Mais il y a une classe de mots qui méritent une attention particuliere, & desquels l'influence sur la raison est encore plus importante. Ce sont les termes qui, par leur signification primitive, deviennent des signes naturels des idées qu'ils expriment.

J'entends par signes naturels, les termes qui expriment des ressemblances réelles ou métaphysiques entre deux objets, dont l'un répond au sens propre du mot, l'autre à son sens figuré. Tel est, par exemple, le mot d'*éblouir*, qui, dans le sens propre, marque un trop grand effet de la lumiere, par lequel la vision est troublée, & dans le sens figuré une trop grande force dans la perception. Telles sont en géné-

ral toutes les expressions métaphoriques. Nous allons considérer les avantages qu'on en tire pour la culture de l'esprit.

Il y a dans nos perceptions un nombre infini d'idées très obscures que l'on sent sans pouvoir les démêler. Les hommes de génie, doués d'une grande pénétration, ont moins de ces idées que les autres; les efforts qu'ils font pour les rendre claires, leur découvrent des ressemblances entre ces idées & d'autres plus faciles à être saisies. De là naissent les expressions métaphoriques, par le moyen desquelles les idées obscures deviennent claires à des hommes d'un moindre génie. Car, dès qu'on nous avertit qu'une chose dont nous n'avons pû nous former une idée juste, ressemble à une autre chose que nous connoissons mieux, nous nous efforçons à découvrir cette ressemblance; nous la découvrons peu à peu, & par là notre idée obscure se change en idée claire. C'est là le premier avantage qu'on tire des métaphores. Nous voyons des hommes couchés par terre; leurs attitudes nous font appercevoir qu'ils sont très fatigués; chaque membre exprime la lassitude qui les accable; mais nous ne démêlons point en quoi consiste cette expression. *Virgile* qui avoit vû des gens dans ce cas, dit que leurs corps avoient été *versés sur l'herbe*, *fusi per herbam*. Cette métaphore très heureuse répand une grande lumiere sur ce tableau; chaque membre de ces hommes si fatigués nous paroit exactement dessiné.

Une telle métaphore produit un effet semblable à celui que font les figures dans la Géometrie. Cette science seroit encore dans l'enfance sans le secours des figures, qui aident l'esprit à fixer avec exactitude & netteté des idées qui sans cela resteroient si confuses qu'on n'en tireroit aucun parti. C'est ainsi que la métaphore nous aide à fixer les idées qui, sans ce secours, resteroient confondues dans la masse de nos perceptions, & qu'elle rend visible & palpable ce qui paroit imperceptible à l'esprit. Pour comprendre toute l'importance de cet avantage de la métaphore, il faut considérer que les esprits les plus pénétrans sentent à chaque instant une infinité de choses qu'ils ne démêlent pas, & que par conséquent il y a dans l'esprit de l'homme un nombre

infini

infini d'idées obscures qui mettent des bornes au progrès de ses connoissances. Chaque métaphore heureuse recule ces bornes en tirant de l'obscurité une de ces idées, qui avoit été inutile jusqu'alors.

Il arrive même souvent que ces métaphores conduisent à des découvertes importantes. Nous en voyons un exemple très frappant dans la théorie des idées de *Leibnitz*. Ce grand homme, en développant ce qu'il y avoit de confus dans ces expressions métaphoriques d'idées *claires*, *obscures*, *confuses* & *distinctes*, jetta les fondemens d'une Logique vraiment utile, & ouvrit en même tems une carriere toute nouvelle qui a fourni depuis à la Psychologie un très grand nombre de vérités importantes. Il y a longtems que les Orateurs ont reconnu cet avantage des métaphores, puisqu'ils ont recommandé comme une regle très importante pour l'invention des argumens, la réduction des termes métaphoriques à leur signification primitive. Il est certain que souvent le sens primitif d'un mot fait découvrir une image dont on tire des éclaircissemens très considérables, qu'on auroit cherchés en vain par toute autre voie. Je voudrois qu'un Philosophe profitât de la vogue excessive où sont les Dictionnaires, pour en donner un des métaphores les plus riches. Un tel ouvrage bien exécuté seroit un vrai trésor & serviroit à avancer très considérablement les connoissances philosophiques en tout genre. Il est du moins évident que les métaphores d'une langue renferment toutes les vérités qu'on a entrevues sans les pouvoir développer. Or il est incontestable que tout homme sent infiniment plus de vérités qu'il ne peut en démontrer. Car, comme il y a des idées qu'on ne saisit que par intuition, il y a aussi des raisonnemens intuitifs, ou implicites. Souvent on sent la certitude d'une conclusion sans pouvoir développer les prémisses d'où elle résulte. Cela arrive dans deux cas; ou, lorsque les notions qui entrent dans un tel raisonnement sont trop simples pour être développées, ou lorsque leur nombre est trop grand pour être saisi avec clarté par un seul acte de l'esprit. Ces vérités ne peuvent donc être démontrées aux autres; mais une image heureuse peut les leur faire sentir. Si, par exemple,

on

on ne réussissoit pas à convaincre un homme par un raisonnement développé, qu'il y a un Dieu, auteur & conservateur de l'ordre de la Nature, on pourroit lui faire sentir cette vérité en parvenant à lui faire voir une ressemblance réelle entre le cours de la Nature & un vaisseau gouverné par un bon pilote. Dès qu'on apperçoit cette ressemblance, on n'a plus besoin de raisonnement pour être convaincu de la plus sublime de toutes les vérités.

Ces remarques font voir, que les progrès de la raison dépendent beaucoup de la perfection de la partie métaphorique des langues. Le Philosophe augmente le fond de nos connoissances par des raisonnemens démonstratifs, & le Bel-esprit en recule les bornes par l'invention de métaphores heureuses. L'imagination est quelquefois aussi profonde que l'entendement le plus pénétrant. C'est à elle que l'on doit ces expressions heureuses qui, des ténebres même, font sortir des éclats de lumiere. L'homme d'esprit voit les ressemblances les plus fines & les plus profondément cachées; & son heureux génie trouve les moyens de les exprimer. Les écrits des meilleurs Poëtes anciens & modernes & ceux des Beaux-esprits philosophes renferment des trésors dans ce genre. Celui qui voudroit se donner la peine de les en tirer, rendroit un très grand service à la Philosophie. Un tel ouvrage renfermeroit les vérités les plus utiles sous la forme la plus propre à faire impression. Souvent donc l'invention d'un terme ou d'une image peut valoir une découverte. C'est une raison de plus d'encourager les Beaux-esprits. Le Philosophe cherche toujours la vérité & la manque souvent; le Bel-esprit la trouve souvent sans la chercher.

Le succès de ce travail dépend en grande partie de la connoissance des productions de la Nature & de celles des Arts. Car c'est l'analogie entre le monde intellectuel & le monde visible qui fournit ces expressions heureuses. Nous avons en cela un grand avantage sur les Anciens; la connoissance de la Nature est infiniment plus étendue & plus approfondie qu'elle ne l'étoit de leur tems, & les Arts fournissent un très grand nombre de productions qui leur étoient inconnues. On n'a

n'a pas assez profité de cet avantage. Il semble du moins que, si les langues modernes de l'Europe avoient tiré des découvertes tout le profit possible, elles auroient dû s'enrichir au point qu'en fait de Morale & de Philosophie, on sentiroit & on exprimeroit mille idées inconnues aux Anciens. Ce n'est pas que je prétende qu'on n'ait rien profité du tout à cet égard. Je conviens qu'on peint beaucoup mieux aujourd'hui les sentimens du cœur que ne le pouvoient faire les Anciens; mais cet avantage ne me paroit pas proportionné aux progrès qu'on a faits dans presque tous les arts & toutes les sciences. Je crois que mille idées nous échappent encore, qu'il seroit possible de fixer par des métaphores que fourniroient des termes déjà connus & employés, pour exprimer des choses visibles, analogues à ces objets intellectuels qui nous échappent encore. J'ai observé souvent que des gens qui exercent des arts mécaniques employent des métaphores très heureuses, tirées des termes techniques de leur art; mais inconnues aux personnes d'une condition plus relevée. Les Philosophes & les Beaux-esprits devroient recueillir ces termes, les ennoblir & leur donner des significations plus générales; la Philosophie en tireroit certainement un profit considérable.

Dans toutes les remarques que j'ai proposées jusqu'ici sur les langues, je ne les ai envisagées que comme des dictionnaires des mots: il me reste à les considérer entant que discours ou instrumens propres à exprimer les changemens qui arrivent aux êtres & les rapports qu'il y a entr'eux. Il est probable que la nécessité seule a produit les premieres tentatives pour exprimer par des mots une chose arrivée. Je m'imagine que les premiers hommes ont eu longtems des idées & des mots pour exprimer certaines choses, avant que de penser à distinguer plusieurs modifications. En voyant, par exemple, un animal, dont ils s'étoient formé l'idée, & auquel ils avoient même donné un nom, la même idée & le même nom leur revenoit, soit que cet animal fût couché ou sur pied, qu'il se tînt tranquille ou qu'il marchât; ils n'auront pas d'abord séparé les idées de ces diverses modifications de l'idée de l'animal même. Il n'y a que l'habitude de voir ces objets, ou quelque

événement intéressant, qui ait pû les engager à faire ce pas. C'est ce qui nous arrive encore avec tous les objets nouveaux. Nous les voyons longtems avant que de distinguer plusieurs de leurs modifications. Un homme qui a toujours vécu dans l'enceinte d'une ville verra un champ couvert de diverses especes d'herbes, sans faire la moindre attention à plusieurs choses qu'un Botaniste ou un Cultivateur y observe au premier coup d'œil.

Je crois donc que des cas extraordinaires ont engagé les hommes à distinguer les modifications des êtres. Un loup, par exemple, aura déchiré une brebis: le berger vouloit instruire ses camarades de cet événement; il voyoit fort bien que les mots de *loup* & de *brebis* ne suffisoient pas pour le leur annoncer. En se rappellant vivement la scene, il voyoit les deux animaux, mais il distinguoit de plus l'action de l'un & la souffrance de l'autre; il cherche à les exprimer. Supposons qu'il ait trouvé un terme pour exprimer l'action de *dévorer*. Ces trois mots *loup*, *brebis*, *dévorer*, étant donnés, il s'agissoit de les énoncer de façon à faire comprendre ce qui est arrivé. Il est visible que ces trois mots pris dans les cas absolus ont pû suffire pour déterminer le sens de la phrase que *le loup a dévoré la brebis*; car la partie souffrante étoit assez déterminée par la nature même du sujet. Mais tous les cas ne sont pas aussi simples que celui-ci. Il sert cependant à nous faire comprendre qu'il y a eu des cas où des noms joints ensemble, sans autres modifications, ont pu exprimer une phrase. Il falloit après cela des cas d'une autre nature pour faire comprendre à ces hommes, que de telles phrases étoient insuffisantes pour s'exprimer sans équivoque. Ces cas pouvoient fort facilement arriver. Supposons, par exemple, qu'un homme, pressé par la faim & voulant déclarer ce besoin, ait dit à son camarade *moi manger*. Ces deux mots pouvoient dire qu'il a mangé ou qu'il desire de manger. On sent de quelle importance il étoit d'ôter l'équivoque de sa phrase. La nécessité qui rend ingénieux lui aura fait tenter mille moyens pour y réussir. Changement d'accent, inversion, terminaison, son auxiliaire, rien n'aura été négli-

négligé pour se tirer d'embarras. Voilà les premieres tentatives pour se procurer une Grammaire. Ce n'est sûrement pas par théorie ou par spéculation que les hommes sont parvenus à modifier les mots pour exprimer les modifications dans les choses; c'est la nécessité seule qui les y a forcés.

Mais comment l'homme a-t-il trouvé ces modifications des mots? J'avoue qu'il me paroit extrèmement difficile d'expliquer cela. C'est sans doute le hazard qui y a contribué le plus. Aussi voyons-nous que les uns ont réussi d'une façon & les autres d'une autre, ce qui constitue les différences grammaticales dans les diverses langues. C'est donc moins la raison que le hazard qui a commencé la Grammaire. Mais c'est la raison & une raison très cultivée qui l'a perfectionnée.

Ces observations nous découvrent assez clairement la marche que l'homme a suivie pour parvenir aux élémens du discours, ou à ces phrases simples qui n'expriment qu'une seule proposition. Il est probable que les langues qui ensuite ont été les mieux cultivées, sont restées très longtems dans ce premier état: il y a même des nations dont la langue n'est point sortie encore de cette enfance. (*). Quand on réfléchit sur la distance prodigieuse qu'il y a entre une langue qui n'est composée que de phrases simples & une langue cultivée qui a ses périodes composées, on a de la peine à concevoir, comment l'homme a pu franchir le pas pour arriver de l'une à l'autre.

Représentons-nous un homme à moitié sauvage encore, qui n'a que des monosyllabes dans sa langue, sans prépositions, sans conjonctions, sans modes pour les verbes; supposons, dis-je, qu'un tel hom-

(*) On conserve dans la Bibliotheque de l'Abbaye de St. Gal en Suisse, plusieurs traductions allemandes d'Auteurs grecs & latins: ces traductions sont du VII siecle; elles ont cela de particulier que les mots allemands se succedent dans le même ordre qui regne dans les originaux. On voit à peu près la même chose dans la traduction gothique des Evangiles, connue sous le nom de *Codex argenteus*, qui est du III siecle. Cela prouve que ces langues n'avoient pas encore, dans ce tems-là, de construction qui leur fût propre.

homme cherche à raconter qu'il a couru après un lievre, qu'il auroit pris s'il n'étoit pas tombé au moment qu'il alloit l'attraper. Il lui faut un nombre d'énoncés, ou de propositions simples, pour raconter ce fait: comme par exemple, *j'ai couru après le lievre*, *j'étendois le bras*, *je voulois le prendre*, *je suis tombé*, *je ne l'ai point pris*. Que l'on compare ce long discours, à la phrase qu'une langue formée fourniroit pour exprimer la même chose, & l'on comprendra combien de pas il a fallu faire pour arriver de l'une à l'autre.

Cependant ce premier langage monosyllabique avoit un avantage très considérable sur celui qui ne seroit composé que de noms. Il pouvoit suffire pour former des raisonnemens exacts, qui ne se font presque que par des énoncés simples. La raison pouvoit faire des progrès considérables, moyennant une telle langue: ces progrès rendirent l'homme capable de la perfectionner peu à peu; mais l'ouvrage devoit naturellement être long & difficile.

La perfection grammaticale d'une langue étant l'ouvrage de la raison & du génie, elle peut servir d'échelle pour mesurer le degré de raison & de génie des peuples. Si par exemple, nous n'avions, point d'autre monument pour constater l'heureux génie des Grecs, leur langue seule suffiroit pour cela. Quand une langue est, généralement parlant, insuffisante pour rendre dans une traduction les finesses d'une autre langue, c'est une marque sûre que le peuple pour lequel on traduit, a l'esprit moins cultivé que l'autre.

Si c'est la raison & le génie qui ont perfectionné les langues; elles, de leur côté, rendent les plus grands services à la raison & au génie. On peut distinguer trois périodes, ou trois âges, dans les langues. Le premier période est celui où la langue n'a que des noms, & des verbes à l'infinitif, qui au fond ne sont que des noms: le second période est celui où elle a, outre les noms, des énoncés simples, ou

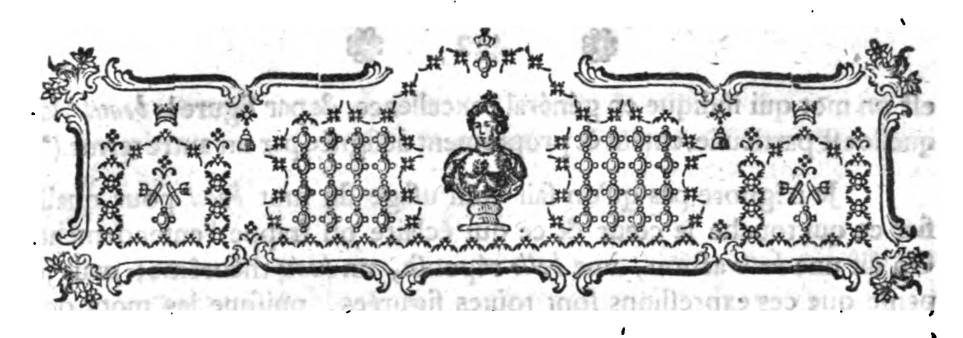
ou des propoſitions qui ne renferment qu'un ſeul ſujet avec un attribut; le troiſieme enfin, où elle a des propoſitions complexes. Dans le premier période de la langue, l'homme ne peut avoir que des connoiſſances intuitives; le moindre raiſonnement eſt impoſſible alors: dans le ſecond, il peut former des raiſonnemens exacts, mais ils ont la forme & l'aridité des démonſtrations de Géométrie; l'homme peut raconter des faits; mais il lui faut cent phraſes pour un récit que Tacite auroit renfermé dans deux lignes. Aucun réſumé, aucune réunion d'un nombre d'idées ſous un ſeul point de vue, n'a lieu dans cette langue; car cela n'eſt poſſible que lorſque la langue eſt bien perfectionnée. On peut comparer ces trois périodes des langues aux trois périodes de la Peinture. Au commencement, on ne deſſinoit que des figures iſolées; puis on joignoit pluſieurs figures pour exprimer une action; mais cette action étoit repréſentée ſans ordonnance & ſans grouppes, comme nous le voyons dans les tableaux hiéroglyphiques des anciens Egyptiens. Enfin on eut le génie de donner de l'ordonnance au tableau. Une belle période du diſcours reſſemble à un tableau d'une belle ordonnance. Uu diſcours découſu, où les phraſes ſimples ſe ſuccedent, eſt un tableau d'hiéroglyphes. Ces tableaux hiéroglyphiques ſervoient à inſtruire la poſtérité des événemens du tems paſſé. Cette inſtruction pourtant étoit lente & pénible, elle ne fourniſſoit que les ſquéletes des faits. Les langues groſſieres ſont dans le même cas. On ne ſaiſit qu'en gros & froidement les choſes dites dans une telle langue; il n'y a rien qui pique l'eſprit, ou qui l'engage à des efforts. Un diſcours prononcé dans une langue bien cultivée eſt pour l'auditeur un exercice continuel de toutes les facultés de l'ame. Il faut de la pénétration, de l'eſprit, du génie, une attention réfléchie, quelquefois des ſentimens, pour bien ſaiſir le tout. C'eſt donc une des occupations les plus utiles que de lire les ouvrages les mieux écrits dans les langues bien cultivées. En général, apprendre une de ces langues, c'eſt apprendre à penſer, à raiſonner; c'eſt ſe former le goût & étendre

ſon génie. Ceux donc qui perfectionnent les langues & l'éloquence, ne ſervent pas moins bien les hommes, que ceux qui découvrent des vérités. Ceux-ci augmentent les richeſſes de l'eſprit, & ceux-là les préſentent de la façon la plus avantageuſe ; & en même tems fortifient toutes les facultés de l'ame, ſans leſquelles les connoiſſances nous ſont très inutiles. Il eſt donc difficile de dire ſi c'eſt aux découvertes des Philoſophes, ou aux travaux des Beaux-eſprits que les hommes ont le plus d'obligation : mais il eſt viſible que les uns & les autres ſont néceſſaires pour les progrès de la raiſon.



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.



DE LA

VRAIE NATURE DU BEAU EN GÉNÉRAL.

PAR MR. DE CATT.

Avant de rechercher la vraie nature du beau & sa différence d'avec le bon, il convient de fixer la signification de ces mots. Ce qui est du ressort de l'odorat & du goût peut être *bon*, & n'est jamais *beau*. Ce qui est du ressort du tact n'est ni *beau* ni *bon*. (*) Dans le sens propre on appelle *beau* ce qui frappe les yeux & les oreilles; j'en appelle à l'usage constant: on dit une *bonne* odeur, une *bonne* saveur, une chaleur *agréable*, une surface *douce*: on ne dit point une *belle* surface, une *belle* chaleur, une *belle* saveur, une *belle* odeur; & si dans quelques langues, (en Anglois, par ex.) on ajoûte à ces qualités une épithete qui semble indiquer la beauté, (**) c'est que cette épithete est

(*) Il est vrai qu'après avoir tâté un lit ou un drap, on dit dans la conversation, voilà un *bon lit*, un *bon drap*: mais cette expression n'est qu'une conséquence; le tact en fournit une prémisse & l'expérience fournit l'autre: les prémisses sont; ce lit est mollement élastique, ce drap est *doux* au toucher; or un lit qui est mollement élastique, est commode pour coucher; un drap qui est doux au toucher, est de bon usage. Donc etc.

(**) *Fine*, on dit *a fine flavour*, à ce qu'assure le Dictionnaire Encyclopédique; j'en doute, au moins je ne me rappelle pas de l'avoir lû; & sûrement cet exemple ne se

est un mot qui indique en général l'excellence, & par figure la *beauté*, laquelle est particulierement & proprement désignée par un autre terme.(*)

Je n'ignore pas qu'on fait aussi usage du mot *beau* pour qualifier ce qui touche le cœur & ce qui éclaire ou frappe l'entendement. On dit une *belle* action, une *belle* réponse, un *beau* théorême; mais je pense que ces expressions sont toutes figurées, puisque les mots ont d'abord été inventés pour exprimer les choses matérielles, & que ce n'est que par la suite qu'ils ont été usités pour les choses intellectuelles.

Lorsque nous trouvons, dit le célebre Montesquieu, *du plaisir à voir une chose avec une utilité pour nous*, (j'entens pour le genre-humain,) *nous disons qu'elle est bonne: lorsque nous trouvons du plaisir à la voir sans que nous y démêlions une utilité présente, nous disons qu'elle est belle.*

En effet tous les objets de la vue qui peuvent être bons ou beaux, ne sont *bons* qu'autant qu'ils sont utiles, & ne sont *beaux* qu'autant qu'on les considere indépendamment de l'utilité. La couleur d'un homme est *bonne* quand elle indique une santé robuste, & alors elle peut être belle; elle peut être belle sans être bonne, comme il arrive dans quelques maladies qui laissent au moins pour quelque tems un teint frais, clair, & vermeil.

Une maison est belle, si elle flate la vue; elle est bonne, si elle est solide & commode. On n'appelle jamais *bons* les édifices où la solidité & la commodité sont supposées; on dit qu'un Palais, un Temple, un théatre est *beau*, on ne dit pas qu'il est bon; ou si l'on dit qu'un théatre est *bon* ou *mauvais*, on ajoûte quelque chose, *pour les acteurs*, par exemple; & l'on veut dire alors, qu'il est favorable ou contraire à la voix, espece de commodité qu'on ne sauroit supposer parce

ne se trouve ni dans le Dictionnaire de Boyer, ni dans celui de Ludwig, ni dans l'Abrégé du Dictionnaire de Johnson. Ce dernier donne pour onzieme sens du mot *fine beautiful with dignity*, ce qui ne convient pas à une odeur.

(*) *Beauti beautifull.*

parce qu'elle est rare. L'Architecture est bonne si elle est conforme aux modeles que la Grece nous a laissés, parce que cette architecture a jusqu'à l'apparence de la solidité. Par la raison contraire l'Architecture gothique peut être belle, elle n'est jamais bonne.

La beauté peut se trouver dans les paysages, dans les fleurs, dans les tableaux, la bonté ne s'y trouve jamais; celle-ci n'est pas toujours déterminée par l'utilité dans ce qui est du ressort des autres sens. Les odeurs sont bonnes ou mauvaises, & toujours inutiles; les ragoûts des Apicius modernes sont bons quoique nuisibles. Dans le moral l'utile accompagne le bon, & ne le constitue pas. Une bonne action est toujours utile; cependant elle est bonne, non parce qu'elle est utile, mais parce qu'elle est conforme à la nature des choses; un degré de perfection de plus la rend *belle:* car une belle action est toujours bonne, mais une bonne action n'est pas toujours belle.

Après avoir fixé le sens du mot *beau*, suivant l'usage au moins de notre langue, il faut déterminer la nature du *beau*. Ce terme est un de ceux *que nous appliquons à une infinité d'Etres; mais quelque différence qu'il y ait entre ces Etres, il faut ou que nous fassions une fausse explication du terme beau, ou qu'il y ait dans tous ces Etres une qualité dont le terme beau est le signe.* (*) Que pouvons-nous faire pour découvrir cette qualité commune à tant d'objets différents? Nous ne pouvons commencer nos recherches que par nous-mêmes.

Pouvons-nous conjecturer si les Etres sensibles différens des hommes connoissent la beauté, & deviner ce qui se passe en eux? Quand nous le pourrions, quel avantage en retirerions-nous? Si l'état de leur ame dans cette occasion est différent de l'état de la nôtre, cette différence pourroit, il est vrai, répandre quelque jour sur l'idée que nous avons de la beauté, mais toujours il faudroit connoître l'état de notre ame aussi bien que celui des autres Etres; & si ces deux états se ressemblent, il faut considérer le nôtre que nous connoissons par senti-

(*) *Dict. Encyclop.* Art. *Beau*, pag. 176. v. 1. c. 3.

sentiment, & non celui des autres Etres que nous entrevoyons par conjecture. Examinons donc les hommes.

Horace admire un tableau de Pausias, & Davus un combat de gladiateurs grossierement dessiné avec du charbon (*): l'état de leur ame est semblable, mais différent de celui dans lequel se trouve l'ame d'Horace invité subitement à souper chez Mécénas, (**) ou l'ame de Davus attiré par le fumet d'un morceau friand. (*.*)

Ainsi la perception du beau excite en nous un sentiment différent de tout autre; c'est par ce sentiment que nous distinguons le beau & ses degrés, comme nous apprenons par les sensations à connoître le son & la lumiere, & à distinguer leurs modifications. Suivons donc, pour expliquer la nature du beau, la même route que nous suivons pour développer la nature du son & de la lumiere: gardons-nous soigneusement de confondre un certain état de l'ame avec l'*objet qui* l'occasionne, & l'un & l'autre avec l'organe qui transmet au cerveau l'impression de l'objet.

Nous avons observé que la perception du beau mettoit toujours l'ame du spectateur dans un état différent de tout autre; cet état est toujours agréable, quoique le plaisir qui l'accompagne soit quelquefois doux & tranquille, quelquefois vif, animé, & fortifié par la surprise ou par l'admiration.

Il est naturel de penser que le plaisir qui a fait naître le mot de *beauté*, a été fort sensible; c'est ce qui me persuade que c'est à la vue plutôt qu'à l'ouïe que les hommes doivent la premiere idée de la beauté. L'impression du beau visible me semble plus frappante & plus générale que celle du beau musical. Les plantes, les animaux, la Terre, le Ciel, toute la Nature nous offre à chaque instant le beau visible. Le beau musical est plus rare; les hommes, il est vrai, ont un penchant inné

(*) *Horat*. Sat. VII. Lib. II. v. 85-90.
(**) v. 32 & 33.
(*.*) v. 92.

iné pour l'Harmonie; ils auront trouvé du plaisir à écouter les Oiseaux, à entonner des chansons grossierement sonores: mais qu'il y a de distance entre ce plaisir ébauché, pour ainsi dire, & le plaisir délicat qui accompagne la perception du beau! Le Ciel parsemé d'étoiles, un paysage gracieusement diversifié, ont d'abord transmis par les yeux à l'esprit des hommes une sensation délicieuse; & les hommes ont imaginé le mot *beau* pour l'exprimer. Ensuite une voix extraordinairement douce & flexible, une mélodie plus recherchée, mais facile à distinguer, a excité en eux une autre sensation agréable; & dès lors ils ont appliqué au plaisir occasionné par l'ouïe le mot inventé pour indiquer celui qu'ils avoient reçu par la vue. Il semble que le célebre Montesquieu ait été du même sentiment; il se sert des objets visibles pour expliquer la différence qui sépare le beau du bon. (*) Un état déterminé de l'ame est donc nécessaire pour constituer la beauté; mais les qualités capables d'occasionner cet état résident dans l'objet.

Au lieu de dire avec Virgile, *procumbit humi bos*, ou bien, *quadrupedante putrem sonitu quatit ungula campum*, dites avec l'Abbé Desfontaines, *le Taureau s'abat & tombe sans vie*, ou *toute la Campagne retentit de la marche de cette superbe Cavalerie:* vous direz la même chose que Virgile, mais vous aurez fait évanouir toute la beauté; vous aurez, comme on a dit, tué un Poëte. Présentez à Crésus Esope & Rhodope en même tems; la figure du premier lui déplaira, & celle de la seconde lui paroîtra agréable. Il y a donc, soit dans les objets mêmes, soit dans les circonstances qui les accompagnent, quelque chose qui les rend beaux ou laids. Les circonstances augmentent ou diminuent la force de ces qualités, & vont même jusqu'à changer l'état de l'ame.

Horace trouve grossiers & méprisables les crayons que Davus admire. Quand je suis gai, une musique gaie me plait; elle m'ennuie & me fatigue lorsque je suis triste. Scipion respecte la belle Espagnole; son action est belle pour nous; elle seroit peut-être absur-

 de

(*) *Dict. Encyclop. Art. Goût.*

de pour un Africain ardent, & indifférente pour un Lapon froid. Nous trouvons une beauté fiere & sublime dans la fameuse réponse du vieux Horace; un Sauvage n'y trouveroit que l'expression naturelle d'un sentiment ordinaire, au moins si l'on doit ajoûter foi à ce qu'on rapporte de leur courage dans les combats, de leur mépris pour la douleur, & de leur fermeté à l'approche de la mort. L'intrigue d'Héraclius est belle pour un Académicien, & laide pour le peuple. Donc cet état de l'ame qui constitue le beau dépend d'un rapport déterminé entre l'objet & la constitution de l'ame, soit naturelle, soit habituelle, soit accidentelle; & la constitution accidentelle de l'ame varie avec celle de l'organe.

Avec une vue plus perçante nous verrions une ébauche grossiere dans ce qui nous paroît actuellement une miniature très-fine; avec une vue plus confuse nous admirerions comme une miniature ce que nous regardons comme une ébauche: les instrumens d'optique mettent la chose hors de doute; ils nous assurent qu'avec d'autres yeux nous aurions une autre architecture & une autre peinture; & ils nous donnent lieu de juger qu'avec d'autres oreilles il nous faudroit une autre musique, une autre poésie, & une autre éloquence: il en résulte que le beau, soit visible, soit musical, consiste dans un rapport déterminé entre la constitution de l'ame qui l'apperçoit, l'objet auquel on attribue la beauté, & l'organe qui reçoit & transmet l'impression des objets.

Le rapport entre la constitution de l'ame & les qualités de l'objet suffit pour le beau moral & pour le beau purement intellectuel. La beauté d'une proposition ne dépend point des termes qui l'énoncent, ni la beauté d'une action de celle des acteurs; mais la littérature admet souvent une espece de *beau mixte*, pour ainsi dire, qui dépend en partie de la chose même, en partie de l'expression. *Ma Mere*, dit Alexandre à Sisigambis qui avoit pris Ephestion pour Alexandre, *ma mere, vous ne vous êtes pas trompée, c'est un autre Alexandre.* Cette réponse est belle en elle-même; noyez-la dans un déluge de paroles, elle

elle cessera de l'être quant à l'expression, quoiqu'elle conservé la beauté de la pensée, ou plutôt du sentiment.

La littérature reconnoît ainsi des beautés qui dépendent non de l'objet, mais du rapport de l'expression avec l'objet. Le Taureau frappé qui tombe, la Cavalerie qui galoppe, n'ont rien de beau; mais les expressions pittoresques & imitatives dont Virgile se sert sont belles; & l'expression fait en littérature une partie essentielle de la chose; puisque c'est par l'expression que toutes les sciences tiennent à la littérature. (*)

On peut donc dire en général que le *beau* dans l'acception commune de ce terme, est ce qui excite en nous une espece déterminée de sentiments agréables; & qu'il résulte d'un rapport fixe qui se trouve entre la constitution de l'ame, celle de l'organe, & les qualités de l'objet. La notion précise, la véritable idée du *beau* est celle-ci: le beau est ce qui nous occasionne cette sensation agréable que nous éprouvons à la présence de ce que nous appellons beau; comme la notion précise, la véritable idée du rouge est celle-ci: le rouge est une propriété de la lumiere qui nous occasionne cette sensation déterminée que nous éprouvons à la présence de ce que nous appellons rouge.

Si l'on connoît si peu une chose dont on parle tant, c'est parce qu'on ne s'est pas encore tout à fait délivré de l'erreur que les Anciens ont commise, en regardant comme des qualités positives, les qualités relatives de notre ame. St. Augustin demande: *cela est-il beau parce qu'il plait, ou cela plait-il parce qu'il est beau?* Il répond: *sans difficulté, cela plait parce qu'il est beau.* Il regardoit donc la beauté comme une qualité positive, réellement existante dans les objets; & c'est ainsi que l'envisagent tous les Modernes qui assurent *qu'une chose nous plait parce qu'elle est belle.* J'aimerois autant qu'à la question: l'écarlate paroît-elle rouge parce qu'elle l'est, ou est-elle rouge parce qu'elle

le

(*) Voyez 2eme Mémoire.

(**) *Dict. Encyclop.* Art. *Goût*, pag. 762. v. 1. S. 3.

le paroît? on répondît: sans difficulté, l'écarlate paroît rouge parce qu'elle l'est. Il faut répondre le contraire au sujet de la beauté comme au sujet des couleurs, si l'on veut se conformer à la vérité; & si St. Augustin avoit répondu: cela est beau parce qu'il plaît, toute la dispute étoit finie.

Mais, dit-on, *la régularité, l'ordre, la proportion, la symétrie sont essentiellement préférables à l'irrégularité, au désordre & à la disproportion* (*): *La similitude, l'égalité, la convenance des parties réduit tout à une espece d'unité qui contente la raison* (**); *& puisqu'il n'y a point de vraie unité dans les corps, il faut avouer qu'il y a au dessus de nos esprits une certaine unité originale, souveraine, éternelle & parfaite, qui est la regle essentielle du beau; & qu'il y en a un essentiel, nécessaire, & indépendant de toute institution; & c'est celui dont l'idée, comme parle encore St. Augustin, forme l'art du Créateur.* (*.*)

Je réplique: est-ce le beau qui contente la raison? n'est-ce pas le vrai? admettons-nous une proposition de morale, de physique, de mathématique, sans en avoir exactement pesé les preuves à la balance de la raison? Que nous sommes à blâmer! Nous risquons à tout moment de prendre le faux pour le vrai. Sommes-nous obligés de recourir à l'examen pour juger des beautés d'une production de la Nature ou de l'art? Que nous sommes à plaindre! Nous ne les sentirons jamais. Nous distinguerons par le raisonnement aussitôt les couleurs que la beauté. L'unique usage de la raison pour ce qui regarde le beau, est de décider si ce qui nous semble beau, paroîtra tel à la plus grande & à la plus saine partie des hommes.

Les idées de régularité, d'ordre, de proportion, de symétrie, sont, comme toutes les autres idées, éternelles, invariables, & essentiellement différentes de toute autre, & à plus forte raison des

idées

(*) P. André. *Traité du Beau* pag. 8.
(**) Id. pag. 12.
(*.*) Id. pag. 12 & 13.

idées contraires. Mais que veut-on dire, lorſqu'on aſſure que les prèmieres ſont eſſentiellement préférables aux dernieres? Peut-on entendre autre choſe, ſi ce n'eſt qu'il eſt impoſſible de concevoir un Etre intelligent qui dans toute occaſion n'approuve l'ordre, la régularité, la proportion, & ne déſapprouve toujours l'irrégularité, le déſordre & la diſproportion? Si c'eſt ce qu'on affirme, où en eſt la preuve? car on ne ſauroit nous donner une aſſertion pour un axiome. L'idée d'être intelligent & celle de la préférence accordée au déſordre, ſi elles ſont contradictoires, ne le ſont pas auſſi manifeſtement que celles d'être & de n'être pas dans le même tems. Mais pourquoi ſe jetter dans la Métaphyſique, lorſque nous avons en nous-mêmes les preuves que nous cherchons?

Nous ſommes frappés de la beauté d'un Ciel parſemé d'étoiles, quoique les étoiles y ſoient placées ſans ordre, ſans proportion, ſans ſymétrie; nous préférons ſouvent l'irrégularité d'un bois à la régularité d'un boſquet: l'ordre de l'art nous fatigue à la longue, & nous force à reconnoître que le déſordre de la nature lui eſt préférable; & même dans les ouvrages des hommes,

Souvent un beau déſordre eſt un effet de l'art.

La Géométrie naturelle m'a mis comme aux autres hommes un compas dans les yeux pour juger de l'élégance d'une figure ou de la perfection d'un Ouvrage; elle n'a pas oublié de m'apprendre les premiers principes du bon ſens. (*)

Mais cette Géométrie ne me dit pas que cette élégance & cette perfection ſoient *d'un beau eſſentiel & indépendant de toute inſtitution;* mais ces principes m'apprennent que le mot *beauté* ajoûte quelque choſe aux mots *ordre*, *proportion*, *ſymétrie;* que ce quelque choſe eſt une ſenſation agréable d'une nature particuliere; que les *rapports* (**) *géométriques des ſons*, *des intervalles qui les ſéparent*, *des tons qui en réſul-*

(*) P. *André* p. 8. (**) Ib. p. 123.

résultent, & des accords que la Musique en compose, font la base des regles que suit un bon Compositeur ; mais que le plaisir ne consiste pas dans la connoissance de ces rapports qui sont inconnus à la plûpart des Amateurs, & qui ne se laissent pas sentir à l'oreille la plus fine du Géometre le plus profond ; que ces rapports aussi bien *que cet ordre primitif que les sens ne connoissent point, mais que la raison ne peut ignorer ; que cet ordre qui apprécie chaque Etre suivant son rang essentiel ; que ces rapports & cet ordre, dis-je, sont éternels, immuables, indépendants de toute institution, même divine* (*), comme les idées des choses ; & que cet ordre est *bon ;* mais ces principes ne disent pas qu'il est *beau ;* ils m'enseignent plutôt qu'il n'y a aucun rapport entre l'*espece d'unité* qu'on observe dans les beaux objets, & l'*unité originale, souveraine, éternelle*, & parfaite ; & qu'il ne faut jamais parler sans s'entendre.

Quel est le sens de la question : *y-a-t-il un beau indépendant de toute institution même divine ?* Veut-on dire : les objets que nous trouvons beaux ont des qualités que n'ont point les objets que nous trouvons laids ; & Dieu même ne peut pas faire que ces qualités se trouvent dans les objets, & que ceux-ci cessent de paroître beaux à des hommes faits comme nous le sommes ? Dans ce sens, la proposition est indubitable, elle se réduit à celle-ci : ce qui est, est ce qu'il est, & ne peut pas être autre chose pendant qu'il reste le même.

Veut-on dire : Dieu ne peut pas créer des Etres pensants qui trouvent laids ces mêmes objets que tous les hommes trouvent beaux ? Nous avons prouvé le contraire. Enfin veut-on dire : Dieu par sa nature & nécessairement trouve beaux certains objets ? Cette proposition me semble téméraire, d'autant plus qu'on ne sauroit, sans tomber dans un Anthropomorphisme grossier, attribuer à Dieu des sentiments semblables à ceux que nous éprouvons.

Je conclus, sans être Pyrrhonien, *que tout ce qui plaît, est beau par rapport à ceux qui le jugent tel ; & par conséquent que, dès-là qu'il cesse*

(*) Ib. pag. 42.

cesse de plaire, il cesse d'être beau pour eux; & que l'aptitude à exciter en nous une espece déterminée de plaisir, est *la qualité dont le terme beau est le signe.* Elle se trouve dans tous les Etres que nous appellons beaux: elle n'est pas du nombre de celles qui constituent leur différence spécifique: c'est celle dont la présence les rend tous beaux, dont l'intensité différente les rend plus ou moins beaux, dont l'absence les fait cesser d'être beaux, qui ne peut changer de nature sans faire changer le beau d'espece, & dont la qualité contraire rendroit les objets les plus beaux désagréables & laids; celle, en un mot, par qui la beauté commence, augmente, varie à l'infini, décline & disparoît. (*)

(*) Les caracteres de la qualité qui constitue le *beau*, sont tirés du Dict. Encycl. art. *Beau* pag. 176. v. I. L'Auteur, au lieu d'*intensité*, dit *fréquence* ou *rareté*: mais il me semble qu'une qualité est susceptible de plus ou de moins d'intensité différente de degrés, non de fréquence & de rareté.

Ce que j'ai dit au sujet du bon & du beau se rapporte à mes définitions & à l'usage le plus commun des langues vivantes, & surtout de la langue françoise. Il en étoit autrement de la langue grecque, si l'on en juge par deux passages qui se trouvent dans les choses mémorables de Socrate écrites par Xenophon Livre 3. & 4 On demande (Livre 3) à Socrate s'il connoît quelque bonne chose; il répond: *s'agit-il de quelque chose qui soit bonne contre la fievre, le mal des yeux, la faim?* Socrate ici confond le *bon* avec l'*utile*, & il l'avoue (Livre 14. Traduction de Chaperonien pag. 213 & 214. Edition de l'Honoré à Amsterdam 1745) où il conclut que ce qui est *profitable est un bien.* Socrate dit expressément (Liv. 3. pag. 139.) *que le bon & le beau* ne sont *pas différens*; que *les choses qui sont belles sont bonnes aussi en même tems*; & (pag. 214) que *tout ce qui a quelque usage est réputé beau, eu égard à la chose à quoi cet usage se rapporte.*



DISCOURS
SUR LA
SENSIBILITÉ POUR AUTRUI.(*)
PAR M. TOUSSAINT.

La sensibilité dont je veux parler n'est pas cette perfection dans les organes, qui fait qu'un homme est aisément affecté par les plus légeres causes externes. C'est à la vérité un don heureux de la Nature: plus on est sensible, plus on existe. La femme de Loth convertie en sel, & la fille de Pénée métamorphosée en laurier, ne perdirent leur existence que par l'extinction qui se fit en elles de toute sensibilité. Mais ce n'est pas cette disposition à sentir vivement pour soi-même qui manque à la plûpart des hommes; elle n'est au contraire que trop commune & trop forte; c'est précisément à la modérer qu'il faut apporter ses soins.

Je veux parler au contraire de cette sensibilité pour les autres qui nous fait partager les sentiments dont nous les voyons affectés. Souvent la premiere nuit à celle-ci: à force d'être sensible pour soi-même, on ne l'est point pour les autres; ou bien on l'est si foiblement qu'on reste dans l'inaction par rapport à eux.

Comme la sensibilité considérée par rapport à nous-mêmes a deux objets, le plaisir & la peine: il faut que celle qui nous intéresse pour les autres ait les mêmes par rapport à eux. Ce n'est pas assez de pleurer avec ceux qui pleurent: il faut rire avec ceux qui sont dans la joie. Des deux devoirs qu'elle nous impose c'est le plus agréable, & ce

(*) Prononcé dans la séance publique du 4 Juin 1767.

ce n'eſt pourtant pas le plus facile à remplir. Je ne ſai pourquoi nous nous affectons plus ſenſiblement de la peine d'autrui que de ſes plaiſirs.

Ne feroit-ce pas que la crainte du mal étant plus active ſur nous que le goût du plaiſir, le ſpectacle de l'un ou de l'autre porté hors de nous y garde la même proportion, dans un degré plus foible d'intenſité? La peine des autres nous émeut encore un peu l'ame, à peu près comme feroit une ſcene de douleur repréſentée ſur la toile: mais leur félicité n'eſt plus un objet aſſez touchant pour nous remuer; elle ne fait guere que nous amuſer, comme pourroit faire un Tableau de Teniers ou de Boucher. Il faut même, pour qu'elle produiſe ce léger effet, qu'elle trouve des cœurs humains & bienveillans; car elle feroit le tourment d'une ame envieuſe. La peine d'autrui nous affecte, parce qu'elle nous rappelle la ſenſation douloureuſe qu'elle nous cauſeroit ſi nous la ſouffrions en perſonne. Le naufrage ou la chûte de quelqu'un nous fait frémir par un retour ſur nous-mêmes: mais le plaiſir qu'un autre reſſent ne nous laiſſe ſouvent qu'un vuide dans l'ame, à quoi ſe joint plus ſouvent encore le regret de ne pas jouir du même bonheur.

Je voudrois que la félicité de nos ſemblables en fût auſſi une pour nous; je voudrois même que notre imagination, qui aime les objets rians, fît des excurſions dans tous les endroits où nous connoiſſons des heureux; qu'elle ſavourât bien toute la douceur de ces ſpectacles charmans, & revînt nous les peindre en couleurs gaies. Ce feroit ſans doute pour de belles ames une ſource féconde de plaiſirs.

Et ne croyez pas que ces joies excitées par la vûe du bonheur d'autrui ſoient des chimeres tirées des régions fantaſtiques d'une métaphyſique alembiquée: vous les éprouvez s'il arrive à votre fils, à votre amie ou à votre ami, quelque événement agréable.

J'ai vû la tendre Eugénie conduire à l'Autel de l'hymen Aglaé ſa fille unique, toute brillante de jeuneſſe & de beauté. Sur le front virginal de celle-ci, où l'albâtre & le carmin fondus enſemble formoient une tendre rougeur, on liſoit tout à la fois, les douces allar-

mes d'une pudeur inquiete, & les feux décens d'un amour honnête. Pour Eugénie, on voyoit éclater dans ses traits une sérénité sans nuage, une satisfaction pure & sans mêlange. Tout ce que sentoit sa fille, (à cet embarras près qu'éprouve une beauté novice au moment d'être abandonnée à un Epoux,) elle le sentoit elle-même. Le mariage d'Aglaé lui rappelloit l'image du sien, & lui en retraçoit toutes les scenes galantes. On eût dit que rajeunie par quelque charme secret elle fût revenue à l'âge heureux où elles se passerent, tant l'acquisition d'un gendre aimable avoit répandu sur son visage, de fraîcheur & d'enjouement.

Etendez donc la sphère de votre affection au de-là du cercle étroit de vos proches: & le reflet du bonheur d'autrui viendra de plus loin apporter à votre ame sensible des plaisirs touchans.

C'est cette sensibilité active, celle qui nous intéresse pour les autres, que j'ai dessein de réveiller dans les ames: c'est celle-là qu'il faut accroître aux dépens de l'autre, qui ramene à nous toutes nos sensations. Quoi qu'il puisse en coûter pour soulager autrui, on doit s'oublier soi-même si le mal dont il gémit est plus cuisant que l'effort qu'il faudroit faire pour le soulager. Il faut savoir risquer une égratignure pour sauver à un autre un coup de poignard.

Je me propose, premierement, de montrer quels sont les vices de l'ame qui en repoussent la sensibilité? secondement, d'examiner par quels moyens on pourroit l'y réveiller & l'y maintenir?

PREMIERE PARTIE.

Pour remplir mon premier objet, je partage en classes les hommes insensibles, à raison des causes qui produisent en eux cette insensibilité.

La premiere, qui est de beaucoup la plus nombreuse, embrasse toutes ces ames vaines chez qui le sentiment ne sert qu'à les avertir de ce qui les touche, sans les porter jamais à s'intéresser aux autres.

Ce

Ce sont des especes d'Egoïstes qui regardent tout ce qui est hors d'eux-mêmes comme n'existant pas, ou qui du moins trouvent leurs semblables d'une si petite conséquence en comparaison d'eux, qu'autant vaudroit qu'ils en méconnussent l'existence. Vous jugez bien que des hommes tombés dans cette ivresse ne s'inquietent pas si quelqu'un dans le monde souffre de douleur ou de besoin, comme vous ne vous inquietez pas vous-même si parmi les mites ou les pucerons quelques-uns sont incommodés ou à jeun.

Cette classe est de toutes les conditions: il y a tant de gens qui sont vains sans savoir pourquoi! En voici une qui est restrainte à un des ordres de l'Etat.

Il y a, dans la plûpart des pays policés, un ordre d'hommes qui se croit l'élite du genre humain, parce que de vieux titres attestent que quelques-uns de leurs ancêtres ont autrefois servi l'Etat utilement. Si par malheur on n'a pas mis dans ces têtes-là, dès leur enfance, quelques grains de Philosophie ou de raison, ce qu'on y met fort rarement, leur cavité vuide se remplit de vent: elles se bouffissent, elles se boursoufflent. Ces êtres soi-disants distingués par le hasard de leur naissance, que la coquetterie des meres a souvent rendu équivoque, se signalent encore par un mépris insultant pour quiconque ne porte pas un de ces noms fameux qu'ils traînent. Quoique mortifiés de temps à autres par des disgraces, par des taches, par des flétrissures, ils ne rabattent rien pour cela de leur fastidieuse arrogance; ils sont assez grands Seigneurs pour n'avoir pas besoin d'être gens de bien. Ils semblent être persuadés que la sublimité de leur rang couvrira de son ombre leurs lâchetés & leurs bassesses.

Ils auront beau vous savoir instruit de cent forfaits qui les deshonorent, ils viendront encore avec autant d'imprudence que d'impudence, vous outrager en face par leurs fastueux dédains. Affublés de titres & de dignités, qu'ils avilissent, ils croyent stupidement que les honneurs suppléent à l'honneur.

La saine partie de la Noblesse, celle qui tient de ses peres, outre la naissance, des sentimens magnanimes; & de son éducation, des manieres douces & obligeantes, ne me saura pas mauvais gré de ma sortie contre cette ivraie qui la fait rougir: on voit bien que ce n'est pas le corps que j'attaque, mais ceux de ses membres qui sont gangrenés. Je veux par ce tableau qu'on sente la nécessité d'une bonne éducation; article qu'on néglige trop, & qui est pourtant ce qui établit la différence entre un galant homme & un sauvage. Il n'y a pas plus de vices innés que de vertus innées: il y en a plutôt moins; car l'homme apporte dans ce monde plus de goût pour la vertu que de penchant pour le vice: ou, s'il y a des vices nés avec l'homme, ce sont au moins des phénomenes rares. Il est bon qu'on soit persuadé de cette vérité: l'opinion contraire endort les gens dans leur dépravation & les rend irréformables.

Mais, pour revenir à ces Nobles tarés, dont la conduite dément l'origine, & en faire l'application à mon sujet; c'est chez eux que se trouve portée à son comble cette estime exclusive de soi-même qui produit l'insensibilité pour autrui; estime de soi-même d'autant plus déraisonnable qu'elle ne porte sur aucun mérite personnel. Il vaudroit mieux encore qu'un homme fût vain d'une qualité qu'il auroit, ou seulement qu'il croiroit avoir; parce qu'au moins les parties en quoi il reconnoîtroit n'être pas éminent, le pourroient rendre jusqu'à un certain point modeste & traitable. Mais dès qu'une fois un homme a l'esprit assez gâté pour s'estimer outre mesure à propos de rien, c'est un travers qui ne peut plus être ni redressé ni dissimulé.

Une seconde espece d'hommes à qui l'insensibilité pour autrui est encore toute naturelle, ce sont les hommes nouveaux, les parvenus, ces enfans gâtés de la Fortune, qui ayant enfilé adroitement quelqu'un des sentiers secrets qui menent à l'opulence, & aux grands emplois, y sont arrivés si-vîte & si-tôt, qu'ils en sont les premiers surpris: mais leur étonnement ne dure pas, ils présument, puisqu'ils ont fait leur chemin, qu'ils le devoient faire. Ils ne se connoissoient pas des

talens

talens supérieurs: mais c'étoit apparemment la modestie qui les leur cachoit. A présent ils jugent d'eux-mêmes par leurs succès: ils rougissent du néant dont ils sont sortis, & en rougissent de si bonne foi qu'ils voudroient le cacher à tout l'univers. Pour y réussir ils commencent par se le dissimuler à eux-mêmes; semblables à de certains animaux qui, quand ils se sont blottis, la queue en dehors, derriere une motte ou dans un trou, se croyent à couvert, parce qu'ils ne voyent plus leur ennemi. Leur grande crainte est d'être reconnus par ceux dont ils ont été les égaux; & leur premier soin est de s'en tenir éloignés. Ils voudroient bien que ces gens-là n'existassent pas: c'est être fort loin de prendre part aux circonstances bonnes ou mauvaises qui accompagnent leur existence. Ils sont d'ailleurs dans une extase qui ne leur laisse goûter que les ravissements de la jouissance. Jupiter dans les bras d'Alcmene laissoit sans doute à Mercure le soin du monde. De plus ils sont orgueilleux à leur maniere; & leur maniere est de l'être à l'excès. Or j'ai déjà observé que l'orgueil étouffe la sensibilité: il n'y a sorte d'indignités qu'il ne fasse commettre. On a raison dans les moralités pieuses d'en faire la source de tous les péchés. La férocité, toute barbare qu'elle est, n'en engendre pas tant: mais elle a de commun avec l'orgueil qu'elle produit aussi l'insensibilité pour autrui.

Représentez-vous ces foudres de guerre dont l'imagination échauffée par les Furies ne se repaissoit que de batailles, de sieges, d'attaques, de dévastations; qui mesuroient leur grandeur à la quantité du sang qu'ils avoient versé, au nombre des villes qu'ils avoient prises ou incendiées, des provinces qu'ils avoient conquises ou ravagées; ces barbares endurcis contre les cris des blessés & des mourans, instrumens funestes de famine, de peste & de carnage; brigands décorés du titre de Princes, assassins plutôt que guerriers: pensez-vous qu'il y eût dans la nature quelque situation assez touchante pour les attendrir? Ou croyez-vous que leurs cœurs farouches fussent propres à se laisser égayer par une fête champêtre, à goûter les joies pures de l'innocence & de la vertu? Affreusement dénaturés, il ne leur restoit

 de

de l'homme que ce qu'il a de commun avec les bêtes, des ſenſations impérieuſes, qu'ils contentoient à tout prix; inſuſceptibles d'idées morales, foulant aux piés l'honnêteté, la juſtice, le droit naturel. Puiſſe cet horrible tableau n'être applicable qu'aux ſiecles paſſés!

Une autre claſſe de gens inſenſibles ce ſont les petites ames, qui n'éprouvent auſſi qu'en petit les ſentimens qui remuent puiſſamment les autres. On n'imagineroit pas qu'un caractere qui eſt l'antipode de la férocité pût produire à peu près le même effet par rapport à la ſenſibilité. Cependant c'eſt une choſe démontrée que tout ce qui s'appelle ſentiment gliſſe ſur les ames frivoles. Il n'y a que leur ſuperficie qui ſoit ſenſible, & elle ne l'eſt qu'au chatouillement; il ſemble qu'elles n'ayent été formées que pour le plaiſir, & même pour le plus léger: elles n'ont jamais éprouvé en aucun genre une impreſſion forte ou profonde.

Parmi ces différentes claſſes d'hommes inſenſibles, les uns affichent l'inſenſibilité, & en font trophée; tels ſont les ſuperbes & les féroces: d'autres jouent l'attendriſſement; la ſenſibilité vient quelquefois figurer ſur leurs levres, mais elle ne pénetre pas juſqu'à leur cœur.

„Eh bien oui, dit Apathine, dont la ſœur eſt près de périr d'u-„ne eſquinancie qui la ſuffoque, ma ſœur eſt dans un état qui m'arra-„che des larmes. Peut-être voudroit-on que je reſtaſſe auprès d'el-„le: mais cela eſt plus fort que moi, je ſouffre trop de la voir ſouf-„frir; j'ai quitté la place, je n'y tenois pas; & ſi Philidor dont vous „connoiſſez les prévenances, ne m'eût emmenée faire un tour ſur la „chauſſée, j'en aurois, à l'heure que je vous parle, une migraine af-„freuſe. C'eſt mon foible à moi, je ne puis pas reſter auprès d'un „malade. Ceux qui ne ſentent rien ſont bien heureux.“ Maxime horrible, que je ne pardonnerois pas à un Cannibal.

Cléobule voit par la portiere de ſon char doré un malheureux dont tous les membres ſont briſés d'une chute qu'il vient de faire de ſoixante piés de haut. Un cercle de petit peuple l'entoure; ils s'empreſſent

ſent à le ſecourir; inutilement peut-être, mais au moins ils s'empreſſent. „Comment, dit Cléobule, cette canaille-là a-t-elle la dureté „de ſoutenir un pareil ſpectacle? Je n'ai fait que l'entrevoir en rou-„lant; & j'en friſſonne. Il y a des gens qui ont un cœur de fer;" & là-deſſus il fait doubler le pas à ſes courſiers.

Alfrid apprend à Lyſimon la ruine totale d'un de ſes amis de jeuneſſe, qui de millionaire qu'il étoit eſt tombé dans la plus affreuſe diſette. „Il eſt, lui dit-il, ſeul & tourmenté par la gravelle & la „goutte dans une chambre nue, de huit piés en quarré, où perſonne „ne s'informe de ſa ſituation ni de ſes beſoins. Si vous l'y alliez viſi-„ter, vous lui ſembleriez un Ange deſcendu du Ciel pour le ſoulager."

„Voilà, répond Alfrid à Lyſimon, comme penſent & parlent „ceux qui n'ont point de délicateſſe. Vous iriez apparemment ainſi „de but en blanc, voir un ami malheureux, ſans vous inquiéter s'il „pourra ſoutenir votre vue, & ſi vous pourrez ſoutenir la ſienne. Eh „bien, Lyſimon, je ne ſuis pas, moi, de ces officieux indiſcrets qui „vont jouir cruellement de l'humiliation d'un galant-homme, & le mor-„tifier par l'étalage accablant de leur opulence: je croirois lui porter le „coup de la mort. Comment a-t-on le front de paroître riche devant „un homme ruiné! Allez-y vous-même, ſi vous voulez, vous êtes le „maître; pour moi, c'eſt la derniere choſe que je ferois.

Voilà tous gens affectans de beaux ſentimens, qui ſous l'ombre d'avoir le cœur tendre ont les procédés très-durs.

Je ne mets pas au nombre des hommes inſenſibles ces mortels dévoués au malheur, en qui l'extrême accablement a émouſſé tout ſentiment pour autrui: c'eſt une paralyſie momentanée qui affecte leur ame; ce n'eſt pas là un vice, c'eſt une maladie. Vous devez-vous attendre que quelqu'un qui eſt abîmé dans la douleur partage vos plaiſirs ou vos maux? Pour vos plaiſirs, il n'a garde d'y prendre part: le contraſte d'un homme heureux ajoûte un ſurcroît d'amertume à celui qui ſouffre. Quant à vos peines, le moyen qu'il y compatiſſe? Sa

 ſen-

ſenſibilité eſt épuiſée pour lui-même: quelles qu'elles ſoient, votre ſort lui paroîtra encore digne d'envie.

Vous avez connu ce brave Commandeur, autrefois la terreur des Muſulmans, & les délices des Sociétés: à préſent chargé de chaînes, il paſſe ſes jours près d'Andrinople à porter des briques pour un maître dur & inhumain, qui l'accable d'opprobres, & l'excede de violences. Renfermé le ſoir dans un affreux bagne, il y mange, en ſanglottant, un peu de pain noir, que les chiens ne daignent pas lui diſputer; & couché la nuit ſur une natte ſale & dure, il y appelle à grands cris la Mort, qui lui refuſe ſon fatal ſecours. Voudriez-vous qu'en cet état il ſe tourmentât de ce que vous aurez eu deux accès de fievre?

Ce beau vers que Virgile met dans la bouche de Didon

Non ignara mali miſeris ſuccurrere diſco,

Mes malheurs m'ont appris à ſentir ceux des autres,

ne doit s'entendre que des malheurs qu'on a éprouvés, mais non pas de ceux qu'on éprouve actuellement, ſurtout s'ils ſont extrèmes. Il eſt avantageux à tous égards d'avoir été malheureux, mais il eſt fâcheux de l'être.

J'y mettrois preſque (au nombre des hommes inſenſibles) une eſpece équivoque, qui a le premier mouvement du ſentiment, mais qui, par la crainte de ſentir trop vivement, ſe hâte de ſe diſtraire, & écarte avec ſoin de ſon idée tous les objets fâcheux ou attriſtans.

Agathias entend des cris de douleur qui lui déchirent l'ame: il eſt né ſenſible, il a les nerfs délicats; il craint que l'objet vû de près ne l'affecte plus péniblement encore; il s'éloigne précipitamment. Funeſte effet de la molleſſe! Que n'étoit-il un peu moins ſenſible ou plutôt que ne l'étoit-il un peu davantage! S'il eût ſuivi cette voix plaintive dont les éclats touchans imploroient fortement ſon aide, il eût arraché un malheureux au fer de ſes aſſaſſins.

Me-

Mélite ne peut pas voir couler le ſang, ni regarder une bleſſure: c'eſt la vérité, ce n'eſt pas une ſimagrée de jolie femme: mais elle s'eſt trop livrée à cette répugnance naturelle; il la falloit combattre, elle l'auroit vaincue, & ſauroit à préſent fermer une plaie & la bander.

Je veux pour un moment admettre comme ſinceres les excuſes de ces hommes puſillanimes qui craignent que la peine d'autrui ne leur cauſe une douleur trop vive. Mais cette douleur, il ne faut pas qu'ils cherchent à ſe l'épargner: c'eſt préciſément l'aiguillon que la Nature a imaginé, & dont ils ont plus beſoin que d'autres, pour les exciter à la bienfaiſance. C'eſt par la douleur qu'elle nous avertit de ſonger à nous conſerver. S'il ne nous étoit jamais arrivé de connoître par épreuve la ſouffrance de la brûlure, nous nous précipiterions dans les flammes auſſi légerement qu'une mouche ou un papillon.

C'eſt auſſi par la douleur que nous cauſe la ſouffrance des autres qu'elle nous avertit du ſecours que nous leur devons. Nous la trahiſſons, nous contrarions notre inſtinct, ſi nous réſiſtons à cette impulſion bienfaiſante.

La Nature nous veut humains, mais non pas foibles; car ce n'eſt pas la foibleſſe qui engendre l'humanité: on ne ſauroit croire au contraire combien elle a fait commettre de cruautés. C'étoit, dit M. de Voltaire, par foibleſſe que Charles IX fuſilloit de ſa fenêtre ſes propres Sujets. Ce fut par foibleſſe qu'Henri III fit aſſaſſiner le Duc de Guiſe; & Louis le *Juſte* le Maréchal d'Ancre. Ce fut par foibleſſe que le Parlement de Paris, qui n'avoit pas été appellé à l'aſſaſſinat de Concini, fit brûler ſa malheureuſe Veuve.

SECONDE PARTIE.

J'ai ſpécifié les cauſes de l'inſenſibilité: je paſſe aux remedes; j'indiquerai même un préſervatif.

Si les hommes naiſſoient avec le vice de l'inſenſibilité, il ne ſeroit gueres vraiſſemblable qu'on les en pût guérir; on ne refond point la

Nature; on ne fait que pallier ou mitiger les défauts qu'on tient d'elle. Mais ce n'est point de la Nature qu'on tient l'amour excessif de soi-même, l'orgueil, l'ivresse du bonheur, la férocité dans le caractere, & le goût pour les choses frivoles, d'où j'ai dit que résultoit l'insensibilité. Ce sont tous défauts qu'on puise dans l'éducation, dans les usages, les mœurs du pays, la forme du gouvernement, les suggestions, les mauvais conseils, & l'exemple. Il n'y a peut-être pas un homme sur cent mille qui soit né assez décidément vicieux pour qu'avec des soins & de la culture on n'eût pas pû en faire un modele de vertu. Et ce qu'enseigne la Théologie sur la dépravation causée par un péché d'origine ne nous force point à croire que tel ou tel vice en particulier soit une suite de ce péché; car, comme on le suppose commun à tous les hommes, si les vices qui regnent parmi eux en étoient des suites, tous les individus de l'espece humaine auroient les mêmes, portés dans tous au même degré d'intensité, ce que l'expérience dément, les vices & les travers des hommes différant autant que les traits de leurs visages. Il est donc constant, aussi bien dans le systême du Christianisme, que dans l'ordre civil, que les hommes qui se trouvent être méchants ne le sont point de naissance; qu'ils ne le deviennent communément que par des causes accidentelles auxquelles on auroit pû parer; & que même, lorsque le germe d'un vice a commencé à percer, on auroit pû l'étouffer dabord.

Prenons pour exemple d'un avantageux qui ne sent rien pour les autres, parce qu'il rapporte tout à lui, l'orgueilleux Philautès, cet homme dosé d'un amour propre si excessif, qu'il imagine bonnement que toutes les créatures, même celles de son espece, ont été faites pour sa plus grande commodité. Il diroit volontiers, ma Lune, mon Soleil, mes hommes. Tout ce qui le gêne ou le contrarie lui paroît de trop dans la Nature; il s'en irrite, il s'en aigrit; & ne pardonne leur existence qu'à ceux qui rampent humblement à ses piés. Des rivaux, des concurrens, des compétiteurs sont pour lui des Etres dont il ne peut digérer l'idée: avec les perfections éminentes qu'il se connoît,

est-

est-ce qu'il y a quelque chose dans le monde qu'on doive lui contester? Il donne ses prétensions pour des droits, & ses mécontentemens pour des griefs. La maison d'un voisin borne sa vue: il croit que le voisin a tort de laisser cette maison sur pié. Il voudroit aggrandir son parc: dès-lors les paysans n'ont rien de mieux à faire que de venir mettre leurs terres à sa merci. Il prend pour son domaine tout ce qui l'entoure, en quelque lieu qu'il se transporte; ainsi qu'une planete, dans son cours, garde autour d'elle un tourbillon d'air qui ne la quitte pas. Il étend même son atmosphere fort loin.

Eh bien, l'homme instruit par la Nature n'est point fait comme Philautès. Il sait qu'il manque de tout, qu'il a besoin de tout le monde, que personne ne lui doit rien; qu'il n'acquiert des droits aux bons offices de ses semblables que par ceux qu'il leur rend lui-même; que la société humaine est un commerce, d'où chacun ne retire qu'à proportion de ce qu'il y met. Qui donc a pû étouffer dans son ame ces principes sages & raisonnables qui ont dû s'y trouver comme dans toute autre ame? O richesses pernicieuses, poison des mœurs! vous les infectez avant que l'homme sache penser. Philautès étoit né dans le sein de la fortune; & tout ce qui l'a entouré, prosterné devant l'idole, l'a enivré d'un encens mortel, d'une mixtion fumeuse de louanges, de cajoleries, de prévenances & d'adulations. Parens, Gouverneurs, Domestiques, tout s'est ligué pour le déifier. Qu'en résulte-t-il? Qu'il est indigne même du nom d'homme.

Si au lieu d'efforts redoublés pour éteindre en lui les sages inspirations de la droite raison, on eût employé des soins ordinaires pour les cultiver & les mettre à profit: Philautès n'étoit pas pire qu'un autre: il seroit l'ami des hommes, il prendroit part à leurs plaisirs, compatiroit à leurs peines, & se tiendroit pour très-honoré de mériter par sa bienfaisance leur estime & leur amour.

Pour ces Nobles à principes ignobles, qui se reposent sur les titres de leurs maisons, comme sur un oreiller commode, où leur fastueuse

tueuse indolence dans une molle inaction se croit acquittée par les exploits de leurs peres, de tous les devoirs de la société: on ne mettra pas sans doute leurs chimeres orgueilleuses sur le compte de la Nature. La Nature songeoit-elle à créer des Nobles; ou du moins la Nature approuvoit-elle que le mérite du pere fût imputé au fils?

Dans les premiers siecles du monde, c'étoit uniquement par les services rendus à la patrie ou au genre humain qu'on acquéroit la noblesse, ou la célébrité, ce qui alors étoit la même chose. Le fils d'un Héros, s'il n'avoit pas hérité de l'héroïsme de son pere, retomboit dans l'obscurité; on ne brilloit que de son propre lustre. Aucun charme, aucune illusion, ne pourra faire entrer dans une tête saine qu'un nain issu d'un colosse en soit plus grand. L'instinct dans les esprits les plus simples repousse cette absurdité.

L'orgueil d'un Noble n'est donc qu'une extravagance suggérée par des corrupteurs. Il falloit au contraire lui inculquer que son origine grossissoit & multiplioit ses devoirs; que plus elle étoit illustre, plus il seroit avili s'il y dérogeoit; que ses parchemins n'autorisent point la licence dans la conduite, le mépris des loix & de la magistrature, l'oppression, la violence, & le débordement des mœurs. Avec de pareilles maximes, gravées profondément dans son ame, un Noble n'en seroit que plus porté à la bienfaisance.

Ce ne sont pas là sans doute les leçons qu'on a données au jeune Phorbas, ce petit Etre destitué de toutes qualités morales, qui guindé sur le dos d'un coursier où il passe sa vie, pour n'être pas au niveau du commun peuple, qui marche à pié, porte sans cesse le nez au vent, qui évite l'été les promenades publiques, parce que la roture qu'il appelle canaille se promene aussi; qui pourtant, lâche parasite, va flairer les tables d'hôtes, où il ne paye son écot que par de froides bouffonneries; qui trompe au jeu, qui même ailleurs filoute quand il peut; qui déchire l'honneur des absents, parce que l'honneur lui fait ombrage; qui quelquefois même insulte aux présents; mais qui, dès qu'ils froncent

cent le sourcil, leur demande humblement quartier; tour à tour hautain & rampant, glorieux & lâche, audacieux & poltron.

Cependant, qui le croiroit? Il y avoit dans la trempe de cette ame de quoi faire un honnête homme, peut-être même un homme aimable. Pour lui dénaturer le cœur, il a fallu lui gâter l'esprit. Dans les pervers c'est le plus souvent par la tête que la dépravation a commencé.

Chrysalde est devenu riche en une campagne, aux dépens de 200 mille hommes. On diroit que ce qu'il a soustrait en quantité & en qualité à leurs vivres & à leurs médicamens, converti pour lui en sucs nourriciers, ait contribué à lui former une corpulence énorme & une face monstrueusement large. Bientôt sa peau ne suffira pas à contenir son embonpoint; & son embonpoint semble s'accroître par l'enflure de sa vanité: il en est boursouflé comme un balon. On enfonceroit la pointe d'un dard dans ses chairs pleines & rebondies sans qu'il en sentît la piquure. Il est dans le moral comme dans le physique: son ame perdue dans la graisse, pourvû qu'on ne touche point à ses coffres, est inaccessible au sentiment; bien moins encore éprouveroit-il quelque sensibilité pour autrui; il a fait ses preuves de dureté. Cependant, tout dur qu'il est, qu'on l'eût prémuni de bonne heure contre l'amour excessif du gain, qui est son vice favori, c'eût été un homme tout aussi sensible qu'un autre. On feroit des Saints de tous les gens en place si on leur ôtoit la soif de l'or: de mille excès qu'on leur voit commettre, dit M. Marmontel dans son Bélisaire, à peine y en a-t-il un qui ne soit pas le crime de l'avarice.

A son portrait vous reconnoitrez certain Commandant farouche & hautain, dont la voix est un tonnerre toujours grondant. Tous les sons qui sortent de son gosier rauque sont des menaces, des juremens, ou des arrêts meurtriers. La clémence est pour lui un mot vuide de sens; il n'a jamais pardonné. Que dis-je pardonné? il n'a jamais puni modérément. C'est un Bourreau paré du titre de Général, qui

chaîne, je ne dirai pas de sang-froid, mais avec joie & complaisance. Les cris douloureux, l'affoiblissement, la défaillance même du patient n'effleurent pas son cœur durci : il tient ferme même au moment où le malheureux succombe sous les coups. Vous aurez peut-être peine à imaginer qu'un pareil homme ne soit pas né méchant : mais vous le pourrez concevoir si l'on vous apprend par qui & comment il a été élevé. Les valets du logis ont commencé son éducation, & les Sergens du corps qu'il commande y ont mis la derniere main. Un Mentor prudent n'en auroit pas fait aisément un galant-homme : mais il auroit peut-être empêché qu'il ne fût un monstre. Il n'y a point de métamorphose de mal en bien que ne puisse opérer sur un sujet pris dès l'enfance, la direction d'un guide sage & intelligent : il n'y en a pas non plus d'impossible, de bien en mal, à des pervers qui s'emparent des premieres années d'un enfant bien-né.

Je ne sais même si, en prenant au sortir du berceau la jeune Nugatine, à qui la Nature semble avoir donné pour cervelle un fluide exalté qui s'évapore comme l'esprit de vin, on n'auroit pas pû en faire une tête solide & un cœur sensible. Par une suite naturelle de son éducation, elle aime la danse, les petits jeux, les spectacles gais; elle chansonne, rit, folâtre, fait des mievreries & déraisonne du matin au soir. Amusez-la, vous serez son Dieu. N'allez pourtant pas vous aviser de l'aimer : cela tourne au sérieux : vous voudriez peut-être du retour. Une passion en regle n'est pas son fait. Vous la pourrez en revanche contrarier, plaisanter, lutiner; elle entend raillerie. Gardez-vous seulement de lui donner des conseils, ou de lui faire des remontrances : les vapeurs la gagneroient aussitôt. Avec toute sa gaieté elle ne laisse pas d'avoir des momens d'humeur; nul n'y est plus sujet que les personnes gaies. Si vous ne les tenez pas sans cesse dans l'étourdissement d'une joie extravagante, elles retombent au fond d'elles-mêmes, attristées & anéanties; semblables au volant, qui n'a de jeu & d'activité que tandis qu'il est en l'air. Vous voyez bien que Nugatine, avec ce ton de légereté, n'a pas une ame faite pour s'occuper

du

du malheur ou de la félicité d'autrui. On en a fait mille épreuves: rien ne lui va jusqu'au fond du cœur. Elle a perdu, Pere, Mere, Tante, & je ne sai combien d'autres parens: elle n'a paru s'en appercevoir que par les soins qu'elle a donnés à ses ajustements de deuil. Comme le noir lui alloit! elle en étoit extasiée. Contez-lui des pestes, des meurtres, des assassinats, des massacres, des inondations, des incendies; ajoutez-y, si vous voulez, le tremblement de Terre de Lisbonne & celui de Constantinople, avec toutes les scenes d'horreur imaginables; elle vous répondra, Robes, Rubans, Coeffures, ou se récriera sur la beauté de l'Opéra comique qu'elle vit hier.

Les soi-disants hommes, connus sous le nom de Petits-maîtres, n'ont pas plus de solidité: notre sexe a ses *Nugatins*: ce sont des poupées de forme masculine, qu'il semble que la Nature, comme pour se jouer, ait animées exprès d'une ame sensible de la plus petite espece.

Mais ces poupées auroient été des hommes si l'on eût voulu; & ces hommes nés à Lacédémone auroient été des Spartiates. Je ne saurois trop le redire, il n'y a aucun pli, bon ou mauvais, qu'on ne puisse faire prendre à l'ame dans l'âge où elle est encore souple & flexible. On auroit donc pû, dans l'enfance, empêcher d'éclorre les vices qui s'opposent à la sensibilité pour autrui: mais, comme ce n'est pas assez pour faire réussir une plante, que d'en écarter le cailloutage & les ronces, mais qu'il faut de plus préparer la terre qui en contient les germes; on doit de même accoûtumer l'ame de bonne heure à la sensibilité; & voici, je crois, la maniere de le faire avec succès.

Sans aller fouiller pour cet effet au fond de la Métaphysique, suivons simplement la Nature: elle nous met sur la voie. De tous les animaux qu'elle a créés, on diroit que l'homme soit celui qu'elle abandonne le plus dans les premiers temps qui suivent sa naissance. C'est alors une créature aveugle, infirme, nue & sans soutien. Il a mille besoins auxquels il ne sauroit pourvoir par lui-même. Il a tous les élémens à redouter & ne sait se garantir des injures d'aucun; tous les

dangers à craindre, & ne les peut ni prévoir, ni connoître, ni éviter. L'animal qui est le Roi de tous les autres, seroit-il donc celui que le Créateur auroit le plus négligé? Et Dieu auroit-il pris moins de soin de son image, que d'un volatile, ou même d'un insecte, qui en naissant connoît ses besoins, les cherche & se les procure?

Vous me prévenez, Messieurs, & vous sentez que la Providence a bien mieux pourvû aux besoins de l'homme naissant, en le confiant à des Pere & Mere intelligens, qu'il n'a pourvû à ceux du poulet, en lui donnant des piés, un bec & de l'instinct. De toutes les enfances celle de l'homme est la plus longue, parce que l'enfance est le temps des leçons, & qu'il en faut beaucoup à l'homme. De toutes les croissances celle de l'homme est la plus lente, parce que c'est pendant la croissance seule qu'on le forme avec succès aux divers exercices du corps; & ces exercices sont sans nombre. Or, tant que dure cette période de croissance, l'enfant est, ou doit être, sous l'aîle de ses parens: c'est là l'âge où tous les instans du jeune éleve sont marqués par autant de bienfaits de leur part; ce sont ses Dieux visibles; & c'est de ce commerce perpétuel de bons offices & de reconnoissance que commence à naître la sensibilité. La reconnoissance engendre un amour tendre, on s'intéresse pour la personne aimée; ce sentiment croît avec la raison; & le fils majeur est plus attaché à son Pere que l'enfant impubere. Si ce fils a des freres ou des sœurs, nouvelle matiere à la sensibilité: c'est la main droite qui aide à la gauche, c'est un membre qui seconde l'autre, tous les évenemens domestiques leur sont communs. Tous ces rameaux semblent être entés sur le même tronc; & les tendresses du sang, comme une seve active & abondante, circulent de la tige aux branches, & d'une branche à une autre.

Une nouvelle espece de sensibilité se développe encore dans l'homme lorsqu'il devient susceptible des impressions de la beauté: toutes les facultés de son ame acquierent une augmentation d'énergie; le desir de plaire à l'objet aimé lui fait opérer des prodiges. L'amour a peut-être autant produit d'actions héroïques que la manie de la gloire:

re:

re: il fait plus, il humanise les hommes, les plie aux complaisances, aux égards, aux attentions, leur apprend à se vaincre eux-mêmes; c'est enfin lui qui à tous égards les perfectionne, & leur donne la derniere main.

Le jeune époux, devenu pere, éprouve encore en cette qualité des sentiments dont il n'avoit pas eu d'idée.

L'enfance, le mariage & la paternité sont les trois stages qu'il faut remplir pour avoir fait son cours entier de sensibilité: mais aussi quand on l'a fait avec profit, on a l'ame beaucoup plus accessible à la commisération, au plaisir de voir des heureux & à celui d'en faire; on ne sent plus de volupté aussi touchante que celle-là. Comme on regorge, pour ainsi dire, de sentimens tendres, on en verse la surabondance sur tous les objets dont on est environné: on voit dans toute l'espece humaine, comme une extension de sa propre famille; des peres dans ses bienfaiteurs, ses supérieurs, ses Rois, ses maîtres; des freres dans tous ses égaux: des enfans dans toute la partie de l'espece humaine à qui l'on doit des secours, du support & de la protection. Au contraire, partout où manqueront ces tendresses fondamentales, sur quoi porte toute espece de sensibilité, vous ne trouverez, en quelque circonstance que ce puisse être, que froideur, dédains & dureté.



DE L'INFLUENCE DES BELLES-LETTRES SUR LA PHILOSOPHIE.

PAR M. BITAUBÉ. (*)

Les Savans ne ſe contentent pas de témoigner de l'indifférence & du mépris pour les connoiſſances qu'ils n'ont pas cultivées; afin de s'affranchir entierement de ce travail, & comme s'ils croyoient par-là légitimer leur mépris, ils jugent encore que ces connoiſſances ſont nuiſibles à leur genre d'études. Ainſi ils démentent ce principe qui, dans ce ſiécle, ſemble démontré, & qu'eux-mêmes ne révoquent point en doute, c'eſt que, ſemblables à l'Univers, les Sciences humaines ne forment qu'un ſeul Tout, dont les parties intimément liées, gravitent, ſi je puis ainſi parler, l'une vers l'autre, s'éclairent mutuellement, & malgré la diſtance preſqu'infinie de pluſieurs d'entr'elles, concourent à l'harmonie générale. Quel ſeroit donc le lien que l'on dit unir les Sciences, s'il étoit vrai que l'une retardât les progrès de l'autre, & que, rivales en quelque ſorte, on dût balancer leur pouvoir, & régler leurs limites? Mais, afin de pourſuivre le parallele commencé, n'en ſeroit-il pas ici comme des Cometes, dont la courſe a longtems paru irréguliere, juſqu'à ce qu'enfin on les ait vues aſſujetties à des loix, & faiſant partie du ſiſtême univerſel?

Pour appliquer ces réflexions à des cas particuliers, on a accuſé la Philoſophie de nuire aux Belles-Lettres. L'objet de ce Diſcours n'eſt point de diſcuter cette aſſertion: pour la détruire il ne faudroit peut-être que conſidérer l'ordre chronologique qu'elles ont eu en Fran-

(*) Lû dans l'Aſſemblée publique du 29 Janvier, 1767.

France, où l'on a fait cette imputation à la Philosophie : l'esprit philosophique n'y est devenu général, qu'après que les Belles-Lettres y ont été portées à leur perfection ; dès-lors les grands Génies s'étant saisis du beau dans tous les genres, une certaine timidité s'emparant de ceux qui veulent marcher sur leurs pas, & l'imitation rétrécissant l'esprit, il n'est pas étonnant que l'on apperçoive dans les Lettres une décadence sensible ; il n'est pas plus étonnant que l'on se tourne de tous côtés pour en chercher la cause, & que voulant en quelque sorte se dissimuler sa foiblesse, on la rejette sur les progrès mêmes que l'on a faits dans des genres différens.

D'une autre part, le Philosophe, comme pour venger cette espece d'injure, accuse les Belles-Lettres de nuire à la Philosophie.

Destiné par état à cultiver les Lettres, mais partagé par goût entr'elles & la Philosophie, je voudrois pouvoir les réconcilier, & n'avoir pas à me défier d'elles réciproquement.

Pour cet effet, commençons par jetter un coup d'œil philosophique sur les progrès & sur les écarts de l'esprit humain ; bien loin que les Lettres ayent jamais nui à la Philosophie, nous la verrons en tirer une grande utilité ; à mesure que nous tracerons cette histoire, ce principe s'établira avec plus d'évidence, & ne sera qu'une induction naturelle des faits. Ensuite nous proposerons un petit nombre de raisonnemens propres à présenter la même vérité sous un nouveau jour.

Je remonte jusqu'au berceau de nos connoissances, à ce période où les Langues commencent à se former avec les sociétés. La tradition transmet à la postérité le nom de ses peres & leurs actions les plus importantes. Mais jusque-là rien n'est encore assés frappant pour réveiller le génie. Il faut des révolutions, & elles ne tardent guere à naître. Un peuple voisin vient fondre sur cette société naissante ; on combat ; tout est propre à enflammer la valeur ; les premiers sentimens de la nature regnent avec d'autant plus d'empire qu'ils ne sont point partagés par des intérêts fort différens ; on fait des prodiges pour défendre

fendre sa femme, ses enfans, sa patrie: les Annales s'enrichissent d'évenemens remarquables, & commencent à mériter le nom d'*Histoire*. Je n'examine point si elle est contenue en vers ou en prose; quand ce seroit en vers, ce n'est point là encore de la poésie. *L'Histoire* est donc probablement le premier pas de l'esprit humain; mais il en fait bientôt un second. La Langue se débrouillant d'un chaos barbare, attend & excite les génies qui la doivent mettre en œuvre: l'imagination est frappée des exploits consacrés par l'Histoire: la Poésie nait, & l'on voit alors comme une création nouvelle; la nature semble reproduite par l'imitation; une foule d'idées neuves & frappantes s'élancent en quelque sorte du néant; toutes les images qui s'étoient peintes à l'esprit, tous les sentimens qu'avoit éprouvé le cœur, réveillés à la fois par des images plus grandes & par des sentimens plus intéressans, se rassemblent, si je puis ainsi dire, autour d'eux & contribuent à les embellir. Ainsi, pour le remarquer en passant, c'est à des révolutions que la Poésie doit son origine, &, comme l'expérience & la raison nous apprennent que la guerre, ce fléau qui doit accompagner le genre humain jusqu'à sa ruine & la précipiter, ne tarda point à troubler les sociétés naissantes, c'est la guerre qui enfanta la Poésie, source presqu'également noble & honteuse! La Muse des Herses & de beaucoup d'autres peuples fut d'abord martiale. Les premiers chants d'Homere furent guerriers, & cette origine que j'attribue à la Poésie explique & excuse peut-être les combats éternels qu'il se plait à détailler.

La Poésie étant née ne connut bientôt aucunes limites, & la nature entiere fut l'objet de ses chants. L'Histoire & la Poésie, en un mot les Belles-Lettres, sont donc, pour ainsi dire, le premier rayon que jette l'esprit humain; c'est sa premiere Philosophie. Sans approfondir la nature on commence à la connoître; au sein des images les plus riantes ou des tableaux les plus terribles, naissent les grands traits de la Morale, & même des notions Métaphysiques; les idées du juste & de l'injuste, de notre ame & de la Divinité sont tracées par le pinceau du Poëte avec des couleurs quelquefois confuses, mais souvent aussi très-vives

vives; les relations de pere, d'époux, de fils & d'ami, & les devoirs qu'elles imposent, y sont caractérisées, ensorte que c'est avec raison qu'Horace a dit en parlant d'Homere :

Qui, quid sit pulchrum, quid turpe, quid utile, quid non,
Planius ac melius Chrysippo & Crantore dicit.

Ainsi, dans l'ordre où se développent nos facultés, la Poësie n'est pas seulement un passage qui nous conduit à la Philosophie; elle en jette encore les premiers fondemens: avant que celle-là se soit perfectionnée, les Poëtes furent longtems les seuls Philosophes: ils instruisoient les Nations: Orphée étoit le chantre de la sagesse: on sait quels furent les triomphes de l'Apologue, triomphes que n'a remporté aucun traité de Morale: Socrate, ce pere de la Philosophie, employoit l'Apologue, ou du moins l'imitoit en conversant familierement avec les hommes, & en les conduisant à la vérité par des voies indirectes. Les Lettres, dès leur naissance, furent donc d'une grande utilité à la Philosophie: mais le service le plus important qu'elles lui rendirent, c'est de perfectionner le langage, qui est l'instrument de nos connoissances.

Ici je serai peut-être arrêté par le Philosophe; il niera que les Lettres ayent contribué à la véritable perfection des Langues, & il se plaira même à leur en imputer les défauts. Discutons en peu de mots cette matiere.

Depuis longtems les Philosophes, comme pour se justifier de leurs erreurs, rejettent sur l'imperfection du langage l'abus qu'ils en font. Dans ces derniers tems ils se sont fort occupés du projet d'une langue philosophique; mais avec quelque timidité que l'on doive juger les grands-hommes qui l'ont proposé, j'ose croire que ce projet est à peu près semblable à celui du grand-œuvre.

La premiere difficulté seroit de former cette langue. Qui seroit le Législateur? chacun ne se croiroit-il point en droit d'attacher à tel signe telle idée qu'il lui plairoit? Au lieu que l'usage est ici, jusqu'à un certain point, le maître du Philosophe comme des autres hom-

 mes;

mes; on aime mieux suivre les loix même du vulgaire que celles de ses égaux ou de ceux auxquels on se croit supérieur; les signes ont en grande partie un sens déterminé, ou lorsqu'ils sont vagues, il est au pouvoir du Philosophe de les fixer. Je ne parle pas de la prodigieuse multiplication des signes d'une langue, dont on écarteroit, sans doute, tous les sens métaphoriques, & où les plus petites subdivisions des idées recevroient un nom; ce seroit hérisser d'épines l'entrée de la Philosophie, & semblables en quelque sorte aux Lettrés Chinois, nous passerions une partie considérable de notre carriere à apprendre la langue des Philosophes. Ce projet, quelque ingénieux qu'il soit, n'est-il pas un des abus qui résultent de l'application de la Géométrie à la Métaphysique? Les Géometres ont un petit nombre de signes à cause de la simplicité de leur objet. Il ne pourroit pas en être de même de la langue philosophique, & quels que fussent les signes de cette langue, qu'ils eussent quelque conformité ou non avec les caracteres *algébriques*, il faudroit toujours les multiplier infiniment; ils deviendroient très composés ainsi que les objets de la nature, & de cela seul résulteroient de grands inconvéniens; car autant il est aisé d'attacher un sens fixe à un petit nombre de signes qui représentent des objets simples, autant il est difficile de parvenir, dans le cas contraire, au même but.

Après la formation d'une telle langue la seconde difficulté seroit qu'elle se maintînt. C'est le propre de toutes les langues d'être sujettes à s'altérer, & je ne crois pas que celle des Philosophes eût un autre sort. Attacheroient-ils constamment aux signes les mêmes idées? Dans la dispute n'abuseroient-ils pas des mots sans le savoir, & quelquefois de dessein prémédité? L'usage qu'ils ont toujours fait & qu'ils font encore des langues vulgaires ne prouve-t-il pas mon assertion? Peuvent-ils parvenir à fixer seulement un certain nombre de termes? Chacun d'entre ceux qui bâtissent de nouveaux systêmes, comme s'il ne vouloit pas se servir des matériaux de ses prédécesseurs, ne donne-t-il pas de nouvelles définitions, & n'invente-t-il pas des mots? Si l'on peut établir qu'ayant formé une langue, les Philosophes ne dispute-

roient plus, je croirai mes objections fausses; mais quelque bonne opinion que l'on ait d'eux ainsi que de la langue philosophique, j'ai lieu de penser que personne n'avancera cette proposition.

J'en conclus que l'imperfection du langage est un mal attaché à la nature de l'esprit humain, & que la plûpart de nos disputes viennent encore moins de cette imperfection que de notre ignorance. Les Philosophes qui voudroient inventer une autre langue, imitent ces Médecins imbus de leur art, qui ayant à guérir un mal désespéré, prescrivent de nouvelles recettes, aussi infructueuses que les précédentes. L'instrument de nos connoissances est imparfait sans doute; mais il s'agit de voir si cette imperfection ne dérive pas elle-même des bornes de notre esprit. Sans cela les Philosophes ne parviendroient-ils pas à corriger les langues qui existent?

Cependant, malgré l'imperfection de ces langues, ne peut-on pas dire qu'on y voit un esprit très-philosophique? Il y a une Philosophie naturelle qui a guidé les hommes dans la formation du langage, Philosophie dont la marche est peut-être plus sure que celle de la Science qui en porte le nom: on a raisonné fort juste avant l'invention de la Logique. Si les Métaphysiciens avoient formé une langue, il est plus que probable qu'ils auroient répandu beaucoup de confusion dans les idées: il y auroit autant de langues que de sistêmes différens; car ce n'est pas proprement parler le même idiôme que de ne point attacher aux termes la même signification. Au lieu que les besoins formant le langage, cet édifice s'acheve plus lentement, & n'en est que plus solide. J'en appelle au témoignage de plusieurs Philosophes eux-mêmes, qui frappés de la difficulté prodigieuse de créer les langues telles qu'on les voit exister, n'ont pu concevoir qu'elles fussent l'ouvrage de l'homme seul, & tandis que, dans beaucoup d'autres cas, ils rejettoient l'intervention de la Divinité, ici ils y ont eu recours. Selon eux les langues ne sont donc pas aussi imparfaites que plusieurs le prétendent.

Mais

Mais ne seroit-il pas permis ici de retorquer contre les Philosophes le reproche qu'ils font au vulgaire & aux Littérateurs? Si ceux-ci n'ont pas donné aux langues toute la perfection dont elles sont susceptibles, la Philosophie, qui venant après les Belles-Lettres eût dû corriger ce désordre, ne l'a-t-elle pas au contraire augmenté? Ce n'est point le peuple ni les Littérateurs (surtout lorsque les Lettres ne font que de naître) qui définissent le tems, l'espace, l'infini, l'éternité, la matiere, l'ame, & tant d'autres sujets sur lesquels on trouve autant de définitions différentes qu'il y a de Sectes, définitions qui n'ont pas peu contribué à obscurcir le langage: ce n'est pas le peuple ni les Littérateurs qui ont inventé de ces mots barbares, vuides de sens & qui sans doute n'ont pas enrichi les langues: le peuple & les Littérateurs disputent moins que les Philosophes, &, par conséquent, ils ont moins contribué qu'eux à l'incertitude du langage.

Enfin, en supposant même que les Lettres n'ayent pas amélioré les langues autant que le voudroit le Philosophe, on ne peut renverser l'ordre de la nature; chés tous les peuples la culture de l'imagination & de la mémoire précede celle de la raison; les Lettres ont donc rendu à la Philosophie les services qu'elle avoit droit d'en attendre. Mais tout juge impartial conviendra de l'importance de ces services. Comme ce sont les besoins qui forment les langues, elles devoient être encore assés informes dans l'origine des Lettres; celles-ci achèverent de les perfectionner, de même qu'un grand Musicien améliore l'instrument qu'il touche; elles leur donnerent la richesse, la force, l'élégance, la clarté, la finesse, la précision, la variété des tours, qualités qui sont en partie l'ouvrage du jugement, & qui le secondant à leur tour hâterent la naissance de la Philosophie.

J'ai conduit l'histoire de l'esprit humain jusqu'à la création des Belles-Lettres. Je ne prétends pas qu'elles soient portées tout d'un coup à leur perfection; ce seroit peu connoître la marche de la nature: le génie, ignorant encore le frein des loix, étoit semblable à un coursier indomté, qui tantôt parcourt en cadence de riantes prairies, fend

avec agilité le criſtal des eaux, ou franchir les montagnes ombragées de verdûre & de fleurs; mais tantôt s'égare dans des plaines ſablonneuſes, ou s'élançant ſur d'arides rochers, roule dans les précipices qui les bordent. Cependant l'eſprit humain, exercé par les Lettres, porte ſes vues plus loin; non-content de connoître pour ſentir, il veut ſentir pour connoître; il veut approfondir la nature. La Philoſophie paroit ſur la Terre; mais elle eſt bien plus informe dans ſon origine que les Belles-Lettres. La route qui de l'imagination & de la mémoire mene à la raiſon, eſt des plus longues; la raiſon ne fait longtems qu'imaginer; l'homme accoutumé à feindre & à raſſembler promptement ſes idées, ne peut les décompoſer lentement, & obſerve la nature avec la même rapidité qu'il l'a ſentie; il crée des ſiſtêmes auſſi facilement qu'il enfantoit des images; il tient encore en main le pinceau, avec cette différence qu'auparavant il peignoit la nature, & que maintenant il en défigure les traits. Mais il ne faut pas en accuſer les Lettres; c'eſt plutôt l'effet de la foibleſſe de l'eſprit humain, plus fait pour imaginer que pour raiſonner avec juſteſſe.

Cependant cette inquiette avidité de l'eſprit qui cherche le vrai, cette inſtabilité naturelle à des idées qui n'ont aucun fondement certain, font rapidement s'élever & ſe détruire de nombreux ſiſtêmes; chaque ſiecle taxe l'autre d'ignorance, & ne s'attend pas à recevoir le même traitement; du ſein de ces ténebres ſortent néanmoins quelques traits de lumiere; la raiſon s'améliore. Alors la Philoſophie eſt à ſon tour la bienfaitrice des Lettres; non-ſeulement elle les enrichit des connoiſſances qu'elle a puiſées dans la nature, mais encore en étudiant les Lettres, elle les perfectionne; le génie reçoit des loix, & le *Gout* commence à naître. Je dis qu'il *commence à naître*, car la Philoſophie, qui enfantoit avec tant de témérité des ſiſtêmes pour expliquer l'énigme de la nature, prend ici une marche bien plus timide; elle ne fait, ſi je puis ainſi parler, que ſuivre le génie à la trace, & étant ſon hiſtorien plutôt que ſon législateur, les regles qu'elle lui impoſe elle les tire de lui-même. Cette marche étoit ſage, & ce ne fut pas

 ſans

sans utilité pour la Philosophie que les Lettres lui ouvrirent une carriere d'observations, où il lui fut moins permis de créer des sistêmes précaires. Cependant, comme si c'eût été sa destinée, elle en bâtit un, où, tandis que d'un côté elle se montroit trop indulgente envers les premiers écarts du génie, de l'autre, en voulant que l'on ne s'écartât point des modeles qu'elle avoit choisis, elle lui donnoit de trop fortes entraves; lui imposer de telles loix, c'étoit n'en pas connoître assés la nature. Et voilà peut-être le seul tort réel que la Philosophie ait fait aux Belles-Lettres. La liberté est l'ame du génie: comment prendroit-il tout l'essor dont il est capable, si, à chaque instant, on arrête son vol, & qu'on lui présente des modeles? Il est à présumer que Virgile, déja si grand, l'eût été encore plus, s'il se fût moins asservi à suivre les traces d'Homere. Quelque obligation que l'on ait à Racine d'avoir embelli les Anciens, si, après les avoir étudiés, il s'étoit plus livré à son propre génie, peut-être se fût-il effacé lui-même. On dit que les Lettres composent une République; mais on y voit trop souvent régner le Despotisme: qu'un nouveau genre y paroisse, aussi-tôt on s'arme contre lui; au lieu d'en couronner l'inventeur, il est traduit devant un Tribunal, où on le juge d'après les écrits des Anciens; on l'appelle innovateur: ainsi les regles destinées à guider le génie, semblent faites souvent pour l'épouvanter, & pour l'égarer dans sa route. Mais poursuivons l'histoire philosophique de l'esprit humain.

Les Lettres & la Philosophie ont longtems été isolées, ou leur influence étoit si foible qu'on pouvoit à peine s'en appercevoir; mais lorsque la Philosophie a fait des Lettres l'objet de ses observations, elles se sont prêtées des secours mutuels, & on les a vu réunies. Le Poëte & l'Historien se montrerent souvent Philosophes, & ceux-ci apprirent des premiers à mieux exprimer leurs pensées. Les plus belles maximes de la Morale, en passant dans les écrits des Poëtes & des Orateurs, furent plus généralement connues, se graverent dans la mémoire, & toucherent mieux les cœurs; la Poésie étoit d'autant plus sûre d'instruire qu'elle sembloit n'avoir d'autre but que l'amusement.

Les

Les sistêmes des Philosophes furent embellis de tous les charmes de la Poésie, & c'étoit la réunion la plus sensible de la Philosophie & des Lettres. Ici l'on me contestera peut-être l'utilité de ces dernieres; on dira que ces sistêmes étant faux, la Poésie, à cet égard, n'a pas été d'un grand secours à la raison. Je réponds à cela que ce n'est point la faute des Belles-Lettres si la Philosophie ne leur a pas fourni des sistêmes plus vrais, que tout n'y est pas également faux, & qu'enfin cela n'a pas retardé les progrès de la vérité, puisque, malgré ces poëmes, il existoit dans le même tems des Sectes différentes, & que depuis il s'en est élevé de nouvelles; il semble que ce soit le destin des erreurs de la Philosophie, comme de toutes les autres erreurs, d'être longtems accréditées.

Jusqu'à présent nos regards ont été principalement tournés sur les beaux siecles d'Athenes & de Rome, & nous y avons vu les Lettres associées à la Philosophie. La Scene va changer maintenant. La tirannie a triomphé: déja l'éloquence, cette fiere protectrice de la liberté, a pris le langage de la flatterie: dès-lors elle touchoit à sa décadence. Avant de disparoître on la vit cependant jetter une vive lumiere. L'oppression fit éclater dans quelques grandes ames le sentiment de la liberté: Tacite & Juvenal écrivirent; & ils dûrent sans doute aux horreurs dont ils furent témoins la force de leur pinceau: mais enfin les révolutions, suites ordinaires de la tirannie, étoufferent les Lettres, & l'on vit la Science se réfugier en Egypte, où avoit été son berceau; les Philosophes accoururent dans Alexandrie. Là tout annonçoit à la Philosophie les jours les plus brillans. Sur les débris de toutes les sectes s'éleva celle des *Eclectiques*, qui tandis que les autres sectes étoient divisées, & consumoient le tems en d'éternelles disputes, songea à réunir les étincelles de vérité, qui étoient éparses entr'elles. Ainsi, pendant que le despotisme opprimoit le gouvernement, la liberté philosophique s'introduisoit dans les esprits. Cependant, comme s'ils ne pouvoient secouer entierement le joug, ils emprunterent de Platon la plûpart de leurs principes, & porterent le nom de *Platoni-*

niciens modernes. Ces tems sembloient d'autant plus favorables à la Philosophie, qu'elle faisoit alors l'étude principale de tous les Savans. Depuis longtems on ne cultivoit plus les Lettres avec ardeur, & quoique Trajan les eût en quelque sorte fait revivre, il ne fut point imité en cela des Empereurs qui le suivirent. Le plus savant d'entr'eux, Marc-Antonin, ne favorisoit guere que les Philosophes, & particulierement les Stoïciens; à leur exemple il méprisoit toute autre étude que celle de la Philosophie. Il paroit donc qu'elle devoit faire d'autant plus de progrès, que se frayant une route moins erronée, la vérité étoit son unique but, & que tous à l'envi s'appliquoient à cette science; on croiroit que plus il est d'hommes qui approfondissent les mêmes objets, plus ils devroient réussir. Cependant, malgré des circonstances si favorables, la Philosophie se corrompt. Tandis qu'elle se propose de concilier non-seulement tous les sistêmes des Philosophes, mais encore toutes les Religions, elle produit une secte plus absurde qu'aucune des sectes qui l'ont précédée, & tombe dans une superstition plus déplorable que celle où elle voudroit remédier. Elle est infectée de la *Théurgie* & de la *misticité;* c'est d'elle que vint le fanatisme, qui, parmi tant de maux qu'il enfanta, remplit les déserts & enfin les villes de cloîtres & de solitaires. Les Philosophes ne croiroient point que l'origine de tant d'abus de la Religion, contre lesquels ils s'élevent aujourd'hui, se trouvât dans une Philosophie déréglée; car *Ammonius-Sacca* qui, après l'établissement de la secte des Eclectiques, en fut le chef principal, paroit, jusqu'à la fin de sa vie, n'avoir eu que l'extérieur du Christianisme. Mais d'où peut venir cette soudaine révolution de la Philosophie? Pourquoi, si favorisée en apparence, dépérit-elle dans les lieux qui la virent naître? Je vois que dans le même tems on négligeoit beaucoup la culture des Lettres. Je ne prétends pas que ce soit la seule cause de cette révolution; mais j'ose avancer qu'elle y eut une grande influence. Pour éviter les redites, je ne m'arrête pas à prouver une assertion, qu'établira avec assés de force la suite de ce Discours.

De-

Depuis le second siecle la décadence des Lettres fut toujours plus sensible. Les écrits de Longin, de Dion-Cassius, & d'un petit nombre d'autres auteurs furent les dernieres étincelles du bon gout. Plusieurs causes acheverent de l'éteindre. Au sein de la Philosophie des Platoniciens modernes nâquit une secte, qui, prévoyant peu le tort qu'elle feroit à la Religion, jugea que la culture des Lettres y étoit funeste: cette Secte devenoit de jour en jour plus nombreuse; les solitaires & tous les partisans de la vie mistique l'accréditoient; ce sexe, qui semble plus fait pour inspirer les arts que pour les détruire, mais dont la sensibilité dégénere aisément en foiblesse, suivoit les impressions de ces fanatiques, & ce parti étoit encore fortifié de personnes d'un rang considérable. Les Lettres, dans cette conjuration, eussent vainement cherché un asile à l'ombre du trône Impérial; la plûpart des Empereurs, loin de les protéger, sembloient avoir formé le dessein de les anéantir; l'œil sombre de la Tirannie, comme celui de la Superstition, redoute la lumiere des Lettres. Les guerres civiles leur porterent de nouveaux coups, & enfin ces torrens de Barbares qui se précipitant les uns sur les autres inonderent toute l'Europe, les entraînerent dans la ruine générale. Alors le genre humain, sorti de la barbarie par les progrès les plus lents, parut tombé pour jamais dans un état bien plus déplorable; car le faux savoir produit des effets bien plus fâcheux que l'ignorance totale; la Superstition, du consentement des peuples séduits, établit son trône sur des fondemens qui semblent inébranlables, & s'éleve jusqu'aux plus grands excès du Despotisme. Cependant les Lettres, que l'on eût crû toucher à leur plus bas période, alloient toujours en déclinant; au lieu d'étudier les bons auteurs on lisoit les vies des Saints; la haine que l'on portoit à la Littérature s'enracinoit avec l'ignorance; les Papes qui pour s'agrandir en avoient profité, l'entretenoient, & l'on dit que *Grégoire* surnommé *le Grand*, & auquel la Papauté doit une partie de son pouvoir, voulut livrer aux flammes un grand nombre d'anciens auteurs. Enfin au dixieme siecle & au commencement de l'onzieme, les Lettres furent entierement négligées; quelques sectes les avoient haïes auparavant: on fit plus; on les méprisa.

prisa. *Les Poëtes & les Historiens étoient diffamés, & si quelqu'un étudioit les ouvrages des Anciens, exposé à la risée de tout le monde, il étoit censé plus lourd que le plomb & la pierre, & plus hébêté qu'un âne d'Arcadie.* Ce sont les propres paroles d'un auteur judicieux du 12[e] siecle. Qu'on juge après cela du sort des Lettres, qui ont un si grand besoin d'encouragemens, & que l'indifférence seule peut anéantir.

Voyons maintenant quel étoit l'état de la Philosophie. Ces détracteurs de la Littérature portoient le nom de Philosophes: mais ce n'étoient plus des *Platoniciens modernes.* Cette secte, si sage dans son origine, décréditée par les erreurs d'Origene, ou plutôt par sa condamnation, avoit beaucoup dégénéré; on craignoit d'être soupçonné d'Origénisme en se déclarant *Eclectique*, tant la Politique concourt à changer la Philosophie. D'un autre côté les contestations qui s'éleverent à l'occasion des *Nestoriens* & des *Monophysites* firent recourir à un Philosophe qui fût plus propre à la dispute que Platon; on tourna les yeux sur Aristote: mais l'ignorance des Langues & de la saine Critique étoit si grande, que les Ecrivains mêmes de ces tems avouent qu'on n'étoit pas en état de bien saisir le sens de ses paroles. Cependant les opinions qu'on lui attribuoit devinrent autant de loix. Et je ne puis m'empêcher de faire remarquer ici le sort singulier de la Philosophie: autant elle fut libre à l'établissement de l'Eclectisme, autant elle fut assujettie maintenant; comme les Empires, elle tomba de la Démocratie dans le Despotisme. Bientôt la *Dialectique*, qui embrassoit la *Logique* & la *Métaphysique*, parut la seule étude digne d'être cultivée; alors on jetta du ridicule sur les Littérateurs: mais la Philosophie devint toujours plus ténébreuse; la Grammaire fut corrompue; les Langues, faites pour s'expliquer, ne servirent qu'à exciter des discordes; on ne s'entendoit plus; on crioit à Aristote, & chacun l'interprêtoit à son gré. Enfin, comme si l'esprit humain une fois égaré ne connoissoit plus de terme à ses erreurs, s'éleva la dispute des *Universaux*; on ne se borna pas à de longues contestations; on prit les armes; les bancs de l'Ecole furent ensanglantés, aveu tacite que fai-

soit

soit la raison de l'impuissance où elle étoit tombée; les Philosophes, tenant des peuples barbares qu'avoit vomi le Nord, vouloient terminer par des combats les querelles philosophiques.

Quelle fut donc la cause de cet avilissement de la Philosophie? On peut en alléguer plusieurs: mais je crois que dans le tableau qui vient d'être tracé, on a déja vu que la décadence des Lettres y eut beaucoup de part. Depuis l'établissement de l'*Eclectisme* jusqu'à la guerre des Universaux, je vois la Philosophie décheoir à raison du peu de culture des Lettres; cette rélation est si exacte que les ténebres de celle-là s'épaississent tout-à-fait lorsque celles-ci sont entierement négligées. La Philosophie, quoique mal cultivée, a toujours été en honneur; il semble qu'elle auroit dû se relever & faire des progrès: pourquoi dégénere-t-elle donc avec des guides tels que Platon & Aristote? C'est en grande partie parce qu'on les entend mal, & on ne les entend point parce qu'on a négligé leur Langue & la saine Critique. L'esprit humain ayant rarement assés de force pour philosopher par lui-même, & le joug de l'autorité étant le plus dangereux qu'on puisse lui imposer, parce qu'il étouffe le génie, l'*Eclectisme* favorisoit les progrès de la raison: il eût été mieux sans doute d'étudier la nature; mais, au défaut de cette étude, en comparant entr'elles les opinions de tous les Philosophes, l'esprit pouvoit acquérir un nouveau dégré de force; du moins s'accoutumoit-il à ne pas céder à l'autorité, & cette disposition pouvoit le conduire à prendre pour maître la nature seule. Mais les Lettres ne purent décliner sans que la Philosophie Eclectique ne s'en ressentît: pour juger les opinions de tous les Philosophes il faut les connoître, & c'est le travail de la Critique; or dans cette indifférence pour la Littérature, indifférence qui dégénera bientôt en haine & enfin en mépris, la Critique disparut; le nombre des Philosophes qu'on étudioit diminua toujours, jusqu'à ce que la paresse & l'ignorance firent qu'on se borna à la lecture d'un seul d'entr'eux; encore ne lisoit-on que la plus petite partie de ses écrits. Que dut devenir alors la secte des Eclectiques? Il étoit naturel que la liberté qui avoit régné dans la Philo-

losophie se convertit en despotisme. Peu instruit des opinions des Philosophes, l'esprit humain ne put plus les juger, & se rétrécissant toujours plus, il ne jugea plus-même celui qu'il connoissoit encore; il lui parut plus commode de suivre aveuglément ses loix; n'ayant qu'un seul maître il étoit d'autant plus esclave, à peu près comme un peuple qui étant enfin assujetti après avoir longtems combattu pour la liberté, se montre aussi lâche & rampant qu'on l'avoit vu fier & magnanime. Mais ce n'est pas tout: l'ignorance de la Critique augmenta au point que l'on ne comprit pas même le seul Philosophe auquel on s'étoit soumis; les oracles qu'on lui faisoit prononcer étoient plus inintelligibles que ceux de Delphes: comme pour s'épargner la peine de juger, on lisoit précisément les plus obscurs d'entre ses écrits; au lieu de porter les yeux sur l'original, on l'étudioit dans d'infideles extraits, & de tels disciples n'étoient pas fort propres à y répandre de la lumiere. Enfin la lecture des bons auteurs étant négligée, la Langue même qu'on parloit se corrompit; la clarté, cette premiere loi de la diction, fut impunément violée; on adoptoit sans examen des mots barbares, qui n'avoient d'autre usage que ces cris de guerre destinés à rallier les troupes, & à les ramener au combat. Tous ces abus dérivoient en partie de la même cause, de l'indifférence & du mépris que l'on témoignoit aux Lettres.

Que si je tourne les yeux sur les Arabes, où les Sciences fleurissoient tandis que l'Europe étoit plongée dans la barbarie, j'y trouve de nouvelles preuves de mon assertion. J'y vois les Lettres précéder les Sciences, y préparer les esprits, & rester en honneur. Aucun peuple n'eut autant de Poëtes. Le génie poétique y étoit connu longtems avant le Mahométisme; les plus estimés d'entre leurs anciens poëmes furent déposés dans le Temple de la Mecque, hommage qu'aucune autre nation ne rendit aux Lettres. Leurs histoires les plus sérieuses sont remplies de vers, & l'imagination domine tellement dans leur poésie, que ce seroit une raison vraisemblable de les croire peu propres aux Sciences. Cependant elles y réussirent. Tandis qu'à l'imita-

tion

tion de Charlemagne, ſes fils faiſoient en leur faveur des efforts aſſés vains, Almamon les tranſplanta facilement dans ſes Etats; il fit traduire en Arabe les meilleurs auteurs Grecs: les Sciences firent de rapides progrès dans un pays dont la Langue, loin d'être corrompue comme ailleurs, étoit arrivée à ſa perfection, & où le flambeau de la Critique les éclairoit. Il me ſemble que ces progrès mis en parallele avec le peu d'utilité des efforts qu'on faiſoit en Europe pour ranimer les Sciences, montrent ſenſiblement l'influence des Lettres à leur égard. Pendant qu'on obſcurciſſoit ici Ariſtote, là on le traduiſoit avec ſuccès; les Arabes profitoient des ſecours que nous avions ſu rendre inutiles. Bientôt ce peuple qui avoit emprunté nos livres, devint notre maître, & nous les expliqua; nous allions dans leurs écoles leur demander ce qu'avoit penſé Ariſtote, que nous avions choiſi pour le Législateur de la raiſon humaine; mais ce n'eſt pas le ſeul ſervice qu'ils nous rendirent, ils nous communiquerent toutes leurs connoiſſances; en étendant leur Empire ils régnoient en même tems ſur les eſprits; leurs conquêtes furent les ſeules peut-être qui contribuerent à l'avancement des Sciences, & on leur en doit en grande partie le renouvellement.

Chez les Grecs du moyen âge les Lettres ne furent pas tout-à-fait ſi négligées que chez les Latins. Auſſi, quoique la Philoſophie n'y parût point avec éclat, elle y fut un peu moins ténébreuſe que dans les autres pays de la Chrétienté. L'autorité y étoit partagée entre Platon & Ariſtote, ce qui affoibliſſoit au moins le joug du Deſpotiſme, dont on accabloit ailleurs la raiſon humaine.

Enfin la renaiſſance du vrai ſavoir commença par celle des Lettres. Déja les foibles efforts qu'on avoit faits en leur faveur avoient influé ſur la Philoſophie. Elle ſe partageoit en trois Sectes. L'une, qui étoit l'ancienne, ne liſoit que d'informes extraits d'Ariſtote. L'autre étudioit, quoique dans des traductions obſcures, quelques écrits d'Ariſtote lui-même. Une troiſieme Secte vouloit philoſopher d'après ſon propre génie, en conſultant néanmoins Ariſtote & Platon; il ſembloit que l'Eclectiſme allât ſe relever de ſes ruines. Mais ce n'étoient

pas là encore les jours brillans de la Philoſophie; les efforts même de l'eſprit humain ne ſervoient qu'à montrer ſa foibleſſe; il ne pouvoit comprendre les maîtres qu'il choiſiſſoit, encore moins philoſopher par lui-même; cependant ces deux dernieres Sectes annonçoient les révolutions qui alloient ſuivre.

Bientôt on s'apperçut qu'on étoit plongé dans la plus profonde ignorance, ce qui étoit un pas conſidérable vers le ſavoir; alors on courut s'inſtruire chés les Arabes.

En général les eſprits étoient préparés à recevoir une plus grande lumiere, mais la barbarie avoit été ſi épaiſſe que cette lumiere pouvoit à peine percer & ſe répandre. Un petit nombre de génies diſtingués, parmi leſquels Roger Bacon tient le premier rang, nourris dans la culture des Lettres, & éclairés par une ſaine critique, mépriſoient les diſputes ſtériles des Philoſophes. Bacon leur diſoit: *Jamais il n'y eut plus d'apparence du Savoir, plus d'application dans tous les genres, plus de Docteurs répandus dans les villes, & même dans les bourgs, & il n'y eut jamais tant d'erreurs; la plûpart deviennent ânes en étudiant des livres mal-traduits.* Il parle de ceux d'Ariſtote. Mais ces avertiſſemens ne ſuffiſoient pas pour réveiller les Lettres & la Critique; dans des maux déſeſpérés il faut une révolution, & elle arriva.

Cette révolution fut due à l'art de l'Imprimerie; ſans elle les progrès de l'eſprit humain, qui s'efforçoit à ſortir de l'ignorance, euſſent été beaucoup plus lents. Mais cet art ayant rendu publics les auteurs Grecs & Latins, qui étoient enſevelis dans les cloîtres, le deſir de les lire devint univerſel. On eut donc des Livres; mais il falloit encore des maîtres pour les expliquer: de Conſtantinople, où les Lettres avoient été moins négligées, ils ſe répandirent dans toutes les villes de l'Europe. Alors on étudia à l'envi les Langues & les Antiquités; la Critique fut reſſuſcitée; les éditions des anciens auteurs ſe multiplierent, & parvinrent en peu de tems à leur perfection.

On

On voit que l'esprit humain prit ici une marche différente de celle qu'il suit quand il est abandonné à lui-même: au lieu de créer on étoit glossaire ou commentateur; ceux qui traduisoient les Anciens se contentoient de l'interprétation la plus servile, & ne songeoient pas même à égaler leurs modeles. C'est qu'il y a une grande différence entre une nation ignorante qui se perfectionne par dégrés, & un mélange de peuples barbares qui se sont égarés par un faux savoir, & qui ont corrompu le langage: chés la premiere les facultés de l'esprit se développent naturellement, tandis que chés les derniers elles se sont perverties, & ont besoin de guide; le génie y est éteint dans un cahos de termes obscurs & d'opinions absurdes.

Remarquons encore ici combien l'esprit humain se jette facilement dans les extrêmes. Les Lettres, sur lesquelles tant de prétendus Philosophes avoient voulu répandre du ridicule, étoient maintenant presque seules en honneur; en devenant érudit on croyoit avoir atteint le plus haut dégré de la Science; ce préjugé n'étoit pas aussi funeste que celui qui sacrifia les Lettres à la Philosophie; au contraire, il étoit avantageux que l'esprit se détournât des vaines subtilités où il s'étoit livré si longtems; l'érudition la plus futile y étoit préférable.

Cependant les Lettres firent des progrès continuels. Les Anciens, après avoir été lus par des érudits, le furent enfin par des hommes de génie; l'imagination & le gout commencerent à s'exercer; une noble émulation s'emparant des esprits, on voulut imiter ceux que l'on commentoit; les Langues modernes se perfectionnerent. Déja les Lettres avoient influé sur la Philosophie; Platon, en Italie, partageoit le crédit d'Aristote, & l'Eclectisme reparoissoit, quoiqu'avec moins d'éclat que dans son origine. Mais maintenant cette influence devint plus sensible; plusieurs rougirent des égaremens de l'esprit humain; la Philosophie, telle qu'on l'avoit étudiée, leur parut ce qu'elle étoit, un assemblage de mots barbares & de distinctions arides & inintelligibles; le génie créateur, excité par les Arts, avoit honte que la raison eût été si longtems asservie aux loix d'Aristote, & la culture des Lettres ayant con-

contribué à l'adouciſſement des mœurs, on eut peine à comprendre qu'on avoit pu verſer le ſang-humain pour des queſtions d'une ſtérile Philoſophie. *François Bacon*, cet homme univerſel, auſſi grand Ecrivain que Philoſophe, fut un autre *Colomb* à l'égard des Sciences. Il navigea, pour ainſi dire, le premier dans ces mers inconnues, marqua les écueils, traça la route, & annonça de nouvelles découvertes: mais trop ſage pour ſon ſiecle & ſemblable en tout à Colomb, il n'eut pas la réputation qu'il méritoit. *Gaſſendi*, ſi ſavant dans les Lettres, & qui, avant *Deſcartes*, s'éleva contre *Ariſtote*, eut à-peu-près le ſort de *Bacon*, dont il imitoit la ſage timidité. On ſait que *Deſcartes* renverſa le *Péripatétiſme* en y ſubſtituant un ſiſtême non-moins erroné; mais, comme on l'a dit avec raiſon, la Philoſophie étoit dans un état ſi triſte, que pour elle changer d'erreurs, c'étoit faire des progrès. Enfin *Locke* & pluſieurs autres grands Génies ſuivirent la route qu'avoit marqué *Bacon;* ſupérieurs à la Secte des Eclectiques, qui ne cherchoient la vérité que parmi les Philoſophes, ils conſulterent principalement la nature. Cette lumiere a paru plus tard en France: mais après le ſiecle des Beaux-Arts eſt venu enfin le ſiecle de la Philoſophie; jamais on ne cultiva plus les Lettres, & jamais la Philoſophie n'eut plus d'éclat; ce qui la diſtingue aujourd'hui c'eſt qu'ennemie de l'eſprit de ſiſtême parce qu'il égara trop longtems la raiſon, & n'ayant d'autre étendard que celui de la vérité, elle eſt ſortie de ſes anciennes limites, & s'eſt emparée de tous les objets qui ſont du reſſort de l'eſprit humain.

Quoique ce ne ſoit pas proprement mon objet, je ne puis m'empêcher de faire remarquer ici en peu de mots combien les Lettres ont influé ſur la Théologie. Par-là même qu'elles ont contribué au déclin ou aux progrès de la Philoſophie, la Théologie a dû s'en reſſentir. Elle commença donc à ſe corrompre dès le ſecond ſiecle, peu après l'établiſſement de l'Eclectiſme. Depuis ce tems elle s'obſcurcit toujours plus, à meſure que s'épaiſſirent les ténebres de la barbarie. La ſaine Critique étant éteinte, & l'étude même des Peres négligée, le texte de l'Ecriture fut en proie aux plus biſarres interprétations, juſqu'à ce

que

que la Scholastique l'infectât entierement. C'est l'ignorance des peuples & la férocité des mœurs qui éleverent le tribunal de l'Inquisition, tribunal semblable à celui sur lequel Milton représente la Nuit & le Chaos entretenant l'éternelle anarchie des élémens, ne vivant que par la confusion & le tumulte, & augmentant par leurs décrets le désordre auquel ils doivent leur empire.

. . . . . . Where eldest Nigth
And Chaos . . . . hold
Eternal Anarchie, amidst the noise
Of endless wars, and by confusion stand:
. . . . Chaos umpire sits
And by decision more embroils the Fray
By which he reigns.

Si, lorsque les Lettres ont été cultivées, on a vu couler encore des torrens de sang pour des disputes théologiques, c'étoient d'affreux restes de la barbarie. L'art de l'Imprimerie & le renouvellement des Lettres ont précédé la Réformation, & il n'est pas douteux qu'ils n'y ayent beaucoup contribué. Wiclef, Zwingle, Luther, Melanchton, Calvin & tous les autres Réformateurs étoient fort versés dans la Littérature. Léon X, bien différent de Grégoire surnommé le Grand, encourageoit les Lettres, &, comme l'a remarqué M. de Voltaire, il donnoit par-là des armes contre lui-même. Tout avoit changé de face: auparavant on quittoit ses foyers pour aller combattre dans la Terre Sainte; maintenant on couroit s'instruire en Italie. La culture des Lettres & d'une saine Philosophie est très-propre à inspirer du dégout pour toutes ces questions également puériles & seches, qui tiennent encore de la Scholastique, & dont il n'a pas été aussi facile de guérir les Théologiens que les Philosophes. Ce sont elles qui engendrent les plus grandes animosités, parce qu'on ne peut y répandre de la lumiere, & que plus on les discute, plus on les embrouille, comme on augmente quelquefois l'extrême confusion d'un écheveau de soie fort déliée, en s'obstinant à la démêler. Le mépris de ces questions futiles termineroit bien des disputes, & cela seul adouciroit les mœurs.

J'ai fait en abrégé l'Histoire philosophique de l'esprit humain. Souvent quand on veut établir un principe, on l'étaye d'abord de ses raisonnemens, & l'on tâche ensuite d'y plier l'Histoire. J'ai pris une route opposée. Consultant l'expérience, j'ai mis sous les yeux un tableau fidele de nos progrès & de nos écarts, afin que mes raisonnemens ne fussent qu'une induction des faits, & qu'on pût la tirer soi-même. Or l'histoire de tous les siecles montre la grande influence que les Lettres ont sur la Philosophie. Je vois cette influence lorsque les Sciences naissent, lorsqu'elles déclinent, & lorsqu'elles se renouvellent: je la vois chés toutes les Nations, chés les Grecs comme chés les Romains, chés les Arabes comme chés les peuples modernes: tout concourt donc à établir cette assertion. Il ne me reste plus qu'à l'appuyer d'un petit nombre de raisonnemens, qui n'ont pu entrer dans le corps de cette Histoire philosophique.

Les Belles-Lettres sont principalement composées de l'*Histoire*, de la Poésie & de l'Eloquence: voyons comment, sous ces divers points de vue, elles peuvent influer sur la Philosophie.

Quant à l'Histoire, il est incontestable que toutes ses branches concourent à guider les pas du Philosophe; c'est le plus grand flambeau de la Morale & même de la Métaphysique; la Philosophie lui doit la plus grande partie des progrès qu'elle a faits aujourd'hui. Les Moralistes qui n'ont consulté que le raisonnement, sont demeurés dans un cercle fort étroit; ceux qui ont étudié l'Histoire, ont mieux remonté aux premiers principes de la Morale; ils ont vu le tableau entier de l'homme, tandis que les autres Moralistes en ont à peine vu le buste: ici chaqu'un me prévenant sans doute, nomme Montesquieu & ceux qui ont suivi ses traces.

De quelle utilité n'est pas, en particulier, l'Histoire de la Philosophie? S'il est certain qu'avant d'arriver au vrai les hommes s'égarent en différentes manieres, il est très-bon de connoître les erreurs de ceux qui nous ont précédés; nous les appercevons en autrui, tandis

que nous y serions peut-être tombés nous-mêmes; ainsi les erreurs concourent à l'établissement de la vérité. Ce n'est pas tout: l'édifice des Sciences, semblable à ces piramides d'Egypte, que plusieurs générations travailloient à élever, sont l'ouvrage de l'humanité entiere; nous sommes pauvres de notre propre fonds: il est tel homme sur les pas duquel doit se trouver une vérité nouvelle par la combinaison des vérités anciennes; s'il néglige de s'en instruire, il manque des termes de comparaison; pour perfectionner les travaux d'autrui il faut les connoître. Enfin il est des vérités qui sont tombées dans l'oubli, & qu'on est obligé de redire ou de mieux développer. Leibnitz avouoit les obligations qu'il avoit aux anciens Philosophes.

J'ai déja fait sentir en plusieurs occasions combien la Poésie & l'Eloquence influent sur la Philosophie; on a vu qu'elles ont perfectionné le langage, que le Génie créateur, allumé par les Arts, ne se contient point dans leurs limites, mais que semblable à l'Astre qui est la source de la vie & qui éclaire plus d'un globe, il répand, jusques dans l'Empire des Sciences, sa lumiere & sa chaleur; je n'ajouterai plus qu'un petit nombre de considérations. Le Gout, ce sentiment rapide & délicat qui nous fait saisir le beau, nous dispose, jusqu'à un certain point, à trouver le vrai; car ce qu'on appelle *beauté poétique* est en grande partie la vérité des images & des sentimens. Le gout n'est que le jugement fort exercé. Ce que j'avance ici est confirmé par l'Histoire; on a vu que dès la renaissance des Lettres on conçut de l'éloignement pour la Philosophie barbare & épineuse de l'Ecole.

Il est des poëmes philosophiques; mais la Philosophie doit-elle s'associer l'Eloquence? Plusieurs pensent le contraire. Je ne sais si ce n'est pas une suite de la Scholastique, & du mépris qu'on avoit alors pour les Lettres; la méthode géométrique qu'on a voulu introduire par-tout, a sans doute contribué à établir ce sentiment: mais l'expérience & le raisonnement prouvent que cette méthode est peu applicable à la Philosophie. Elle est au contraire propre à en imposer; cet apparat de définitions & de Syllogismes subjugue l'esprit plus que ne

feroient les féductions de l'Eloquence; la fatigue même qui en résulte peut nuire à l'examen: comment suivre un Philosophe dans ce labyrinthe épineux de termes, aussi obscurs que leurs définitions, & de raisonnemens où le Sophisme se cache d'autant mieux qu'il a pris l'apparence de la vérité!

Mais voudrions-nous transformer le Philosophe en Orateur ou en Poëte? Ne confondons point ici les genres. Les vérités philosophiques sont de différente nature; plus elles sont abstraites, plus elles sont du ressort de l'entendement pur; mais il s'en faut bien qu'elles soient toutes de cette espece, & celles-là même tiennent quelquefois par leurs conséquences à des vérités moins abstruses; il en est qui réveillent les plus grandes images, & qui touchent & embrasent le cœur. Le Philosophe est sensible, & il parle surtout à des hommes qui le sont. Doit-il alors étouffer ces impressions, comme s'il craignoit de trop persuader? Je ne prétends pas le convertir en déclamateur; la véritable éloquence elle-même évite la déclamation, & c'est le propre du gout d'inspirer le ton convenable à chaque sujet; ainsi celui qui mal à propos s'animeroit ou entasseroit des images, pécheroit autant contre le gout que contre la sévérité philosophique. Il est un stile convenable à la Philosophie; ce stile est en général plus simple qu'orné: mais comme tous les genres se mêlent souvent, & que l'un emprunte de l'autre, comme la Comédie éleve quelquefois son ton & que la Tragédie l'abaisse, comme l'Eloquence puise dans la Philosophie, de-même celle-ci ne dédaigne pas de revêtir les embellissemens de l'Eloquence; du moins lui est-il utile d'y prendre une diction élégante & claire, & de suivre les loix du gout en évitant les longueurs & les redites. La réunion du beau & du vrai me paroit la perfection de la raison humaine; pour éclairer les autres hommes & pour ne pas se fatiguer soi-même dans la recherche de la vérité, il faut souvent donner du corps à nos pensées; la sécheresse dégénere aisément en subtilité, comme on l'a pu voir dans l'histoire que j'ai tracée de la Philosophie. Quel est le but du Philosophe? Est-ce que la vérité demeure enfermée dans des

des livres, qui semblables à des ruines savantes, n'attirent les regards que du plus petit nombre? ou croit-il qu'il importe aux Rois & aux peuples de n'être point plongés dans l'ignorance? Il ne peut se déclarer pour la premiere de ces alternatives sans favoriser le despotisme & la superstition. Or dès que la Philosophie est née pour l'utilité générale, elle ne doit pas s'approprier une méthode rebutante, que les initiés seuls puissent entendre; elle doit se souvenir qu'elle parle à tout le genre-humain, & non à ceux-là seulement qui voudroient se réserver le titre de Philosophe. Quoi de plus digne d'elle que de ramener à sa véritable destination l'Eloquence dont tant d'hommes abusent, & de l'employer à la défense de la vérité! L'erreur lui oppose tant d'obstacles qu'elle ne doit négliger aucun moyen de les détruire. Si elle pouvoit à la fois éclairer l'esprit, toucher le cœur, & flatter l'oreille, elle se feroit entendre des peuples & des Rois.

M'objectera-t-on qu'en prenant le langage de l'Eloquence elle risque d'éblouir par des sophismes? Mais j'ai montré qu'elle y est encor plus exposée en prenant une méthode seche, qui conduit à des subtilités: dans ce dernier cas, c'est l'esprit lui-même qui est séduit, & dès-lors il est très-difficile de le faire sortir de la route épineuse où il s'est égaré; au lieu que les séductions de l'Eloquence étant, pour l'ordinaire, de nature à entraîner le cœur plus que l'esprit, dès que celui-ci est rendu à lui-même, il peut revenir de son erreur, & céder à une plus grande lumiere. Cependant je ne disconviens pas que la Philosophie ne puisse abuser de l'Eloquence: dequoi n'a-t-elle pas abusé? Je regarde la réunion constante du beau & du vrai, dans toute l'étendue de ces termes, comme ce point exquis de perfection idéale que les Artistes se proposent dans tous les arts, & qu'il est encore plus facile d'imaginer que d'atteindre. On est d'autant plus parfait qu'on en approche. Le Philosophe en qui le beau domine sur le vrai est encore bien éloigné du but, & il sera effacé par celui en qui ces deux qualités se verront mieux réunies.

Que si on consulte l'expérience, on voit que les Métaphysiciens & les Moralistes qui vont à la postérité, n'ont pas dédaigné d'être éloquens; ils sont donc les plus utiles. On nomme Platon l'Homere des Philosophes. Cicéron en est peut-être le Virgile, tant sa diction est pure & élégante. Séneque, quoique Stoïcien, n'avoit pas négligé la culture des Lettres, & il auroit emporté tous les suffrages s'il avoit eu autant de gout que d'esprit. Pline, l'Historien de la nature, y a puisé la force & l'agrément de son stile. Bacon, que l'on peut appeller le restaurateur de la Philosophie, l'est aussi de la saine Eloquence. Malebranche en combattant l'imagination, prend des armes d'elle-même, & il ne cesse d'être éloquent que lorsqu'il tombe dans de vaines subtilités. Locke même, qui sembloit ne sacrifier qu'au vrai, sort quelquefois de la simplicité de son stile, & s'il avoit plus consulté le gout en évitant les longueurs & les redites, la vérité y eût gagné, & il seroit plus lû encore. En Allemagne Wolff commence à tomber depuis qu'on y cultive plus les Lettres, & il doit sans doute une grande partie de sa réputation à ceux de ses disciples qui, en l'abrégeant, l'ont dégagé de la méthode scientifique & de l'extrême sécheresse qui regne dans ses ouvrages. Parlerai-je de Montesquieu, cet homme aussi profond qu'éloquent, & qui semble avoir le plus approché de ce point exquis de la perfection idéale dont j'ai parlé, & qui consiste dans la réunion du vrai & du beau? Je m'arrête ici, & craignant d'être suspect de flatterie, je ne me permets pas de nommer les Philosophes encore vivans; je me contente de remarquer que le caractere distingué de ce siecle est la Philosophie associée à l'Eloquence. Mais que fais-je? en parlant des Philosophes modernes ne donné-je pas des armes contre moi-même? Ignoré-je combien on s'éleve contr'eux, & comme on rend leur éloquence coupable de leurs erreurs? Mon suffrage n'a point de poids: mais si l'on dispute le nom de Philosophe à tous ceux qui s'égarent, dès-lors nul ne le méritera. On ne peut nier du moins que ceux dont il est ici question n'ayent des vues très-profondes. Il est des erreurs où les grands Génies seuls peuvent tomber, parce qu'ils creusent les premiers un sujet ou s'écartent de la route battue, où les

solu-

solutions étoient insuffisantes. Par-là ils réveillent les esprits plus lents, que le paradoxe seul peut tirer de leur létargie; chacun s'empresse à l'examen d'une idée nouvelle, & la vérité sort quelquefois du sein de ces combats. Les chutes de ces Philosophes ne sont pas d'une autre nature que les chutes de tous les Génies créateurs: jamais on ne contestera à Corneille le nom de grand Poëte.

Je me flatte que toutes les parties de ce Discours ont concouru à établir que les Lettres, bien loin d'être nuisibles à la Philosophie, y sont d'un grand secours. Ainsi il est de l'intérêt même des Philosophes de les estimer & de n'en point négliger la culture. La forme de cette Académie qui les réunit est donc fort utile; elles peuvent ici se prêter la main & marcher d'un pas égal. Il est vrai que si l'on remonte à l'établissement de cette Société, on trouve qu'en réduisant à la seule érudition la culture des Lettres, elles ont été resserrées dans des limites étroites: depuis a conservé une institution faite dans un tems où le goût commençoit seulement à se répandre en Allemagne: mais aujourd'hui qu'il y fait des progrès continuels, & qu'un grand Monarque lui-même l'inspire, ceux qui présideront à ce Corps, feront, à cet égard, les changemens qu'ils jugeront convenables.

ELO-

ELOGE
DE
Mr. SUSSMILCH.

JEAN PIERRE SUSSMILCH, Conseiller du grand Consistoire, Prevôt de cette partie de Berlin qu'on nomme Cologne, premier Pasteur de l'Eglise de S. Pierre, Commissaire du Directoire des pauvres, Inspecteur des Eglises voisines & du College de Cologne, Membre ordinaire de l'Académie Royale dans la Classe de Belles-Lettres, nâquit à Berlin le 3 de Septembre 1707. Sa famille, du côté paternel, étoit originaire de Boheme. Son grand-pere, *Elie Sussmilch*, homme de bien & craignant Dieu, fut exposé en 1650 à la violente persécution que les Evangéliques de Boheme endurerent de la part de l'Empereur FERDINAND III, & préférant le salut de son ame à la conservation de ses biens temporels, il sortit de sa patrie le bâton de pélerin à la main. Le sacrifice qu'il faisoit n'étoit pas médiocre: il jouissoit d'un état honorable & d'un sort avantageux. Dès l'an 1513 l'Empereur avoit accordé à un de ses Ancêtres la dignité de Juge héréditaire du Château de *Tollenstein*, situé à trois milles au delà de *Zittau;* & cette dignité avoit subsisté dans la famille jusqu'au refuge de l'Ayeul de M. *Sussmilch;* après quoi elle passa à la ligne féminine du nom de *Heltzel.* Lorsque le pere de notre Académicien fit un voyage en Boheme pour voir sa famille, on lui offrit tous les biens & emplois que son pere avoit abandonnés, s'il vouloit embrasser la Religion Catholique; mais le fils d'un Confesseur étoit bien éloigné de devenir Apostat.

L'un & l'autre éprouverent les effets les plus marqués de la protection divine, & de la rémunération promise à ceux qui *cherchent* *pre-*

premierement le Royaume de Dieu. Le grand-pere ayant choisi pour asyle le Brandebourg où le grand Electeur tendoit généreusement les bras à tous ceux qui étoient les victimes de l'oppression, il eut le bonheur d'être attaché immédiatement à son service, dans la Compagnie d'élite qu'on nommoit les Drabans de la Garde. Il suivit ce Héros dans toutes ses expéditions. Après la bataille de Fehrbellin, accablé sous le poids des travaux & des années, il obtint un congé qui ne détruisit pas entierement ses rélations avec son auguste Maître. Ayant fait un mariage par lequel il avoit acquis un petit bien à Zehlendorff, lieu situé à mi-chemin entre Berlin & Potzdam, toutes les fois que l'Electeur y passoit, il mettoit pied à terre chez son vieux grison, (c'est le nom dont il l'honoroit,) & lui renouvelloit les assurances de sa protection.

Des deux fils d'*Elie Sussmilch*, l'aîné *Jean Elie*, pere de l'Académicien, qui avoit beaucoup voyagé dans sa jeunesse, en France, en Angleterre, en Hollande, & dans presque toute l'Allemagne, possédoit la plûpart des Langues vivantes. Il s'attacha au négoce de grain, & fut propriétaire d'une brasserie à Berlin. Son Epouse, *Marie Blell*, étoit fille de *Pierre Blell*, Capitaine de la Ville & Maître Teinturier à Brandebourg, où son grand-pere, venu du Brabant, avoit apporté l'art de la Teinture, encore inconnu dans nos contrées.

Ces honnêtes parens, gens éclairés & vertueux, se trouvant fort à leur aise, n'épargnerent rien pour l'éducation de leur fils aîné, JEAN PIERRE, qui fait le sujet de cet Eloge. Il passa les premieres années de son enfance chez son grand-pere maternel à Brandebourg. Après avoir acquis les connoissances élémentaires, il reçut la premiere teinture de celles qu'on nomme Humanités, par les leçons domestiques d'un fort habile homme, nommé *Hoppen*, qui a été depuis Recteur à Ruppin. On l'envoya ensuite au College de la nouvelle Ville de Brandebourg, à la tête duquel étoit un Homme de Lettres qui s'est acquis de la réputation, Mr. *Gottschling*. En 1716, on le fit venir au College de Berlin où il passa six années, & fut instruit par le Recteur *Bodenburg*, par M. *Frisch* qui a été un Membre distingué de

la Société Royale, par Mrs. *Henning*, *Dietrich*, & par d'autres Maîtres qui enseignoient avec applaudissement. Dès ce tems-là cependant, comme je le vois par quelques réflexions sur les années de ses études, qu'il a laissées en manuscrit, & qui m'ont été communiquées; dès ce tems-là il sentoit que les instructions publiques sont défectueuses à bien des égards, qu'on s'y traîne d'une maniere absurde dans la route des connoissances, & qu'on s'y gâte d'une maniere funeste dans celle des mœurs, faute d'arrangemens salutaires qui ôtent d'un côté à la pédanterie ce sceptre de fer qu'elle appésantit si impitoyablement, & qui préviennent de l'autre les écarts d'une jeunesse déréglée & la contagion du libertinage. Aussi, en déplorant la perte d'un temps qui auroit pû être beaucoup mieux employé par rapport à la culture de l'esprit, il rend les plus ferventes actions de graces à Dieu d'avoir été au moins préservé de la dépravation du cœur; & il reconnoit qu'après Dieu il en a été redevable aux soins vigilans & aux bons exemples de son pere & de sa mere. Il met aussi en ligne de compte, avec beaucoup de raison, les solides enseignemens de la Religion qu'il reçut de M. *Roloff* l'ancien, Pasteur de l'Eglise de S. Marie, par lequel il fut admis à la Sainte Cene. Heureux ceux qui conservent jusqu'au dernier soupir les impressions reçues dans ces circonstances décisives de la vie, où il s'agit d'opter entre Dieu & le Monde! La crainte de Dieu est le véritable commencement de la sagesse.

Il étoit tems de se fixer à un objet & de prendre un parti par rapport à la carriere de ces études qu'on nomme Supérieures, & qui conduisent à un état ou à une profession dans la Société. Il sembloit d'abord que M. SUSSMILCH fût tout décidé. Il avoit un grand penchant pour l'Histoire Naturelle; & M. *Frisch*, que nous avons déjà nommé, alors Con-Recteur du College où il étudioit, fortifia puissamment ce goût inné. Il menoit promener ses disciples dans les campagnes pour y chercher des pierres, des coquillages, des insectes, pour y herboriser, en un mot pour se familiariser avec les différentes parties du Spectacle de la Nature. Le jeune SUSSMILCH étoit

un

un des plus ardens à recueillir les fruits de ces utiles promenades. En 1723, le Théatre Anatomique ayant été mis par le feu Roi sur le pied distingué où il s'est soutenu depuis, M. SUSSMILCH assista au premier Cours qui s'y fit, & s'initia tout de suite aux autres parties dont l'assemblage forme le vaste Corps de la Médecine. Il n'avoit donc plus qu'un pas à faire pour devenir Etudiant dans cette Faculté, & ses parens semblerent d'abord entrer dans ses vues. Mais, ayant changé d'idée bientot après, ils lui témoignerent qu'ils auroient plus de satisfaction de le voir se consacrer à l'étude de la Théologie. En fils bien-né, il déféra à leurs desirs; & dans le fonds ce qu'il avoit fait jusqu'alors ne pouvoit être regardé comme une perte de son tems & de son application. L'étude de la Nature qui conduit à guérir le corps, si l'on sçait bien l'appliquer, sert encore mieux à la cure des ames.

Cependant, comme un Théologien a besoin d'acquérir des connoissances d'un ordre particulier, il falloit de la diligence & un redoublement d'application pour arriver à ce but. Ses parens, en gens très sensés, ne crurent pas l'en détourner, en lui faisant refaire ce qu'on appelle les classes, ou études scholastiques, qu'il avoit un peu négligées. Il fréquenta pour cet effet pendant deux ans & demi l'Ecole de la Maison des Orphelins de Halle; après quoi, en 1727, il fut immatriculé au nombre des Etudians de l'Université de cette Ville. Les Langues Grecque, Hébraïque, & le Rabbinage l'occuperent d'abord; & il eut pour guides des Théologiens très érudits. L'année suivante il se rendit à Jena, où le célebre *Buddeus* donnoit des leçons de Théologie dogmatique, d'Histoire ecclésiastique, & d'Histoire littéraire; & Mrs. *Zimmermann*, *Carpow*, *Köhler* & *Reusch* enseignoient la Philosophie & les Belles-Lettres. N'oublions pas M. *Hamberger*, qui s'est fait un grand nom en Mathématique & en Physique. Deux ans & demi se passerent à écouter ces Docteurs; & il se trouva en état d'enseigner lui-même, ayant instruit avec succès quelques jeunes Seigneurs dans les Mathématiques. Il prit pendant ce tems-là du goût pour la vie académique; & de retour à Berlin en 1732, il sollicita ses parens à consentir

 sentir

sentir qu'il aspirât à quelque Chaire d'Université. Ils lui refuserent ce consentement; & tout ce qu'il obtint d'eux, ce fut de retourner à Jena pour y soutenir une These publique: ce qu'il fit sous M. *Hamberger.* La These imprimée a pour titre *de adhæsione.*

Ici prit fin la carriere de ses études, à laquelle en succéda une autre fort gracieuse pour lui, & qu'on peut regarder comme la principale source des avantages dont il a joui dans la suite. Il fut préposé à l'éducation du fils aîné de M. le Maréchal *de Kalckstein*, dont la Maison étoit une Ecole de vertu & de religion. Il y passa quatre années remplies de douceurs; après lesquelles il eut la satisfaction de demeurer attaché au même Seigneur, en devenant Aumônier de son Régiment. Il reçut l'ordination le dixieme Dimanche après la Trinité, en 1736. Avant que de prendre possession de ce poste, il fit un tour en Hollande; & ce fut à son grand regret qu'il n'eut pas assez de tems pour visiter l'Angleterre, dont il savoit déjà la Langue.

Pendant les heures de loisir que lui laissoient ses fonctions, il fit des études suivies, & composa même quelques Ecrits, parmi lesquels il y en a qui n'ont pas vu le jour, par exemple, une Dissertation sur un ancien peuple de l'Ost-Frise, nommé les *Stedingres*, que les fureurs de la persécution anéantirent en quelque sorte dans le XIII siecle.

Aux Fêtes de la Pentecôte 1739, le feu Roi de glorieuse mémoire le fit prêcher dans son Cabinet; & pendant les derniers mois de la vie de ce Monarque il eut à diverses reprises le même honneur, étant même le dernier qui ait prononcé à Berlin un Sermon en présence de S. M. En 1740, il y eut une Cure vacante à la nomination du Chapitre de Brandebourg, qui l'offrit à M. SUSSMILCH; mais il aima mieux suivre en Silésie le Régiment auquel il étoit attaché, lorsqu'il marcha du côté de cette Province à l'entrée de la Campagne de 1740. Il partagea donc les fatigues, & jusqu'à un certain point les dangers des Troupes; il y en eut même un, auquel il échapa après la bataille de Molwitz, qu'il a toujours regardé comme une des grandes époques

de

de ſa vie, marquée par un effet ſignalé de la protection divine, s'étant trouvé ſur le point de périr dans les flammes d'une maiſon paſtorale à laquelle le Maréchal de Neuperg avoit fait mettre le feu, & d'où il ſe ſauva à cheval à travers le jardin & les champs qui étoient tout parſemés des détachemens de l'Armée ennemie.

Je ne ſai s'il crut devoir ſe mettre à l'abri de ſemblables événemens; ce qu'il y a de certain, c'eſt que bientôt après il vint prendre poſſeſſion de la Cure dont nous avons parlé, nommée *Ezien*, & y fit ſon entrée le 11 Dimanche après la Trinité. Mais à peine y paſſa-t-il un an. M. *Reinbeck*, ce Théologien dont la mémoire ne mourra jamais, ayant payé le tribut en 1741, M. SUSSMILCH fut un des Eccléſiaſtiques qu'on invita à prêcher pendant la vacance. Ayant été fort goûté, le Roi l'accorda aux deſirs de l'Egliſe, & le nomma Prevôt en Fevrier 1742. Il fit ſon premier Sermon dans l'Egliſe de S. Pierre, le même Dimanche, dixieme après la Trinité, auquel un an auparavant M. *Reinbeck* étoit monté pour la derniere fois en Chaire. Aux fonctions de Paſteur il joignit celles de Conſeiller Eccléſiaſtique; & quand le grand Conſiſtoire fut formé en 1750, il en devint un des Membres avec une augmentation d'appointemens.

Nous n'avons pas voulu interrompre le fil des circonſtances de ſa vie eccléſiaſtique; mais nous avons déjà eu ſoin de faire ſentir qu'il s'appliquoit fortement à des études propres à lui donner un rang honorable dans la République des Lettres. Dès l'an 1740, il donna le fruit d'un travail conſidérable & très intéreſſant, en faiſant paroître la premiere Edition de ſon Ouvrage intitulé: *L'Ordre de la Providence dans les révolutions auxquelles le genre humain eſt aſſujetti.* C'eſt là proprement l'occupation de toute ſa vie, le but de toutes ſes recherches, le centre de toutes ſes réflexions; depuis qu'il eut formé ce deſſein, il ne le perdit pas un inſtant de vue, il raſſembla de tous côtés les ſecours qui pouvoient le mettre en état de le perfectionner, il conſulta les Savans dont les lumieres pouvoient étendre les ſiennes, ſurtout notre célebre M. *Euler*; en un mot jamais on n'a vu un Auteur plus

rempli de ſon ſujet, plus livré à cette eſpece d'enthouſiaſme qui perſuade qu'il n'y a rien de mieux que ce qu'on fait, & qu'on le fait le mieux qu'il eſt poſſible de le faire. En diſant cela, je ne dis rien qui n'appartienne à ſon Eloge; car l'Ouvrage en question n'ayant pour but que la gloire de l'Etre ſupreme & le bonheur du genre humain, il ne pouvoit y avoir d'excès dans l'ardeur avec laquelle il s'en occupoit & en occupoit les autres: ou du moins c'étoit un de ces excès louables dont il ſeroit à ſouhaiter que les exemples fuſſent plus fréquens. C'eſt par cette continuité de travaux que M. SUSSMILCH parvint à donner en 1761 une ſeconde Edition, groſſie de plus de la moitié. L'approbation publique lui a ſervi d'encouragement & de récompenſe. Quoique l'entrepriſe, à tout prendre, ne fût pas originale, & que divers Savans Anglois euſſent déjà rompu la glace, & ouvert la plûpart des routes, on peut dire que notre Académicien a beaucoup enchéri ſur eux, qu'il s'eſt procuré des détails auxquels ils n'avoient pas penſé, ou pu parvenir; & qu'il a donné aux idées de la Science qu'on nomme *Arithmétique Politique*, des développemens dont l'application ſeroit fort utile à la ſociété. Peut-être a-t-il quelques longueurs, quelques répétitions; mais on doit les attribuer à ce zele patriotique qui lui faiſoit ſouhaiter de mettre dans tout leur jour & d'inculquer fortement des choſes de l'importance deſquelles il étoit pénétré. J'ai toujours cru qu'une bonne réduction de ce Traité en François ſeroit bien reçue; il ſouhaitoit qu'on en fît une Traduction qui auroit peut-être moins de ſuccès; il m'a proposé plus d'une fois de l'entreprendre, mais mes occupations ne me l'ont pas permis.

Connu donc avantageuſement par la premiere Edition de ſon Livre, les portes de l'Académie lui furent ouvertes peu après ſon renouvellement, dans le cours de l'année 1745; & je n'ai pas beſoin de vous dire, Meſſieurs, que depuis ce tems-là il a été un de nos meilleurs Académiciens, des plus attachés à cette Compagnie, des plus aſſidus à nos Aſſemblées, des plus diſpoſés à nous entretenir dans toutes les occaſions publiques & particulieres, & à fournir ſon contingent

geant pour nos Mémoires. Il apportoit au milieu de nous des dispositions propres à le faire considérer & aimer; un air de candeur & d'affection que le mot de *bon-hommie* n'exprimeroit peut-être pas mal, & qu'il auroit été difficile de ne pas payer de retour; aussi avons-nous pris un véritable intérêt aux situations qu'il a éprouvées, & nous aurions souhaité qu'elles eussent été adoucies par les récompenses auxquelles il a fortement aspiré jusqu'à la fin, & dont il nous a toujours paru très digne.

Après l'objet que nous venons d'indiquer, celui qui paroissoit être le plus du goût de M. SUSSMILCH, c'étoient les recherches étymologiques. Il suivoit la piste de ces traces si effacées & si équivoques qui rapprochent d'une source commune les Langues des contrées les plus éloignées les unes des autres, & des siecles entre lesquels il s'est écoulé le plus grand intervalle de temps. Il n'y a peut-être point de matiere plus flexible, si j'ose m'exprimer ainsi, que celle-là, & qui se prête plus aisément aux modifications que lui imprime une imagination vive & échauffée. Je comparerois ces mots qui voltigent sur la surface des tems & des lieux, aux nuages dispersés dans l'air, où nous voyons à chaque instant toutes sortes de figures nouvelles. Il y a un échantillon de M. SUSSMILCH là-dessus dans le premier Volume de nos Mémoires; il roule *sur la convenance des Langues d'Orient & d'Occident*. Il avoit aussi envoyé à M. *Jault* des Supplémens pour la nouvelle Edition du Dictionnaire de Ménage, faite à Paris en 1750.

Outre les Dissertations qui se trouvent dans les Volumes suivans, & dont je m'abstiens de rapporter les titres, il a fait imprimer séparément une *Réfutation de la doctrine d'*Edelmann, en 1748, deux Dissertations *sur le rapide accroissement de la Ville de Berlin*, en 1750, quelques Sermons de circonstances, & un peu avant sa mort un *Essai destiné à prouver que la premiere Langue parlée n'a pas été l'ouvrage des hommes, mais qu'elle doit son origine au Créateur.*

Il fal-

Il falloit que M. SUSSMILCH fût laborieux pour pouvoir associer aux nombreuses & pénibles fonctions de ses charges ecclésiastiques les travaux académiques dont nous venons de rendre compte, surtout si l'on met encore en ligne de compte la multitude de ses rélations, & des distractions qui le tiroient hors de chez lui presque tous les jours, & lui faisoient passer bien des heures perdues pour son Cabinet, & peut-être dommageables à sa santé. Il aimoit pourtant ce Cabinet, & se ménageoit d'autres heures, au détriment peut-être encore de sa conservation, pour y jouir d'une très belle Bibliotheque qu'il avoit amassée à grands fraix, & qui fait, comme c'est assez l'ordinaire des gens de lettres, presque tout l'héritage de sa nombreuse famille.

Il s'étoit marié le 27 Juin 1737 avec Mlle. *Charlotte Dorothée Lieberkühn*, autre nom auquel notre sensibilité se réveille. Il a goûté avec cette digne Epouse toutes les douceurs de l'état conjugal, accompagnées de ce qu'on en nomme les bénédictions, ayant eu d'elle dix enfans, dont neuf avec la mere lui survivent. Des deux fils, l'un est déjà dans les Emplois en Silésie, & l'autre va commencer ses études à l'Université. Une bonne éducation que toute cette famille a reçue annonce qu'elle soutiendra le nom honorable que lui a transmis l'objet de son respect & de son attachement, trop tôt enlevé à ses vœux & à ses besoins.

M. SUSSMILCH paroissoit bien constitué & naturellement vigoureux. Avec cela il étoit dans toute la force de l'âge, lorsqu'un coup d'apoplexie imprévu & foudroyant vint le terrasser le 21 Mai 1763. Il s'en releva cependant, mais dans un état bien propre à faire craindre les rechûtes. Son bras gauche demeura paralytique. Il employa tous les secours de l'art pour sa guérison, & fit en particulier le voyage des bains de Töplitz. Mais tout cela n'aboutit qu'à lui procurer quelque répit, sans faire disparoître les symptômes qui caractérisoient son mal. Une retraite exacte & un régime rigoureux auroient peut-être prolongé ce répit. Au mois de Septembre de l'année passée

ſée il eut encore la conſolation d'officier en prononçant un Sermon pour la Dédicace d'une nouvelle Chaire conſtruite dans l'Egliſe de S. Pierre. La derniere de nos Aſſemblées à laquelle il a aſſiſté eſt celle du 12 Mars. Le 17 du même mois il fut frappé d'un violent coup, ſuivi des accidens les plus fâcheux, qui le priverent également de l'uſage des membres du corps & de celui des facultés de l'ame. La Nature, après avoir ſoutenu quelque tems ces aſſauts, ſuccomba, & il ceſſa de vivre le 22 Mars. Les derniers devoirs rendus à ſa mémoire par un excellent Orateur Chrétien ont attendri une foule prodigieuſe d'Auditeurs; & ceux dont je viens de m'acquitter, ſerviront à perpétuer ſa mémoire dans une Compagnie, à laquelle de ſemblables pertes ne peuvent manquer de cauſer les plus vifs regrets.



OBSERVATION DU PASSAGE DE VENUS SUR LE SOLEIL FAITE A' COLOMBES PRÈS DE PARIS LE 3 JUIN 1769.

PAR M. J. BERNOULLI. (*)

Je dois aux bontés de Mr. le Marquis de Courtanvaux, l'agrément d'avoir fait cette obſervation avec un excellent inſtrument, toute la commodité poſſible, & tout le ſuccès que je pouvois eſpérer. (**) Ce fut le 2 de Juin que je me rendis, pour 2 ou 3 jours, à Colombes, où eſt l'Obſervatoire de ce Seigneur. J'étois impatient de connoître l'heure & la marche de la Pendule, qu'on ignoroit, mais je ne pus faire que peu de choſes à cet égard avant le 4: le tems ne permettoit pas d'obſerver beaucoup, il ſembloit même vouloir rendre l'obſervation du paſſage impraticable, & trois heures encore auparavant nous eumes un ouragan des plus violens, accompagné de beaucoup de pluye.

Je ne laiſſois pas de me préparer, pour obſerver l'entrée de Venus, avec toutes les attentions néceſſaires; & dans ce deſſein j'avois ajuſté à ma vue, au moyen des bandes de Jupiter & des taches du Soleil, un excellent Téleſcope Grégorien fait par Short, de 2 pieds de

(*) On n'a pas cru devoir attendre l'impreſſion du Volume de 1769 pour publier cette Obſervation.

(**) La complaiſance & la générofité de M. le Marquis ſont allées plus loin que ne le pourroient croire ceux qui ne connoiſſent pas ſa façon de penſer. Un Téleſcope Equatòrien duquel il ſe propoſoit de ſe ſervir, s'étant trouvé dérangé peu de tems avant l'obſervation, il ne voulut ni accepter le Téleſcope qu'il m'avoit deſtiné, ni même monter un autre de ſes Inſtrumens de peur de me troubler.

de foyer, & que j'ai trouvé, par une expérience, grossir environ cent fois.

Le tems de l'entrée approchant, un homme habitué à compter les secondes se posta auprès de la Pendule, & de mon côté je me fis une place très commode auprès du Télescope, & je regardai fréquemment le Soleil, munissant l'œil contre ses rayons avec des morceaux de glace encadrés par Dollond & médiocrement enfumés. De fréquens nuages passoient sur le Soleil; je vis bientôt qu'ils m'avoient empêché de voir le premier contact, & qu'il devoit être arrivé depuis plusieurs secondes. De nouveaux nuages m'empêcherent de voir l'entrée continuer; mais, au bout de cinq à six minutes, le Soleil reparut & je vis sur son disque une partie considérable de celui de Venus; l'un & l'autre étoient déjà assez mal terminés à cause de leur voisinage de l'horizon. J'attendois avec impatience le moment du second contact lorsqu'après plusieurs nuages il en vint un très épais & presque immobile qui me fit craindre de manquer cet instant; heureusement il disparut à la fin tout à fait environ une demi-minute avant ce contact, que j'eus ensuite la satisfaction de saisir dans un moment où il n'y avoit aucun nuage sur le Soleil, où Venus étoit bien au milieu du champ du Télescope, & où mon œil n'étoit point fatigué. Il est vrai que les vapeurs qui s'élevoient de l'horizon rendoient les bords des disques très mal terminés, le bord de Venus surtout étoit comme dentelé; mais voici ce que j'ai remarqué avec précision.

A $7^h. 31'. 28''$ de la Pendule, je vis qu'une seule des éminences du bord de Venus touchoit encore le bord du Soleil.

7. 31. 29 Je voyois la même apparition.

7. 31. 30 Je ne pouvois pas dire qu'elle eût cessé, mais ce contact n'étoit plus que très foible.

7. 31. 31 Enfin j'ai vu distinctement un filet de lumiere très délié entre l'éminence dont je parle & le bord du Soleil le plus proche.

Comme j'ai vu pendant plusieurs secondes Venus s'éloigner de plus en plus du bord du Soleil, j'ai adopté ce tems de $7^h. 31'. 31''$ pour le tems observé du contact intérieur, & j'ai réduit cette heure en tems vrai en y ajoutant $6'. 43''$. Je vais indiquer ici les données sur lesquelles je me fonde pour cette réduction.

Voici d'abord des hauteurs correspondantes du Soleil, du 4 Juin, telles que j'ai pu les prendre avec un Quart de cercle de 2 pieds, bien travaillé, mais qui n'avoit pas servi de quelques semaines avant mon arrivée, & qui ne m'étoit pas familier.

Matin.		Hauteurs du bord supér. du ⊙.	Soir.	Sommes.	Heures à midi.
$20^h. 33'. 28''$	1r fil	$43^\circ. 3'. 20''$	$3^h. 13'. 17''$	$23^h. 46'. 45''$	$11^h. 53'. 22\frac{1}{2}''$
33. 48	2d.		12. 55½	46. 43½	53. 22
37. 27½	1r fil		9. 20	46. 47½	53. 23¾
37. 48	2d	43. 10. 15	8. 58¾	46. 46¾	53. 23½
38. 9	3e		8. 37	46. 46	53. 23
44. 58½	1r fil		1. 53	46. 51½	53. 25¾
45. 19½	2d	44. 51. 0	1. 32	46. 49½	53. 24¾
45. 41	3e		1. 10½	46. 51½	53. 25¾
48. 56½	1r fil	45. 29. 0	2. 57. 55	46. 51½	53. 25¾
49. 17½	2d		57. 34	46. 51½	53. 25¾
51. 53½	1r fil	45. 56. 0	54. 52	46. 45½	53. 22¾
51. 15	2d		54. 30½	46. 45½	53. 22¾
55. 58	1r fil		nuage		
56. 19	2d	46. 31. 45	50. 32	46. 51	53. 25½
56. 40	3e		50. 10	46. 50	53. 25

Me rappellant que les premieres observations du matin avoient été un peu défectueuses, j'ai cru pouvoir adopter $11^h. 53'. 24\frac{1}{2}''$ avec assez de certitude, & retranchant $4\frac{1}{2}''$ pour la correction du midi, j'ai con-

clu

clu que l'heure de la Pendule au midi vrai le 4 Juin avoit été $23^h. 53'. 20''$.

Or Mr. le Marquis de Courtanvaux avoit obſervé le paſſage du centre du Soleil à ſa lunette méridienne, qui ne dévioit pas conſidérablement

le 2 Juin à $11^h. 53'. 7''$
le 4 - - $11^h. 53'. 14''$.

La Pendule avoit donc avancé en 2 jours de $7''$ ſur le Soleil; elle avoit marqué $11^h. 53'. 16\frac{1}{2}''$ le 3 Juin à midi & ce jour-là il étoit $7^h. 38'. 14''$ Tems vrai lorſqu'elle marquoit $7^h. 31'. 31''$.

Ce qui confirme la juſteſſe de cette détermination ce ſont quelques hauteurs du bord ſupérieur du Soleil que j'ai priſes 2 heures avant le paſſage de Venus, & avec le même Quart de cercle, & que je n'ai calculées que longtems après. (*) Les voici:

Hauteurs du 2d bord du Soleil.	Tems obſerv.	Tems calculés.	Retard de la Pendule.
22°. 46'. 35''	5h. 17'. 20''	5h. 24'. 4½''	6'. 44⅓''
21. 47. 25	23. 27	5. 30. 10	6. 43
20. 57. 30	28. 37	5. 35. 19⅓	6. 42⅓
20. 28. 20	31. 37	5. 38. 15	6. 38
19. 23. 15	38. 22	5. 45. 7½	6. 45⅓

En prenant le milieu entre ces cinq obſervations, on trouve $6'. 42\frac{1}{2}''$ pour le retard de la pendule; mais en regardant la 4e obſervation comme ſuſpecte, on trouve $6'. 43''$.

Il eſt donc hors de doute que le tems obſervé du contact intérieur, $7^h. 31'. 31''$, eſt en tems vrai $7^h. 38'. 14''$.

J'ajoûterai que ce tems ſe réduit au Méridien de l'Obſervatoire de Paris en y ajoutant 20 à 21 ſecondes.

 Avant

(*) La Latitude de Colombes eſt $48°. 55'. 28''$.

Avant que le Soleil se cachât derriere des arbres qui empêchoient de voir son coucher, je fis encore exactement avec le même Quart de cercle les observations suivantes:

à 7ʰ. 46′. 50″	Tems vrai,		passage du bord supérieur de ♀ (dans la lunette) au fil horizontal,
47′. 2″	—	—	bord inférieur du ☉ au même,
47. 26	—	—	bord oriental du ☉ au vertical,
48. 53	—	—	bord oriental de ♀ au même.

M. de la Lande les a jointes à quelques unes des siennes de la même espece pour les calculer.

Je joindrois ici plusieurs distances de cornes que j'ai observées pendant l'éclipse du Soleil du lendemain, mais les regardant comme incertaines à cause de l'instabilité de l'Instrument dont je me servois, & d'une forte indisposition avec laquelle je m'étois levé, je me contenterai d'avoir fait ces observations pour m'exercer. Quant à la fin de l'éclipse, je l'ai observée avec le même Télescope Grégorien dans un instant très favorable

le 3 Juin à 20ʰ. 27′. 26″ tems vrai

& je compte sur cette observation à 3″ ou 4″ près.

Ecrit à Bâle le 15 Juillet 1769.

À BERLIN

IMPRIMÉ CHEZ JEAN GODEF. MICHAELIS.



